Maths - Chapitre 5

Fonctions de référence

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
c) Complexes de module 1 et trigonométrie	
Fonction tangente. Formule $\tan(a \pm b)$	Notation tan.

Techniques fondamentales de calcul en analyse

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes d) Fonctions usuelles	
Étude des fonctions exponentielle, cosinus et sinus hyperboliques, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Logarithme décimal	Notation log ou $\log_{10}$. $\rightleftarrows$ PC : pH. $\rightleftarrows$ PC et SI : diagrammes de Bode.
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	$\rightleftarrows$ PC et SI.
Fonctions circulaires réciproques.	Notations Arcsin, Arccos, Arctan. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp \circ \phi$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	$\rightleftarrows$ PC et SI : électrocinétique.

II. Fonctions usuelles

II.1. Logarithmes, exponentielle

a) Logarithmes

Définition 5.1 (Logarithme népérien)

D'après la proposition 3.34, la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ admet une unique primitive qui s'annule en 1. Elle se note ln et s'appelle la fonction ***logarithme népérien***.

Remarque

- La fonction $F : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. C'est évident sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, $F'(x) = -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.
- On utilise souvent en physique, chimie et sciences de l'ingénieur la fonction ***logarithme décimal*** notée $\log_{10}$ ou plus simplement log et définie par $\log_{10} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10} \in \mathbb{R}$.

Propriété 5.2 (Propriétés opératoires)

- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour $a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Démonstration

Propriété 5.3 (Variation, limites)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration

Corollaire 5.4

La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Notation

On note e l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$. Approximativement, $e \simeq 2,7$.

Ex. 5.1 Établir, pour $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Cor. 5.1

Ex. 5.2 Montrer que, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.
En déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.

Cor. 5.2

b) Exponentielle

Définition 5.5 (Exponentielle)

La fonction exponentielle, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction ln.

Remarque

Pour tout entier relatif n, on a $\ln(e^n) = n\ln(e) = n = \ln(\exp(n))$. On en déduit, ln étant injective, que $\exp(n) = e^n$. On généralise en notant, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Propriété 5.6 (Dérivée de l'exponentielle)

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration

Propriété 5.7 (Propriétés opératoires)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$ (équation fonctionnelle).
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

Démonstration

Ex. 5.3 (Cor.) Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.

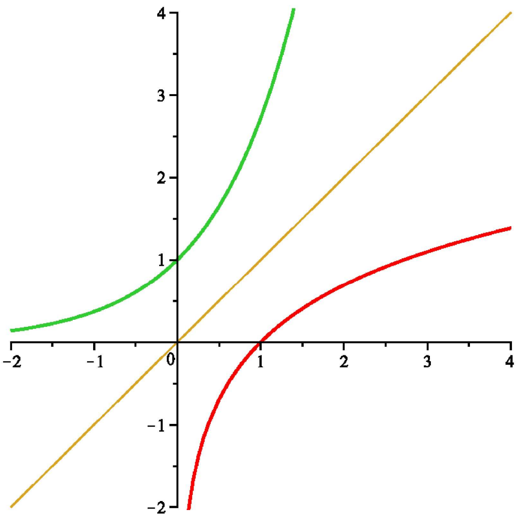
Ex. 5.4 Établir, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Cor. 5.4

Ex. 5.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$
puis que $e \geqslant \dfrac{5}{2}$.

c) Synthèse et représentations graphiques

Exponentielle et logarithme



Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\exp(x)$	
Variations de exp	

Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	
Variations de $\ln\lvert x\rvert$	

II.2. Puissances

Définition 5.8 (Fonctions puissances)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α, notée p_α, est définie par $p_\alpha : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$.

Remarque

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}$ et pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour toute autre valeur de α, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge pour $\alpha > 0$ par continuité par 0 en 0.
- ***Il est très important de retenir que, par définition,***

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}.$$

Dans la plupart des problèmes faisant intervenir des puissances d'exposant non entier, c'est la seconde expression qui permet de parvenir au résultat.

Propriété 5.9 (Dérivée)

L'application p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $p_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Démonstration

Propriété 5.10 (Propriétés opératoires, variations, limites)

- Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

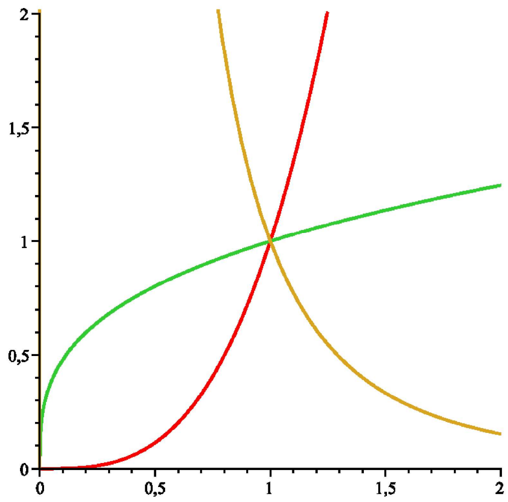
- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
- Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$, p_0 est la fonction constante à 1.

Démonstration

Remarque

La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ prolongée par 0 en 0 vérifie, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$. C'est donc la bijection réciproque de la fonction carrée restreinte à $\mathbb{R}_+$: c'est la fonction racine carrée.

Fonctions puissance



$\alpha \geqslant 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$0 \leqslant \alpha < 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$\alpha < 0$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

II.3. Croissances comparées

Lemme 5.11 (Lemme fondamental)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

Démonstration

Proposition 5.12 (Croissances comparées)

- Pour tous réels strictement positifs α et β, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

- Pour tout réel a strictement supérieur à 1 et tout réel α, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}a^x|x|^\alpha=0$$

Démonstration

Méthode : Fonction du type u^v

Soit $u : D \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : D \to \mathbb{R}$. Pour étudier $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on écrira,

$$\forall x \in D, f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Ex. 5.6 (Cor.) [**] Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x^y + y^x > 1$.

Ex. 5.7 Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

II.4. Fonctions circulaires

a) Rappels

On suppose connue la définition des fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique dont on déduit immédiatement :

Propriété 5.13

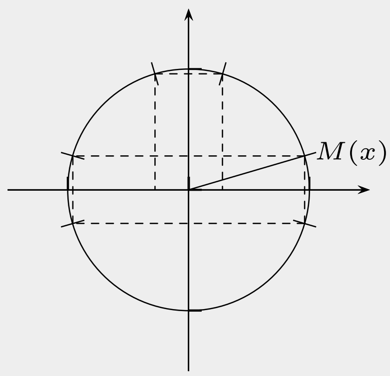
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll}
-1 \leq \cos(x) \leq 1 & -1 \leq \sin(x) \leq 1 \\
\cos(x+2\pi) = \cos(x) & \sin(x+2\pi) = \sin(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x) \\
\cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\
\cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\
\cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x)
\end{array}$$

$\cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ par le théorème de Pythagore.



Définition 5.14 (Fonction tangente)

La fonction tangente est définie par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.
Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
L'application tan est impaire, π-périodique.

b) Formules d'addition

Propriété 5.15 (Formules d'addition)

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{aligned}$$

Corollaire 5.16 (Formules d'addition de la fonction $\tan$)

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Démonstration

Corollaire 5.17 (Formules de duplication)

Lorsque ces expressions sont définies,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

Démonstration

c) Dérivées des fonctions trigonométriques

Lemme 5.18 (Nombre dérivé de $\sin$ en 0)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Propriété 5.19 (Fonctions dérivées de $\cos$, $\sin$ et $\tan$)

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur ces ensembles

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

On a de plus $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Démonstration

II.5. Fonctions circulaires réciproques

La restriction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ de la fonction sinus est strictement croissante, donc injective (d'après la proposition 3.19) ; de plus, $\sin(\frac{-\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est donc une bijection continue de $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.

De même, $\cos_{|[0,\pi]}$ est une bijection continue strictement décroissante de $[0,\pi] \to [-1,1]$ et $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

une bijection continue strictement croissante de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Définition 5.20 (Arcsinus, arccosinus, arctangente)

- Arcsinus, notée Arcsin, est la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$:

$$\text{Arcsin} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \longmapsto & \sin^{-1}_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x) \end{cases}$$

- Arccosinus, notée Arccos, est la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$:

$$\text{Arccos} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \cos^{-1}_{|[0,\pi]}(x) \end{cases}$$

- Arctangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$:

$$\text{Arctan} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \tan^{-1}_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x) \end{cases}$$

Propriété 5.21 (Équations trigonométriques)

- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}x) = x$ et $\cos(\text{Arccos}x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}x) = x$.
- Pour tout $y \in [-1,1]$, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de
  $\sin(x) = y$ est $S_1 = \{\text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  $\cos(x) = y$ est $S_2 = \{\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ a pour ensemble de solutions $\{\text{Arctan}\, y + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété 5.22

- Arcsin est impaire, strictement croissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arctan est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Démonstration

Important ! Bijections réciproques de restrictions

Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan ***ne sont pas*** les réciproques de sin, cos ou tan, mais celles de restrictions bien choisies. Ceci engendre quelques difficultés. Par exemple :

- $\text{Arcsin}(\sin x) = x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;
- $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

On fera également attention pour $\operatorname{Arccos}(\cos x)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan x)$.

Ex. 5.8 Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x)$, $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan x)$ si $x \in [\pi, 2\pi]$.

Cor. 5.8

Lemme 5.23

Pour $x \in [-1, 1]$, $\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

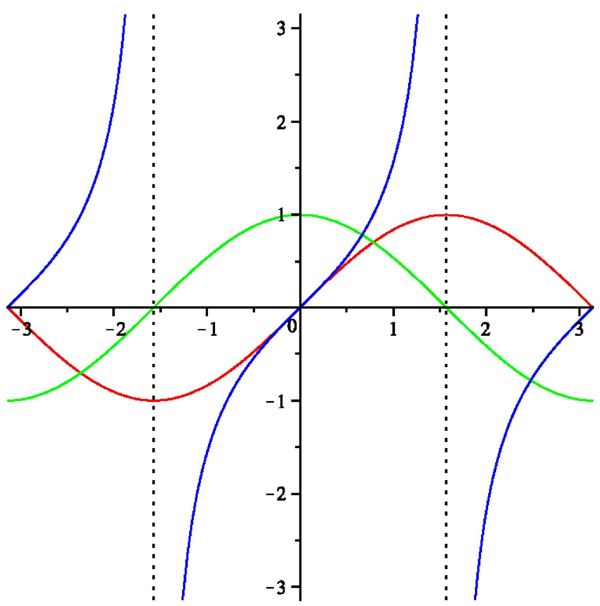
Démonstration

Propriété 5.24 (Dérivabilité)

- Arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $\operatorname{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques

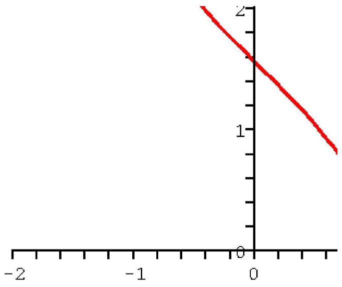


Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$					
Variations de cos					

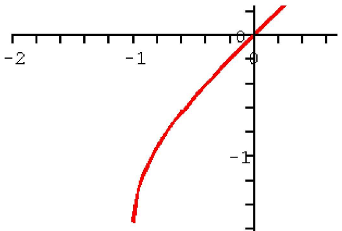
Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

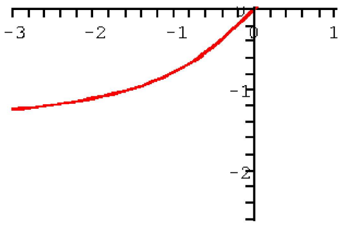
Fonctions trigonométriques réciproques



Valeur de x	-1 0 $+1$
Signe de $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arccos	



Valeur de x	-1 0 $+1$
Signe de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arcsin	



Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\dfrac{1}{1+x^2}$	
Variation de Arctan	

Ex. 5.9 Montrer que $2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2} = \mathrm{Arctan}\,\frac{4}{3}$.

Cor. 5.9

Ex. 5.10 Simplifier les expressions $\sin(2\,\mathrm{Arcsin}(x))$, $\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}\,x\right)$ et $\cos(\mathrm{Arctan}\,x)$.

Cor. 5.10

Ex. 5.11 Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arccos}\,x + \mathrm{Arcsin}\,x = \dfrac{\pi}{2}$.

Cor. 5.11

Ex. 5.12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Qu'en est-il si $x \in \mathbb{R}_-^*$?

Cor. 5.12

Ex. 5.13 (Cor.) Simplifier lorsque c'est possible $\mathrm{Arccos}\,(1-2x^2)$.

II.6. Valeurs particulières des fonctions circulaires et de leurs réciproques

Remplir les deux tableaux suivants :

Valeur de x	Valeur de $\cos(x)$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
Valeur de	Valeur de u

Valeur de x	Valeur de $\sin(x)$	Valeur de $\tan(x)$
$\frac{-\pi}{2}$		
$\frac{-\pi}{3}$		
$\frac{-\pi}{4}$		
$\frac{-\pi}{6}$		
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
Valeur de	Valeur de u	//////////
Valeur de	//////////	Valeur de u

II.7. Résumé des formules de composition à connaître

Méthode : Simplification des composées de fonctions circulaires et réciproques

- $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x \\ \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x \end{array} \right.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$
- $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0;\pi]$: autrement dit, $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $[0;\pi]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et cos périodique de période 2π.
- $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: autrement dit, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = \sin(-x) = -\sin(x)$ et sin périodique de période 2π.
- $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: autrement dit, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. En dehors de cet intervalle, on utilise la propriété tan périodique de période π.
- Enfin, on a démontré les propriétés suivantes :
  $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$

Ex. 5.14

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$.
2) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left[\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$.
   Simplifier $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$.

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [k\pi; \pi + k\pi]$.
   Simplifier $\text{Arccos}(\cos(x))$.
4) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
   Simplifier $\text{Arctan}(\tan(x))$.

II.8. Fonctions hyperboliques

Définition 5.25 (Fonctions hyperboliques)

- La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est définie par $\text{ch} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$.
- La fonction sinus hyperbolique, notée sh, est définie par $\text{sh} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$.

Propriété 5.26

Pour tout réel x, on a $\text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$, $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = e^{-x}$ et $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration

Remarque

De la même façon que $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, la troisième formule montre que $t \mapsto (\text{ch}\, t, \text{sh}\, t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$.
Cet ensemble est ***une hyperbole***, ce qui justifie l'adjectif hyperbolique.

Ex. 5.15 Obtenir pour $x \in \mathbb{R}$ des formules de duplication de $\text{ch}(2x)$ et $\text{sh}(2x)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Cor. 5.15

Ex. 5.16 (Cor.) Obtenir pour $a, b \in \mathbb{R}$ des formules d'addition de $\text{ch}(a+b)$ et $\text{sh}(a+b)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Propriété 5.27 (Dérivées)

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ et $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$.

Démonstration

Propriété 5.28 (Variations, limites)

- L'application ch est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue. De plus, $\lim_{x\to-\infty} \text{ch}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{ch}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).
- L'application sh est impaire, strictement croissante et continue. De plus, $\lim_{x\to-\infty} \text{sh}(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \text{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{sh}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).

Démonstration

Ex. 5.17 Calculer les dérivées secondes des fonctions $f : x \mapsto \sin x \,\text{sh}\, x$ et $g : x \mapsto \cos x \,\text{ch}\, x$.

Cor. 5.17

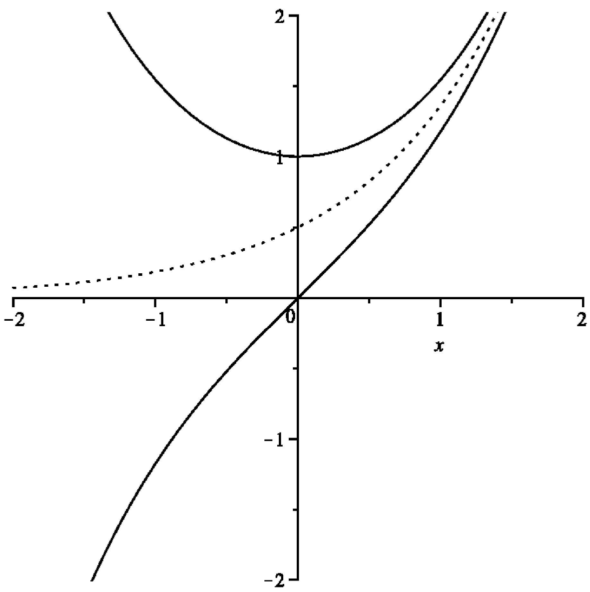
Ex. 5.18 Étudier les variations de $h : x \mapsto \text{sh}x + \cos x$.

Cor. 5.18

Remarque

- On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soit $m : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $E(x, m(x))$ est le milieu du segment vertical $[S(x, \text{sh}\, x), C(x, \text{ch}\, x)]$.
- On montre en mécanique que la courbe représentative de ch épouse la forme d'un fil pesant et homogène suspendu par ses deux extrémités. Pour cette raison, on l'appelle la chaînette.

Fonctions hyperboliques



Valeur de x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}(x)$	
Variations de ch	
Variations de sh	
Signe de $\mathrm{ch}(x)$	

III. Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Dans ce qui suit, I est à nouveau un intervalle réel contenant une infinité de points.

III.1. Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Définition 5.29 (Parties réelle et imaginaire, module)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes.
Il existe un unique couple de fonctions $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + if_2$.
L'application f_1 s'appelle la ***partie réelle*** de f et f_2 s'appelle la ***partie imaginaire*** de f.
L'application $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ s'appelle ***module*** de f.

Notation

On note $f_1 = \mathcal{R}e\,(f)$, $f_2 = \mathcal{I}m\,(f)$ et $|f|$ le module de f.

Définition 5.30 (Fonctions à valeurs complexes bornées)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est bornée si $|f|$ est majorée.

Remarque

Cette définition généralise la notion de fonction à valeurs réelles bornée. Cependant, les notions de fonction majorée et de fonction minorée ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

Ex. 5.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{\sin x}{ix + x + 1}$. Calculer l'expression pour $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{R}e\,(f)\,(x)$ et de $\mathcal{I}m\,(f)\,(x)$.

Cor. 5.19

III.2. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition 5.31

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont continues. De même, on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont dérivables. On pose alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathcal{R}e\,(f)'\,(x) + i\mathcal{I}m\,(f)'\,(x)$.
Enfin, on dit que $F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$ si $F' = f$. On étend de même la notion d'intégrale, en posant pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{R}e\,(f)\,(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathcal{I}m\,(f)\,(t)\mathrm{d}t$.

Les formules portant sur la dérivée (ou la continuité) d'une somme, d'un produit ou d'un quotient sont aussi valables pour les fonctions à valeurs complexes.

III.3. Dérivée de $\exp \circ \phi$

Proposition 5.32

Si $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\phi(t)} \end{cases}$ est aussi dérivable et $\left(e^{\phi}\right)' = \phi' e^{\phi}$.

Démonstration

IV. Compléments

IV.1. Technique d'élimination des racines carrées

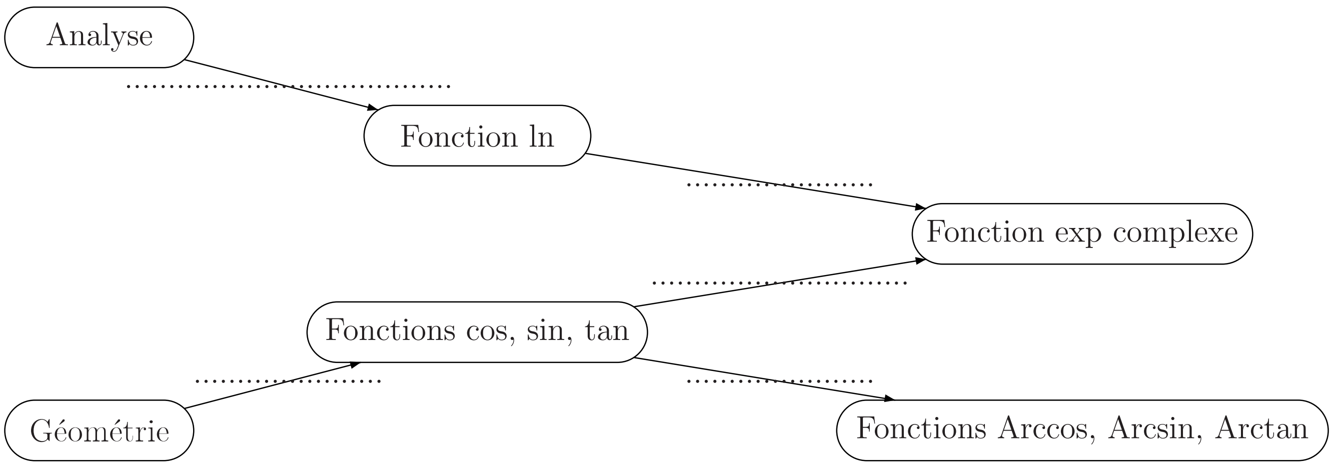
Méthode : Élimination des racines carrées

Pour les expressions du type $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 + x^2}$ et $\sqrt{x^2 - 1}$, à l'aide d'un changement de variable judicieux, on fait apparaître un carré sous la racine.

- Pour $\sqrt{1 - x^2}$, définie si $x \in [-1, 1]$, on pose $x = \sin t$.
  Ainsi $\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Si l'on impose $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut se passer des valeurs absolues. Ici, on peut aussi poser $x = \cos t$.
- Pour $\sqrt{1 + x^2}$, définie pour tout x réel, on pose $x = \operatorname{sh} t$.
  Alors $\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t$.
- Pour $\sqrt{x^2 - 1}$, définie pour tout $x \geqslant 1$, on pose $x = \operatorname{ch} t$.

Par suite $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$. On peut se passer de la valeur absolue en imposant $t \geqslant 0$. La quantité $\sqrt{x^2-1}$ est aussi définie pour tout $x \leqslant -1$; dans ce cas, on pose $x = -\operatorname{ch} t$.

IV.2. Résumé de l'ordre logique de définition des fonctions usuelles



IV.3. Tableau des dérivées/primitives usuelles

Fonction $\xrightarrow{\text{Dérivation}}$	Dérivée	Intervalle(s) de validité
$\ln\lvert x\rvert$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0;+\infty[$ prolongeable en 0 si $\alpha \geqslant 1$ valable aussi sur $]-\infty;0[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$
Arcsin	$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
Arccos	$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
Arctan	$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
ch	sh	$\mathbb{R}$
sh	ch	$\mathbb{R}$
Primitive $\xleftarrow{\text{Primitivation}}$	Fonction	Intervalle(s) de définition

Remarque

- Une fonction continue possède une primitive sur ***tout intervalle inclus dans son ensemble de définition*** d'après le théorème 3.34 (théorème fondamental du calcul intégral).
- Pour cette raison, l'***ensemble de dérivabilité d'une fonction de référence*** est l'***intersection de son ensemble de définition avec l'ensemble de définition de sa dérivée***.
- Le théorème de dérivation d'une composée (3.26) s'écrit, dans le cas particulier des fonctions de référence, de la façon suivante :
  $(\exp\circ\phi)' = \phi' \times \exp\circ\phi$
  $(\ln\circ\phi)' = \phi' \times \dfrac{1}{\phi}$
  etc...
  à condition que ϕ prenne ses valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de $\exp$***,*** $\ln$***, etc...***

IV.4. Exercice : fonctions trigonométriques et hyperboliques

Ex. 5.20 Simplifier les expressions suivantes en donnant leur domaine de validité :
$A = \dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$
$B = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$

Cor. 5.20

Ex. 5.21 Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables. Établir que le produit fg est dérivable sur I et que $(fg)' = f'g + fg'$.

Cor. 5.21

V. Correction des exercices

Cor. 5.3 : On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- **Initialisation** : $\forall a_1 \in \mathbb{R}, \exp(a_1) = \exp(a_1)$.
- **Hérédité** :
  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné et quels que soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.
  $\forall a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\exp(a_{n+1})$.
  On utilise alors la propriété de récurrence :
  $\forall a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)\exp(a_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \exp(a_i)$.

- **Conclusion** : la propriété est initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$$

Cor. 5.6 : Pour $x \geqslant 1$, comme $y > 0$, $x^y \geqslant 1$ et $y^x > 0$, donc $x^y + y^x > 1$. De même, l'inégalité est vérifiée pour $y \geqslant 1$. On suppose donc $0 < y < 1$ et on pose $f : x \in \,]0,1] \mapsto x^y + y^x = x^y + e^{x\ln(y)}$
f est dérivable sur $]0,1]$ comme somme et composée de fonctions dérivables et
$f'(x) = yx^{y-1} + \ln(y)y^x = y\left(x^{y-1} + \ln(y)y^{x-1}\right)$ qui est du signe de $x^{y-1} + \ln(y)y^{x-1}$.
En posant $g : x \in]0,1] \mapsto \dfrac{x^{y-1}}{y^{x-1}} + \ln(y)$, étudier le signe de f' revient à étudier celui de g. C'est une fonction dérivable, de dérivée
$$g'(x) = \frac{(y-1)x^{y-2}y^{x-1} - \ln(y)x^{y-1}y^{x-1}}{y^{2x-2}} = (y - 1 - x\ln(y))\frac{x^{y-2}}{y^{x-1}}$$

qui est du signe de $y - 1 - x\ln(y)$.
Or $y - 1 - x\ln(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y-1}{\ln(y)} \geqslant x$ car $\ln(y) < 0$. De plus, pour tout $y \in \,]0,1[, \ln(y) < y - 1$ donc $0 < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{y-1}{\ln(y)}\right]$ de limite $+\infty$ en 0^+ et strictement croissante sur $\left[\frac{y-1}{\ln(y)}, 1\right]$ avec $g(1) = 1 + \ln(y)$.

Valeurs de x	0		$\frac{y-1}{\ln(y)}$		1
Variations de $g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\frac{y-1}{\ln(y)}\right)$	$\nearrow$	$1+\ln(y)$

Or, $g(y) = 1 + \ln(y) = g(1)$***, donc, pour tout*** $y \in \,]0,1[$***, on a*** $y < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$ ***et*** g ***est strictement décroissante sur*** $]0, y]$***. On en déduit, en notant*** $\alpha \in]0, y]$ ***l'unique solution de*** $f'(\alpha) = 0$ ***si elle existe, que le tableau de variations de*** f ***sur*** $]0, y]$ ***est de la forme :***

Si $y \geqslant \frac{1}{e}$			
Valeurs de x	0		y
Signe $f'(x)$		$+$	
Variations de $f(x)$	1	$\nearrow$	$2y^y$

Si $y < \frac{1}{e}$					
Valeurs de x	0		α		y
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de $f(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$2y^y$

Ces tableaux de variations permettent de conclure dans tous les cas puisque :

- si $y \in \,]0,1[$ et $x \in \,]0,y]$, $y \in \,]0,1[\mapsto 2y^y$ passe par un minimum $2e^{-\frac{1}{e}} > 1$ en $y = \frac{1}{e}$ donc $f(x)$ est minorée par sa limite 1 lorsque $x \to 0$;
- si $y \in \,]0,1[$ et $x \in [y,1[$, on arrive à la même conclusion en échangeant x et y.

Cor. 5.13 : $\operatorname{Arccos}(1-2x^2)$ a un sens si $-1 \leqslant 1 - 2x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire si $-1 \leqslant x \leqslant 1$. On peut se limiter à $0 \leqslant x \leqslant 1$ grâce à la parité.
Voici deux méthodes.

- (Changement de variable) On pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $1 - 2x^2 = 1 - 2\sin^2(t) = \cos(2t)$ et, comme $0 \leqslant 2t \leqslant \pi$, on en déduit $\operatorname{Arccos}(\cos(2t)) = 2t$.
  Ainsi, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2\operatorname{Arcsin} x$.
  On conclut grâce à la parité que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos}(1-2x^2) = 2|\operatorname{Arcsin} x|$.
- (En dérivant) La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(1-2x^2)$ est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in \,]0,1[$,
  $f'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
  Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = 2\operatorname{Arcsin}(x) + k$.

Les deux membres de cette identité étant continus sur $[0;1]$, on obtient $k=0$ en calculant leur valeur par exemple pour $x=0$ ou $x=1$ ou $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ldots$
Ainsi pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\text{Arccos}\,(1-2x^2) = 2|\text{Arcsin}x|$.

Cor. 5.16 :

1) $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b+e^{-a}e^{-b}}{2} = \operatorname{ch}(a+b)$.
2) $\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b = \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b-e^{-a}e^{-b}}{2} = \operatorname{sh}(a+b)$.