Maths - Chapitre 6

Nombres complexes : équations et géométrie

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Équations du second degré	
Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients complexes, discriminant. Somme et produit des racines d'une équation du second degré.	
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité. Équation $z^n = a$. Pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique des solutions.
h) Nombres complexes et géométrie plane	
Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité à l'aide des affixes.	
Transformation $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{i\theta}z \in \mathbb{C}$: rotation plane de centre O et d'angle θ.	Il s'agit d'introduire le concept de transformation du plan dont l'étude ne figure pas au programme des classes antérieures.
Transformation $z \mapsto z + b$, translations. Transformation $z \mapsto kz, (k \in \mathbb{R}^*)$: homothétie de centre O de rapport k. Transformation $z \mapsto \bar{z}$, symétries axiales.	

II. Utilisations en géométrie

Les formules concernant le module et l'argument des nombres complexes permettent une grande variété d'applications géométriques. Nous en donnons ici quelques exemples.
On rappelle que le plan est rapporté à un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ***orthonormal direct*** et que l'affixe d'un point $M(x; y)$ dans ce repère est le complexe $z = x + iy$.

II.1. Barycentre d'une famille de points

Théorème 6.1 (Isobarycentre d'une famille de points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ n points du plan.
Il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{A_2G} + ... + \overrightarrow{A_nG} = \vec{0}$.
Ce point est appelé ***isobarycentre de la famille*** $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.
De plus, quel que soit le point M du plan, G vérifie

$$\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + ... + \overrightarrow{A_nM} = n\overrightarrow{GM}$$

Démonstration

Proposition 6.2

L'affixe de l'isobarycentre G de la famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n}$$

Démonstration

Corollaire 6.3

Le milieu d'un segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$ (en notant z_A et z_B les affixes respectives de A et B).
Le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$ (en notant z_A, z_B et z_C les affixes respectives de A, B et C).

II.2. Angle de vecteurs

Proposition 6.4

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' on a
$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \operatorname{Arg}(\bar{z}z')\ [2\pi]$
où $(\vec{u}; \vec{v})$ désigne l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration

Corollaire 6.5 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$.

Corollaire 6.6 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}z' \in i\mathbb{R}$.

Corollaire 6.7 (Points alignés)

Trois point $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont alignés si et seulement si $\left(\overline{z_A} - \overline{z_B}\right)(z_A - z_C) \in \mathbb{R}$.

II.3. Transformations du plan complexe

On identifie les points du plan et leur affixe, et les vecteurs du plan et leur affixe.
Autrement dit, pour $z \in \mathbb{C}$

- « le point z du plan complexe » signifie « le point M du plan d'affixe z » ;
- « le vecteur z du plan complexe » signifie « le vecteur $\vec{v}$ du plan d'affixe z ».
- Soit $c \in \mathbb{C}$. La transformation $z \mapsto z + c$ du plan complexe est

  ....

  ....
- La transformation $z \mapsto \bar{z}$ du plan complexe est

  ....

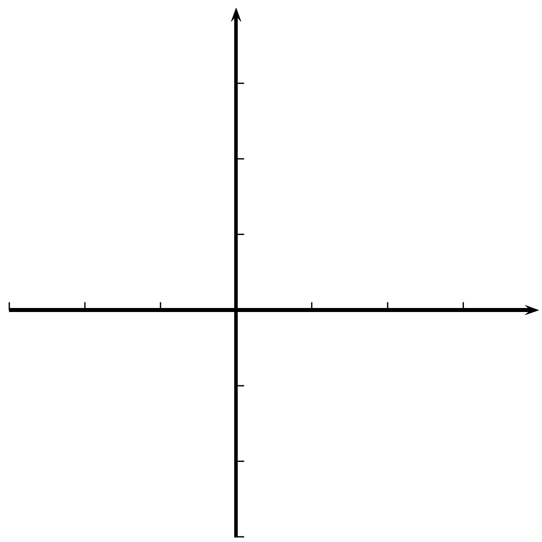
  ....
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La transformation $z \mapsto \lambda z$ du plan complexe est

  ....

  ....
- Soit $u \in \mathbb{U}$. La transformation $z \mapsto uz$ est

  ....

  ....



III. Utilisations en algèbre

III.1. Racine *réelle* n-ième d'un *réel positif*

Définition 6.8

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}\right.$ est définie par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
Lorsque $\alpha > 0$, elle peut être prolongée en 0 par 0, la fonction obtenue étant continue.

Proposition 6.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ est la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration

III.2. Racines complexes n-ièmes de l'unité

Théorème 6.10 (Racines n-ièmes de l'unité)

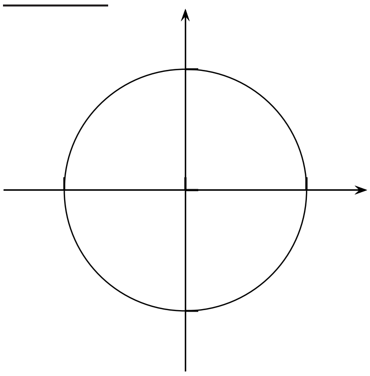
Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z \in \mathbb{C}, z^n = 1$ possède exactement n racine(s), toutes de module 1. L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$.

Démonstration

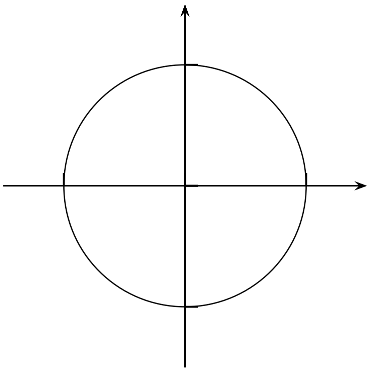
Important !

- Nous venons de voir que $n\theta \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \theta$ ....
- D'après le théorème précédent, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \right.$ ***n'est pas une bijection*** si $n > 1$ (puisque 1 a n antécédents).
  En conséquence, elle ***n'admet pas de bijection réciproque***.
  La fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est ***définie uniquement sur*** $\mathbb{R}_+$.

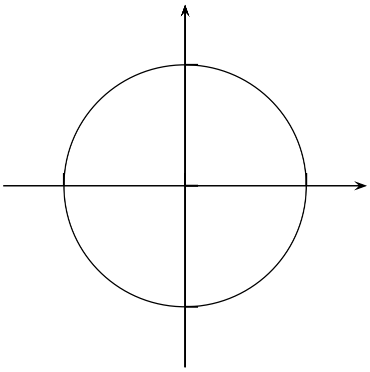
Ex. 6.1 Placer les racines complexes n-ièmes de l'unité dans les cas suivants



Racines cubiques : $n = 3$



Racines quatrièmes : $n = 4$



Racines sixièmes : $n = 6$

Méthode

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = c$ a exactement n solutions.

Pour la résoudre, on procède de la façon suivante

- on écrit c sous forme trigonométrique : $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}, c = \rho e^{i\gamma}$;
- on en déduit $|z|$: $|z^n| =$ ....
- on termine en explicitant les différentes valeurs possibles pour $\theta = \arg(z)$:
  $z^n = c \Leftrightarrow$ ....

Ex. 6.2 Résoudre l'équation $z^3 = 1 + i$

Cor. 6.2

III.3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 6.11

Étant donnés $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes***, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ possède :

- une solution ***double*** $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- deux solutions distinctes $z_\pm = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ si $\Delta = \delta^2 \neq 0$.

Démonstration

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré à ***coefficients complexes*** :

- on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- si $\Delta = 0$, on a immédiatement la solution double ;
- si $\Delta \neq 0$, on cherche la partie réelle et la partie imaginaire de l'un des deux complexes δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ en résolvant le système $\begin{cases} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{cases}$ c'est-à-dire en adaptant au cas $n = 2$ la méthode de résolution des équations du type $z^n = c$.

Ex. 6.3 Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$.

Cor. 6.3

III.4. Relations coefficients-racines

Théorème 6.12

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes*** alors

$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \qquad z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \qquad z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration

IV. Résumé et compléments

IV.1. Propriétés de l'exponentielle complexe

Nous avons défini page 70 l'exponentielle complexe par $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{i\mathcal{I}m(z)}$ et nous avons donné quelques-unes de ses propriétés. En voici d'autres :

Propriété 6.13

$\forall z \in \mathbb{C}$,

- $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$;
- $\arg(e^z) \equiv \mathcal{I}m(z)\ [2\pi]$.

Démonstration

Important !

L'équation $e^z = c \in \mathbb{C}^*$ possède une infinité de solutions complexes, la partie imaginaire de z étant définie à 2π près.

Méthode : Équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$

La propriété précédente donne une méthode de résolution des équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$: en effet, résoudre l'équation revient à résoudre le système

$$\begin{cases} |e^z| & = & e^{\mathcal{R}e(z)} = |c| \\ \arg(e^z) & \equiv & \mathcal{I}m(z) \equiv \arg(c)\ [2\pi] \end{cases}$$

Ex. 6.4 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$(E_1) : e^z = -7 \qquad (E_2) : e^z = 5 - 12i$

Cor. 6.4

IV.2. Représentations rationnelles des points du cercle trigonométrique

Lemme 6.14

Pour tout réel x non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

Démonstration

Proposition 6.15

Pour tout réel x non congru à π modulo 2π, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on a
$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Démonstration

Remarque

La proposition précédente permet aussi d'écrire, à condition que $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soient définies,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Corollaire 6.16

On rapporte le plan orienté à un repère orthonormé.
Pour tout point M du cercle trigonométrique distinct du point d'abscisse -1, il existe un unique réel t tel que M ait pour coordonnées $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.

Démonstration