Fonctions de référence

I. Logarithmes et exponentielle

Ex. 5.1 Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$.

a. Compléter : n s'écrit avec exactement q chiffres si et seulement si
.... $\leq n <$ ....

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\log_{10}(n)$ pour que n s'écrive avec q chiffres.

c. En utilisant le fait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, donner une valeur approchée de $\log_{10}(2)$.

d. Donner le nombre approximatif de chiffres du plus grand nombre premier connu $2^{77\,232\,917} - 1$ (record obtenu le 3 janvier 2018 - voir exercice 2.11).
[Réponse : ce nombre premier possède 23 249 425 chiffres en base 10.]

Ex. 5.2 (Cor.) Soient $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Montrer que $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Ex. 5.3

a. Montrer que pour tout réel positif x, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

b. Montrer que $e \geqslant \dfrac{8}{3}$.

Ex. 5.4 Calculer, si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 4x + 1 - \ln(x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x + 1$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3+1}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

Ex. 5.5 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. Que peut-on dire des limites de la forme $1^{+\infty}$?
Calculer de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Interpréter ces résultats en terme de formes indéterminées.

Ex. 5.6 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+} x^x$ $\lim\limits_{x\to0^+} \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)^x$
Quelle conclusion peut-on en tirer sur la valeur que pourrait avoir 0^0 ?
Calculer la limite $\lim\limits_{x\to0^+} \left(2^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ et préciser votre réponse.

Ex. 5.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x :
(E_1) : $\log_{10}(x+2) - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-1)$.
(E_2) : $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

II. Fonctions trigonométriques et réciproques

Ex. 5.8 Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Ex. 5.9 Donner la valeur de $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$.

Ex. 5.10 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan x = 1$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2(x)$

d. $\cos(12x) - \cos(2x) = \sqrt{3}\sin(5x)$

Ex. 5.11 Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$.

Ex. 5.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{6}$ b. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

c. $\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arccos} x$ d. $\operatorname{Arcsin}(2x-1) = \alpha \in \mathbb{R}$

Ex. 5.13 (Cor.) $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

III. Fonctions hyperboliques

Ex. 5.14 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $\operatorname{ch}(3x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$.

b. Linéariser $\operatorname{sh}^2(x)\operatorname{ch}(x)$ (c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto \operatorname{ch}(kx)$ ou $x \mapsto \operatorname{sh}(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$).

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$.

Ex. 5.15 (Cor.) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$.

b. On pose $p_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Calculer $\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) p_n(x)$ pour $x \neq 0$ et en déduire une formule simplifiée de $p_n(x)$.

c. On pose $p(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n(x)$.

Déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$.

d. Vérifier que p est continue en 0.

Ex. 5.16 (Cor.) [*] Déterminer les réels $a > b$ tels que le système suivant ait des solutions :
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = b \end{cases}$$

Corrections

Cor. 5.2 : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} = f(x)$ est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Par ailleurs, c'est une fonction dérivable comme composée et produit de fonctions qui le sont et :
$f'(x) = \left[v'(x)\ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)}\right] e^{v(x)\ln(u(x))}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = v'(x)\ln(u(x))\, u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$$

Cor. 5.10 : a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$S_a = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, résultat donné par la propriété 5.21 du cours.

b. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in S_b = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ car $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \cos x & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ \sin^2 x & = & \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x & = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & & \\ x & = & \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

$S_c = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
Donc $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$.
On cherche $a + b = 12x$ et $a - b = 2x$ et on obtient $a = 7x$ et $b = 5x$.
Donc l'équation équivaut à

$-2\sin(7x)\sin(5x) = \sqrt{3}\sin(5x) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \sin(5x) & = & 0 \\ \text{ou} & & \\ \sin(7x) & = & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$S_d = \left\{\frac{k\pi}{5}, -\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, \frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cor. 5.13 : $f(x)$ est définie si et seulement si

- $\frac{1+x}{1-x}$ est défini d'une part ;
- et $-1 \leqslant \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1$ d'autre part.

Étudions donc $g : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

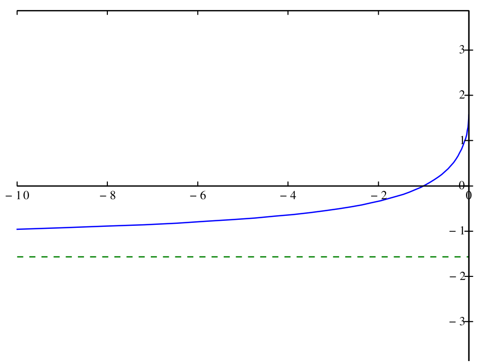
g est définie (et dérivable) sur $G = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et sur cet ensemble

$g(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2+x-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1.$

Donc $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{2}{1-x} \leqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 1-x \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant 0.$

f est donc définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (l'étude précédente restant valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).

On a alors $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x}}}$. Après simplification, on obtient donc en tenant compte du fait que $x < 0$ et que par conséquent $1 - x > 1 > 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$ (asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-\pi}{2}$) et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



Cor. 5.15 :

a. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(2\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} = \dfrac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}{2} = 2\,\mathrm{sh}(\alpha)\,\mathrm{ch}(\alpha).$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$p_n(x)\,\mathrm{sh}\left(\tfrac{x}{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right) \mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{p_{n-1}(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $q_n(x) = p_n(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or son premier terme vaut $q_0(x) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}.$

c. On écrit pour $x \neq 0$:

$2^n\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\dfrac{\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\,\mathrm{sh}'(0) = x\,\mathrm{ch}(0) = x.$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, p(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)}{x}.$

De plus, pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(0) = 1 = p(0)$.

d. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = p(0)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(0) = 1$ donc

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = 1 = p(0)$. p est bien continue.

Cor. 5.16 : Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. Le système se réécrit :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y = a \\ \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} = 2a \\ X - \frac{1}{X} + Y - \frac{1}{Y} = 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_1-L_2}{2} \end{matrix} \begin{cases} X + Y = a+b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = a+b \\ \frac{Y+X}{XY} = a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = a+b \\ XY = \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Or deux nombres r_1, r_2 dont on connaît le produit P et la somme S sont solutions de l'équation

$r^2 - Sr + P = 0$ (relations coefficients-racines dans les équations du second degré)

Donc X et Y sont solutions de $r^2 - (a+b)r + \frac{a+b}{a-b} = 0$.

$\Delta = (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}$

Nous cherchons des solutions X et Y réelles strictement positives avec par hypothèses $a > b$ et $XY = \frac{a+b}{a-b} > 0$ donc $b > -a$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{b^2+4}$ (car $a = \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y > 0$).

$r_1 = \frac{a+b+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $r_2 = \dfrac{a+b-\sqrt{\frac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}}}{2} = \dfrac{(a+b)\left(\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{a^2-b^2-4}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}} > 0.$

Une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que le système ait des solutions est donc

$$a > \sqrt{b^2 + 4}$$