Maths - Feuille d'exos n° 6

Nombres complexes : équations et géométrie

Remarque

On trouve sur internet une banque d'exercices d'oraux corrigés pour le concours CCP MP 2019. La plupart de ces exercices ne sont pas compréhensibles en Maths Sup, mais certains d'entre eux concernent en fait le programme de première année. Lorsque des exercices (du cours ou des feuilles d'exercices) seront extraits de cette banque, ils seront indiqués par ***CCP MP 2019 - n°xx***. Le numéro donné permet d'aller rechercher dans la banque d'exercices la solution officielle donnée.

Adresse internet de la banque d'exercices :

http://www.concours-commun-inp.fr/_attachments/nouvel-accordeon-2/banque_finale%2520MP_19_avec_corr.pdf

I. Utilisation en géométrie et en algèbre

Ex. 6.1 Soient z et z' deux complexes distincts de module égal à 1.

a. Montrer que $\overline{(z+z')}(z-z') \in i\mathbb{R}$.

b. En déduire que les bissectrices intérieures et extérieures de deux droites sécantes sont orthogonales.

Ex. 6.2 Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que ABC soit un triangle équilatéral ***direct***.

b. Montrer que cette condition est équivalente à $a + jb + j^2c = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit un triangle équilatéral.

d. Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ?
[***Indication*** : on admettra que $\sqrt{3}$ est irrationnel.]

Ex. 6.3 ***Transformations du plan complexe***

a. Donner une interprétation géométrique de la transformation du plan complexe
$z \mapsto \left(\sqrt{3} - i\right) z - 2 + 2i\left(1 - \sqrt{3}\right)$.

b. Ecrire l'affixe z' du point M' image de $M(z)$ par la rotation de centre $O'(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Ex. 6.4 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$E : z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0$.
Quelle particularité présente le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de cette équation ?

Ex. 6.5 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :
$E_1 : e^z = 1 + i \qquad E_2 : e^z = e^{1+i}$

Ex. 6.6 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$E_1 : z^2 + z + 5 = 0 \qquad E_2 : z^6 = \dfrac{1+i}{4\sqrt{6} - i4\sqrt{2}}$

$E_3 : 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \qquad E_4 : z^2 = -3 + 4i$

$E_5 : (1+i)z^2 - z - 1 + i = 0 \qquad E_6 : \theta \in \mathbb{R}, z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$

$E_7 : z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(5i + 12) = 0$

$E_8 : z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 11i)z - 2(1 + 7i) = 0$

$E_9 : \left(z^2 + 4z + 1\right)^2 + (3z + 5)^2 = 0$

Ex. 6.7 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation

$$nz^n = z^{n-1} + \ldots + z + 1$$

a. Résoudre (E_1), (E_2), (E_3).

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 1 est solution de (E_n).

c. Montrer que si $|z| > 1$ alors $n|z^n| > |z^{n-1} + \ldots + z + 1|$.

d. On suppose que $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n).
Montrer que $ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

e. Montrer que 1 est la seule racine de (E_n) de module 1.

f. Conclure.

Ex. 6.8 ***CCP MP 2019 - n°84***

a. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre)

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

c. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation (E) : $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

d. Donner une démonstration géométrique du fait que les solutions de (E) sont des nombres réels, sans faire intervenir le résultat de la question précédente.

Ex. 6.9 Soient $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire $S = 1 + z + ... + z^{n-1}$ sous la forme d'un quotient.

b. En déduire que pour tout entier $n > 1$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

Ex. 6.10 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) + zf(1-z) = 1 + z$$

Corrections

Cor. 6.7 :

a. $(E_1) : z = 1$.
$(E_2) : 2z^2 = z + 1$.
$\Delta = 1 + 8 = 9$ conduit aux deux solutions $z_1 = 1$ et $z_2 = \dfrac{-1}{2}$.
$(E_3) : 3z^3 = z^2 + z + 1$.
On lit la question suivante :-), et on note que $z_1 = 1$ est racine évidente.
D'où
$(E_3) \Leftrightarrow (z-1)\left(3z^2 + 2z + 1\right) = 0$.
$\Delta = 4 - 12 = -8$ conduit aux deux autres solutions $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{2}}{3}$ et $z_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{2}}{3}$.

b. D'une manière générale, (E_n) s'écrit $nz^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.
Pour $z = 1$, les membres de droite et de gauche de l'équation valent n.
Donc 1 est solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Supposons $|z| > 1$. Alors d'après l'inégalité triangulaire
$\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k\right| < n|z|^{n-1} < n|z|^n$.
On en déduit immédiatement que (E_n) n'a aucune solution de module strictement supérieur à 1.

d. Soit $z = e^{i\theta} \neq 1$ une solution de (E_n). Alors
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} = \frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}} - e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. En remplaçant dans (E_n) on obtient
$ne^{in\theta} = e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}} \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} = \dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

e. En gardant les mêmes notations que dans la question précédente, supposons que (E_n) admette une racine de module 1 distincte de $z = 1$. Le résultat précédent conduit en identifiant les ***parties réelles*** des deux membres à

$$\begin{aligned} (E_n) \quad &\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{(n+1-1)\theta}{2}\right) \\ &\Rightarrow \quad n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (n+1)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

L'identification des ***parties imaginaires*** conduit quant à elle immédiatement à $\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 0$ et donc à $\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) = 1$.
La conjonction de ces deux identités permet donc d'affirmer que si $z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n) alors
$\frac{\theta}{2} \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]$ ce qui est absurde puisque $z \neq 1$.
Donc la seule racine de module 1 est 1.

f. Les questions c, d, et e permettent d'affirmer que si z est solution de (E_n) alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.