Nombres complexes

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Partie réelle et partie imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct.
b) Module d'un nombre complexe	
Module.	Interprétation géométrique de $\|z-z'\|$, cercles et disques.
Relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1, trigonométrie	
Cercle trigonométrique, paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver des formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de e^{it} pour t réel.	
Si t et t' sont deux réels, alors $e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}$.	Factorisation de $1 \pm e^{it}$. Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.	
Formules d'Euler : $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$, de $\sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
d) Argument d'un nombre complexe non nul	
Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$.	
Arguments d'un nombre complexe non nul.	
Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.	
Argument d'un produit, d'un quotient.	
Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \phi)$.	$\leftrightarrows$ PC et SI : amplitude et phase.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{\mathcal{I}m(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. $\leftrightarrows$ PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
Exponentielle d'une somme.	

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Modes de raisonnement : par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

II. Résumé du cours

II.1. Définitions

Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres imaginaires.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a = a + 0i$ (réel pur), $ib = 0 + ib$ (imaginaire pur) et $0 = 0 + 0i$.
On peut donc écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Définition 4.1

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on appelle

- ***conjugué*** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
- ***module*** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$;
- ***partie réelle*** de z le nombre réel $\mathcal{R}e\,(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$;
- ***partie imaginaire*** de z le nombre **réel** $\mathcal{I}m\,(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Méthode : Parties réelles et imaginaires

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ peuvent s'avérer ***extrêmement efficaces***.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, on montre que $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = z$.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est imaginaire, on montre que $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = -z$.

Ex. 4.1 On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

Cor. 4.1

Propriété 4.2

Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2) $\overline{-z} = -\bar{z}$
3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
8) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
9) $z\bar{z} = |z|^2$
10) Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
11) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
12) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
13) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Théorème 4.3 (Première inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z+z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 4.4 (Seconde inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Définition 4.5

On appelle ***affixe*** du point $M(a; b)$ ou du vecteur $\vec{u}(a; b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

Notation

Étant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :
$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le ***disque ouvert de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant r\}$ le ***disque fermé de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le ***cercle de centre*** z_0 ***et de rayon*** r.

Notamment, $|z - z_0|^2 = r^2$ est ***une équation cartésienne du cercle de centre*** $C(z_0)$ ***et de rayon*** r.

Ex. 4.2 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(3; -1)$ et de rayon 3.

Cor. 4.2

Propriété 4.6 ($\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire)

Les fonctions $\mathcal{R}e : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-***linéaires*** c'est-à-dire

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \mathcal{R}e\,(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{R}e\,(z_1) + \mu \mathcal{R}e\,(z_2) \\ \mathcal{I}m\,(\lambda z_1 + \mu z_2) &= \lambda \mathcal{I}m\,(z_1) + \mu \mathcal{I}m\,(z_2) \end{cases}$$

« ***Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels*** ».

- $0 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour l'addition*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$: tout complexe possède un ***symétrique*** pour l'addition
  z' est noté $-z$ et appelé ***opposé*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$: l'addition complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$: l'addition complexe est ***associative***
- $1 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour la multiplication*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$: tout complexe non nul possède un ***symétrique*** pour la multiplication
  z' est noté $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ et appelé ***inverse*** de z
- $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$: la multiplication complexe est ***commutative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = zz'z''$: la multiplication complexe est ***associative***
- $\forall(z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$: la multiplication complexe est ***distributive*** sur l'addition complexe

Définition 4.7 (Structure de corps)

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un ***corps*** : cela signifie très exactement que ***l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes*** qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

II.2. Nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
$\mathbb{U}$ a notamment pour éléments 1, i, -1 et $-i$.

Propriété 4.8

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :

- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$;
- il existe dans $\mathbb{U}$ un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$;
- la multiplication est commutative et associative.

Définition 4.9

On résume les propriétés précédentes en disant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un ***groupe commutatif***.

Proposition 4.10

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists!(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$

Important ! Quantificateur $\exists!$

Le quantificateur $\exists!$ qui se lit ***« Il existe un unique »*** signifie qu'un prédicat est vérifié pour ***une et une seule valeur*** de la variable quantifiée.
Il convient de faire ***très attention avec ce quantificateur*** : presque tout ce que nous avons dit pour les deux autres quantificateurs ($\forall$ et $\exists$) est ***faux*** pour « Il existe un unique ».

Méthode : « Il existe un unique »...

Pour démontrer une propriété faisant intervenir le quantificateur $\exists!$, on démontre :

- ***l'existence*** : il suffit de trouver une valeur de la variable quantifiée qui convient ;
- ***l'unicité*** : on montre que si le prédicat est vérifié pour deux valeurs, alors elles sont égales.

Il peut parfois être intéressant de démontrer ***d'abord l'unicité, puis l'existence***. Dans ce cas, on procède à un raisonnement par ***analyse-synthèse*** (voir ci-dessous).

Méthode : Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit d'un raisonnement permettant d'obtenir l'ensemble des solutions à un problème donné :

- ***Analyse*** : ***on suppose l'existence de solutions*** au problème que l'on se pose, on tente d'obtenir une caractérisation aussi contraignante que possible de ces solutions. Ceci revient à obtenir une (ou plusieurs) ***condition(s) nécessaire(s)*** à l'existence d'une solution.

Dans le cas où la caractérisation est suffisamment contraignante, elle permet de montrer l'unicité de la solution.

- ***Synthèse*** : on vérifie que ***la ou les conditions nécessaires précédentes*** sont aussi ***suffisantes***.

Ex. 4.3 On reprend l'exercice 1.22 du chapitre 1 : soit $h : \left\{ \begin{array}{l} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \right.$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

1) Montrer que h est bien définie sur H et que $\forall z \in H, h(z) \in D$.
2) Montrer que $\forall Z \in D, \exists! z \in H, h(z) = Z$.
3) Que peut-on déduire de la question précédente sur la nature de h ?

Graphiquement, voici ce que ça donne :
Espace de départ.
Espace d'arrivée.
Animation de la transformation.

Ex. 4.4 Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} = \mathcal{D}(0,1)$. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ z & \mapsto & -z\dfrac{1-\bar{z}}{1-z} \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est bien définie.
2) Montrer que $\forall Z \in D, \exists! z \in D, Z = f(z)$.
3) Que peut-on en déduire pour f ?
   Vidéo pour s'en convaincre

Cor. 4.4

Proposition 4.11 (Existence des arguments)

Pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe une infinité de valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $u = \cos\theta + i\sin\theta$. De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Définition 4.12 (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! \rho \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \rho\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Cette écriture est appelée ***forme trigonométrique de*** z dans laquelle ρ est le module de z et θ est ***un argument*** de z.

Définition 4.13 (Argument principal)

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 4.11 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de 2π.
On dit que l'argument est défini ***à*** 2π ***près*** ou encore ***modulo*** 2π.
On appelle ***argument principal*** l'unique argument compris dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Notation

On note $\arg(z)$ tout argument d'un nombre complexe non nul et $\mathrm{Arg}(z)$ l'argument principal de z. Pour signifier que $\arg(z)$ est défini à 2π près, on écrira
$\arg(z) \equiv \mathrm{Arg}(z)\,[2\pi]$ qui se lit « tout argument de z est **congru** à son argument principal modulo 2π » ***ce qui équivaut à*** $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$.

Notation

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$.
$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note e^z le nombre complexe $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 4.14 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$, $\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0\,[2\pi] \end{aligned}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$
- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $\begin{aligned} e^z = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow \quad z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z'\,[2i\pi]$

Important !

Même si nous verrons plus tard dans l'année que $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ est plus qu'une simple notation, l'exponentielle de nombres imaginaires ***ne possède pas toutes les propriétés de l'exponentielle des nombres réels***. En particulier :

- elle ***n'est pas injective*** : l'équation $e^{i\theta} = -1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ possède une infinité de solutions $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$;
- pour cette raison, ***il n'existe pas de logarithme complexe*** !

Corollaire 4.15

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi]$

Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul

La démonstration de la proposition 4.11 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul :

1) on commence par calculer $|z|$ puis $u = \dfrac{z}{|z|}$ qui est de module 1 ;
2) on cherche ensuite $\phi \in [0;\pi]$ tel que $\mathcal{R}e\,(u) = \cos(\phi)$; on verra au chapitre 5 comment obtenir cette valeur dans le cas général.
3) enfin, si $\mathcal{I}m\,(u) \geqslant 0$ alors $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \phi$,
sinon $\mathcal{I}m\,(u) < 0$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z) = -\phi$.

On en conclut que $z = |z|e^{i\theta}$.

Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de $\mathcal{R}e\,(z)$ (voir chapitre 5).

Ex. 4.5 On pose $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Calculer z^2 et en déduire la valeur de $\Theta = \operatorname{Arg}(z)$.

Cor. 4.5

Ex. 4.6 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E)\ :\ \bar{z} = z^3$$

Cor. 4.6

II.3. Utilisations en trigonométrie

Proposition 4.16 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Proposition 4.17 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ qui s'écrit aussi $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Ex. 4.7 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{50}$.

Cor. 4.7

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```

Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on « ***factorise par l'angle moitié*** » :

$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.

Il s'agit de la forme trigonométrique si $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$. Sinon, on obtient la forme trigonométrique en écrivant $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$ avec $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geqslant 0$.

Ex. 4.8 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = 1 + e^{i\theta}$ et $Z = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi; \pi]$.

Cor. 4.8

Ex. 4.9 ***CCP MP 2019 - n°89*** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1; n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S_n = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Méthode : Développement de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

Pour obtenir pour tout entier n et tout réel x les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ on utilise la formule 4.17 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Ex. 4.10 Écrire pour x réel $\cos(3x), \sin(3x), \cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Cor. 4.10

Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Réciproquement, pour transformer, pour $x \in \mathbb{R}$, des produits de $\cos x$ et $\sin x$ en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de x, on utilise les formules 4.16 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

Ex. 4.11 Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

Cor. 4.11

Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant $\cos x$ et $\sin x$ comme parties réelle et imaginaire de e^{ix} puis en factorisant l'expression obtenue.

Ex. 4.12 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Cor. 4.12

Ex. 4.13 Factoriser pour $p, q \in \mathbb{R}$, $A = \cos(p) + \cos(q)$ et $B = \sin(p) - \sin(q)$.

Cor. 4.13

Ex. 4.14 $[SI]$ ***et*** $[PC]$ ***: amplitude et phase***
Soient $a, b, t \in \mathbb{R}$ où $a^2 + b^2 \neq 0$. Soient r et θ le module et un argument du nombre complexe $z = a + ib$.
Montrer que $a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t - \theta)$.

Cor. 4.14