Maths - Feuille d'exos n° 4

Nombres complexes

I. Rappels

Ex. 4.1 Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-1}{z-i} \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective. Donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 4.2 Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Ex. 4.3 Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}$.

II. Trigonométrie

Ex. 4.4 Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :
$z_1 = -3 \qquad z_2 = -3i \qquad z_3 = -2+2i \qquad z_4 = \sqrt{3}-i \qquad z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)-i$

Ex. 4.5 On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a. Montrer que $j^2 = \bar{j} = -1 - j$.
b. Calculer $j^2 e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Ex. 4.6 Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

a. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a + b$ et ab.
b. En déduire a et b.

Ex. 4.7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
b. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
c. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 4.8 Linéariser les polynômes trigonométriques :
$A(x) = \sin^5 x \qquad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x \qquad C(x) = \cos^6 x$

Ex. 4.9 [**] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi;\pi] \mapsto 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$ et $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

a. Que vaut $D_n(0)$?
b. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = 2\cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1.$$
c. En déduire que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
d. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?
e. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$
f. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to0} F_n(x)$?