

# Dérivabilité

## I. Programme officiel

### Dérivabilité

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Dérivabilité	
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	$\Leftrightarrow$ I : méthode de Newton.
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur. Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis.	Interprétations géométriques et cinématiques. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à ce stade ; elle n'appelle aucun développement supplémentaire. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ .
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes. Théorème de la limite de la dérivée.	
c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Définition et opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . Formule de Leibniz.	

II. Dérivabilité en un point

II.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l’obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d’un point) et d’autres notions (croissance d’une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c’est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d’une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l’étude des *suites récurrentes* : nous verrons en effet qu’on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d’une fonction  $f$  des conséquences concernant le comportement d’une suite récurrente vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Par commodité, on utilisera la notation suivante.



**Définition 17.1 (Intérieur d’un intervalle)**

On considère  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . *L’intérieur* de  $I$  est l’intervalle obtenu en privant  $I$  de ses bornes. On note  $\overset{\circ}{I}$  l’intérieur de  $I$ . Un point est dit *intérieur à  $I$*  si c’est un point de  $\overset{\circ}{I}$ .

**Ex. 17.1** Soit  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ . Pour  $I = [a, b]$  ou  $I = [a, b[$  ou  $I = ]a, b]$  ou encore  $I = ]a, b[$ , on a toujours ..... Pour  $I = [a, +\infty[$  on a .....

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  des réels ou le corps  $\mathbb{C}$  des complexes. On désigne par  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$  d’intérieur non vide, c’est-à-dire contenant une infinité de points.

De plus on notera  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

II.2. Taux d’accroissement et nombre dérivé



**Définition 17.2**

On appelle *taux d’accroissement* ou *taux de variation* de  $f$  en  $a \in I$  la fonction

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

Géométriquement, le taux d’accroissement représente la pente de la droite passant par les points  $A(a; f(a))$  et  $M(x; f(x))$ .

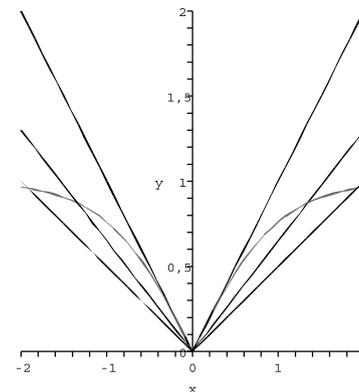


### Définition 17.3 (Nombre dérivé)

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si  $\tau_a$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ . La limite est alors appelée **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  si  $\tau$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ ,  $x < a$ . La limite est alors appelée **nombre dérivé à gauche** de  $f$  en  $a$ .

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  si  $\tau$  possède une limite finie lorsque  $x$  tend vers  $a$ ,  $x > a$ . La limite est alors appelée **nombre dérivé à droite** de  $f$  en  $a$ .



### Notation

On note  $f'(a)$  le nombre dérivé,  $f'_g(a)$  et  $f'_d(a)$  les nombres dérivés à gauche et à droite.

#### Proposition 17.4

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{cases} \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

## II.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

#### Théorème 17.5

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si **au voisinage de**  $x \rightarrow a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

#### Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 9 proposition 9.13.

#### Corollaire 17.6

La tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \text{ si } f \text{ est dérivable en } a ;$$

$x = a$  si le taux d'accroissement tend vers  $\pm\infty$  en  $a$ .



### Remarque

#### Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une **vitesse moyenne**. La dérivée s'interprète alors comme une **vitesse instantanée**.

**Théorème 17.7 (Dérivable implique continue)**

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration**



**Important ! Continue n'implique pas dérivable**

La réciproque est fautive. La valeur absolue est continue sur  $\mathbb{R}$  donc en particulier en 0. Si  $x < 0$ , le taux d'accroissement entre 0 et  $x$  vaut  $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$ . Si  $x > 0$ , le taux d'accroissement entre 0 et  $x$  vaut 1. Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$ . Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

**Ex. 17.2** Soit  $a \in \overset{\circ}{I}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et dérivable en  $a$ . Déterminer  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$ .

**Cor. 17.2**

**II.4. Théorèmes opératoires**

**Proposition 17.8 (Opérations pour la dérivée en un point)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  dérivables en un point  $a$  de  $I$ .

- Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , la combinaison linéaire  $\alpha f + \beta g$  est dérivable en  $a$  et  $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit  $fg$  est dérivable en  $a$  et  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ .
- Si  $g$  ne s'annule pas en  $a$ , l'inverse  $\frac{1}{g}$  est défini sur un voisinage de  $a$  et est dérivable en  $a$  avec  $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$ .
- Si  $g$  ne s'annule pas en  $a$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

**Démonstration**

**Proposition 17.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)**

Soit  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{K}$  deux applications et  $a$  un point de  $I$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  et si  $g$  est dérivable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $a$  et  $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$ .

## Démonstration

 Remarque

La démonstration qui consisterait à écrire que pour  $x \neq a$ ,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \left( \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers  $f'(a)$  et la deuxième vers  $g'(f(a))$  est naturelle, mais fausse. Il est possible que  $f(x) - f(a)$  s'annule sur tout voisinage de  $a$  pour des valeurs différentes de  $a$ . Par exemple,  $f : x \rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x}$  s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire  $\psi$  évite ce problème.

**Théorème 17.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)**

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction bijective et continue,  $b$  un point de  $J$  et  $a = f^{-1}(b)$ . On suppose  $f$  dérivable en  $a$ . Alors sa bijection réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $b$  si et seulement si  $f'(a) \neq 0$  et dans ce cas  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ .

## Démonstration

**II.5. Sens de variation et dérivée****Proposition 17.11 (Croissante implique dérivée positive)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante et  $a$  un point de  $I$ .

- Si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$ , on a  $f'_g(a) \geq 0$ .
- Si  $f$  est dérivable à droite en  $a$ , on a  $f'_d(a) \geq 0$ .
- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , on a  $f'(a) \geq 0$ .

## Démonstration

 **Définition 17.12 (Point anguleux)**

Si  $f$  est *continue en  $a$ , dérivable à gauche et à droite en  $a$*  avec  $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ , le point  $A(a, f(a))$  s'appelle un *point anguleux*.

 Remarque

En un point anguleux  $A(a, f(a))$ , on définit

une demi-tangente à gauche d'équation  $y = f(a) + f'_g(a) \times (x - a)$  et

une demi-tangente à droite d'équation  $y = f(a) + f'_d(a) \times (x - a)$ .

III. Dérivabilité sur un intervalle

Dans tout ce qui suit  $I$  et  $J$  sont des intervalles réels.

III.1. Définitions

 **Définition 17.13 (Fonction dérivée)**

On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $I$ .  
 La fonction  $\begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$  est alors appelée **fonction dérivée** ou plus simplement **dérivée** de  $f$ .

 **Notation**

Elle est noté  $f'$  (notation de Newton) ou encore  $\frac{df}{dx}$  (notation de Leibniz).

Ex. 17.3

- Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^n$  a pour dérivée  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

- Par définition (voir chapitre sur les fonctions usuelles)  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\frac{d(\ln|x|)}{dx} = \frac{1}{x}$
- Nous avons aussi démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles  
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp'(x) = \exp(x)$ ,  $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$  et  $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$   
 $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d(a^x)}{dx} = \dots\dots\dots$  et  $\forall r \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\frac{d(x^r)}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sin'(x) = \cos(x)$ ,  $\cos'(x) = -\sin(x)$  et  
 $\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ ,  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Dérivées des bijections réciproques des fonctions trigonométriques :  
 .....  
 .....  
 .....

 **Définition 17.14**

Si  $f$  est une fonction dérivable sur  $I$  et que  $f'$  est continue sur  $I$  on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

 **Notation**

On note  $\mathcal{C}^1(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

 **Définition 17.15**

Si  $f$  est dérivable, et si sa dérivée est elle aussi **dérivable de dérivée continue sur  $I$** , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ .

 **Notation**

| On note  $\mathcal{C}^2(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  et  $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$  la dérivée de  $f'$ .

 **Définition 17.16**

| De même, si  $f$  est  $n \in \mathbb{N}$  fois dérivable sur  $I$  **de dérivée  $n$ -ième continue sur  $I$** , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

 **Notation**

| On note  $\mathcal{C}^n(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ ,  $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .  
| On retrouve notamment pour  $n = 0$  les fonctions  $\mathcal{C}^0$  sur  $I$  c'est-à-dire continue sur  $I$ .

 **Définition 17.17**

| Enfin, si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ , on dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

 **Notation**

| On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ .

**Ex. 17.4** Si  $f$  est dérivable et si elle est paire ou impaire, sa dérivée  $f'$  a-t-elle une parité? Si oui, laquelle?

**Cor. 17.4**

**Ex. 17.5** Si  $f$  est dérivable et bornée sur  $\mathbb{R}$ , sa dérivée est-elle aussi bornée? Justifier.

**Cor. 17.5**

**III.2. Théorèmes opératoires****Proposition 17.18 (Opérations sur les fonctions dérivables)**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$ .

- Pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , la combinaison linéaire  $\alpha f + \beta g$  est dérivable sur  $I$  et

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$

- Le produit  $fg$  est dérivable sur  $I$  et  $(fg)' = f'g + fg'$ .
- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , l'inverse  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ .
- Si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$ , le quotient  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

**Démonstration****Proposition 17.19 (Composition)**

Si  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{K}$  sont deux fonctions dérivables, alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $I$  et  $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$ .

**Démonstration****Théorème 17.20 (Bijection réciproque)**

Soit  $f : I \rightarrow J$  une application bijective et dérivable. L'application  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$  si et seulement si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ ; de plus  $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ .

**Démonstration****Remarque**

On peut retrouver cette formule en écrivant  $f \circ f^{-1} = Id_J$  puis en dérivant comme une composée. On obtient en effet  $(f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$ .

Une autre façon de retenir cette formule sans effort est d'utiliser la notation de Leibniz : on pose  $y = f(x)$  donc  $x = f^{-1}(y)$  et on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

**Ex. 17.6** Si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sont  $n$  fonctions dérivables sur  $I$  avec  $n \geq 1$ , que vaut la dérivée du produit  $\prod_{i=1}^n u_i = u_1 u_2 \dots u_n$  ?

**Cor. 17.6**

**Ex. 17.7** Calculer la dérivée, sur un ensemble à préciser, de  $f : x \mapsto x^x$ .

**Cor. 17.7**

**Ex. 17.8** Existe-t-il des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  qui ne sont pas de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  ?

**Cor. 17.8****III.3. Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^n(I)$**

**Proposition 17.21 (Combinaison linéaire)**

Soit  $n$  un entier naturel. Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . Pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  éléments de  $\mathbb{K}$ , la fonction  $\alpha f + \beta g$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et  $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$ .

**Démonstration**

**Proposition 17.22 (Produit, formule de Leibniz)**

Soit  $n$  un entier naturel. Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . La fonction  $fg$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (\text{formule de Leibniz})$$

**Démonstration**

**Proposition 17.23 (Quotient)**

Soit  $n$  un entier naturel. Soit  $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  avec  $g$  qui ne s'annule pas sur  $I$ . Alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

**Démonstration**

**Proposition 17.24 (Composition)**

Soit  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{K}$  deux fonctions. Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$  et  $g$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

**Théorème 17.25 (Bijection réciproque)**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : I \rightarrow J$  une application bijective de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ . L'application  $f^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$  si et seulement si  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Les démonstrations de la proposition 17.24 et du théorème 17.25 sont hors-programme.

**Remarque**

- Il est immédiat que ces théorèmes se généralisent aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
- Les fonctions de référence vues au chapitre 5 sont toutes de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur leur ensemble de dérivabilité. **Attention cependant** : leur ensemble de dérivabilité n'est pas toujours leur ensemble de définition. Par exemple, .....
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sin^{(k)}(x) = \dots\dots\dots$  et  $\cos^{(k)}(x) = \dots\dots\dots$

Ces deux dernières formules se démontrent aisément en écrivant :  
 $\frac{d^k e^{ix}}{dx^k} = \cos^{(k)}(x) + i \sin^{(k)}(x) \dots\dots\dots$

**Ex. 17.9** Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x} \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $f^{(n)}$ .

**Cor. 17.9**

## IV. Éléments de calcul différentiel pour les fonctions à valeurs réelles

Dans cette section, on note  $I = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec  $a < b$  et les fonctions envisagées sont à **valeurs réelles**. Le but de cette section est de démontrer des propriétés énoncées (sans démonstration) au chapitre 3 et d'énoncer en les démontrant des théorèmes généraux valables pour les fonctions définies sur  $I$ , dérivables sur  $\overset{o}{I}$  et à **valeurs réelles**. Nous verrons ultérieurement comment ces résultats peuvent être (ou non) étendus aux fonctions à valeurs complexes.

### IV.1. Extremums

#### Définition 17.26 (Extremum local)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction et  $a$  un point de  $I$ .

- On dit que  $f$  admet un **minimum local**  $m$  en  $a$  s'il existe un voisinage  $V(a)$  de  $a$  tel que  $m$  soit le minimum de  $f$  restreinte à  $I \cap V(a)$ .
- On dit que  $f$  admet un **maximum local**  $M$  en  $a$  s'il existe un voisinage  $V(a)$  de  $a$  tel que  $M$  soit le maximum de  $f$  restreinte à  $I \cap V(a)$ .

#### Proposition 17.27 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en un point  $a$  intérieur à  $I$ . Si  $f(a)$  est un extremum local de  $f$ , alors  $f'(a) = 0$  (la réciproque est fausse).

#### Démonstration

#### Remarque

- Si  $a$  est une borne de  $I$ , on peut avoir un extremum pour  $f$  en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ . Par exemple,  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  admet  $f(1) = 1$  comme maximum et pourtant  $f'(1) = 2$ .
- La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  est dérivable,  $f'(0) = 0$ , mais  $f(0) = 0$  n'est pas un extremum local.

### IV.2. Théorème de Rolle

**Théorème 17.28 (Théorème de Rolle)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  avec  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Démonstration**

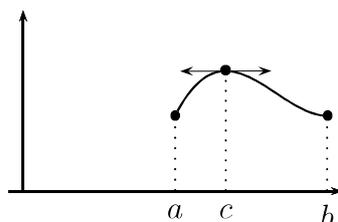


FIGURE 17.1 – Théorème de Rolle

**Remarque**

- Le théorème de Rolle, comme le théorème des valeurs intermédiaires, est un théorème d'existence. Il précise que sous certaines conditions la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois. Mais il ne donne ni la valeur du (ou des) points où cette dérivée s'annule, ni leur nombre exact.
- On notera bien qu'il n'est pas nécessaire pour  $f$  d'être dérivable en  $a$  et en  $b$ .
- La conclusion du théorème de Rolle est en défaut, si l'on supprime une seule des trois hypothèses.
  - ★ La fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$  si  $0 \leq x < 1$  et  $f(1) = 0$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f(0) = f(1) = 0$ . Mais  $f$  n'est pas continue en 1 et la dérivée de  $f$  sur  $]0, 1[$  qui est constante à 1 ne s'annule pas.
  - ★ La fonction  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$  est continue sur  $[-1, 1]$  et  $f(-1) = f(1) = 1$ . Mais  $f$  n'est pas dérivable en 0 et  $f'$ , lorsqu'elle existe, ne prend que les valeurs  $-1$  et  $1$ , donc ne s'annule pas.
  - ★ La fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$ . Mais  $f(0) \neq f(1)$  et  $f' = 1$  ne s'annule pas sur  $]0, 1[$ .

**Ex. 17.10** Soit  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 3)(x - 1)x(x + 2)(x + 4)$ . Montrer que  $f'$  possède quatre racines distinctes.

**Cor. 17.10**

**Ex. 17.11** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(c)}{2}(b - a)^2.$$

Cor. 17.11

### IV.3. Théorème des accroissements finis

#### Théorème 17.29 (Théorème des accroissements finis)

Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

#### Démonstration

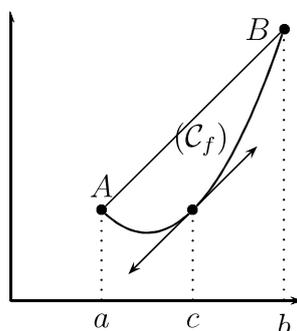


FIGURE 17.2 – Théorème des accroissements finis

#### Théorème 17.30 (Utilisation : primitivation d'un développement limité)

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  admet un  $DL_n(0)$  alors  $f$  admet un  $DL_{n+1}(0)$  obtenu en primitivant celui de  $f'$ .

Plus précisément, si  $f'(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$  alors  $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n+1})$

#### Démonstration

#### Remarque

L'égalité  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  s'écrit aussi  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ . Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point  $C(c, f(c))$  de  $\mathcal{C}_f$  en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$ .

**Ex. 17.12** Établir que pour tout réel  $x > 0$ , on a  $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ .

**Cor. 17.12**

**Corollaire 17.31 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)**

Si l'application  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et s'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que pour tout  $x \in ]a, b[$ ,  $m \leq f'(x) \leq M$ , alors  $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .

**Démonstration**

**Ex. 17.13** Donner une valeur approchée rationnelle de  $\sqrt[4]{80}$  et majorer l'erreur commise.

**Cor. 17.13**

#### IV.4. Variation, extremums et dérivabilité

**Proposition 17.32 (Fonction constante)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . La fonction  $f$  est constante sur  $I$  *si et seulement si* sa dérivée  $f'$  est nulle sur  $\overset{\circ}{I}$ .

**Démonstration**

**Ex. 17.14** Soit  $g : x \mapsto \text{Arccos}(2x^2 - 1)$ .

- 1) Ensemble de définition et continuité de  $g$ .
- 2) Ensemble de dérivabilité de  $g$ .
- 3) Calcul de  $g'$ .
- 4) Simplifier, pour  $x \in [-\pi; \pi]$ , l'expression  $g(\cos(x))$ .

**Cor. 17.14**

**Proposition 17.33 (Variation et dérivée)**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$  et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ .

- Si  $f' \geq 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $f' \leq 0$  sur  $\overset{\circ}{I}$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

**Démonstration**

Voici un corollaire qui complète la proposition 17.27.

**Proposition 17.34 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)**

On considère  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un point intérieur à  $I$  et une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $a$ . Si la dérivée de  $f$  s'annule en  $a$  en changeant de signe, alors  $f(a)$  est un extremum local.

**Démonstration**

**Ex. 17.15** Trouver tous les réels  $a$  strictement positifs tels que  $\forall x > 0, a^x \geq x^a$ .  
En déduire lequel des deux nombres  $e^\pi$  et  $\pi^e$  est le plus grand.

**Cor. 17.15****Proposition 17.35 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)**

Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $I$ , dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$  avec  $f'$  de signe constant sur  $\overset{\circ}{I}$ . Alors  $f$  est strictement monotone si et seulement si  $f'$  ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

**Démonstration**

**Ex. 17.16** Montrer que  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Cor. 17.16**

**Ex. 17.17** Étudier les variations sur  $\mathbb{R}$  de  $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$ .

**Cor. 17.17****IV.5. Limite de la dérivée****Proposition 17.36 (Limite de la dérivée)**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a \in I$ .

Si  $f$  est une fonction continue sur  $I$ , dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et si  $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \in \overline{\mathbb{R}}$  alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

En particulier, si  $l \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est alors dérivable en  $a$  et  $f'(a) = l$ .

**Démonstration**

### Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité **lorsque sa dérivée possède une limite en ce point**. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

**Ex. 17.18** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$ .

- 1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
- 2) Montrer que ce prolongement  $\tilde{f}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Montrer que  $\tilde{f}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Cor. 17.18**

## V. Suites récurrentes

### V.1. Rappels

#### Étude des suites récurrentes

Soit  $u_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  une suite définie par récurrence associée à une fonction  $f$  réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 8 sur les suites, le chapitre 15 sur la continuité et le TD 3 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite  $u$  soit garantie il faut montrer que  $u_0$  appartient à un **intervalle  $I$  stable par  $f$**  c'est-à-dire tel que  $\forall x \in I, f(x) \in I$ .

On considère donc dans ce qui suit que  $f : I \rightarrow I$ .

- Si  $f$  est **croissante** sur  $I$  alors  $u$  est **monotone**. Plus précisément :
  - ★ si  $u_1 \geq u_0$ , c'est-à-dire si  $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geq 0$ , et si  $f$  est croissante alors  $u$  **est croissante** ;
  - ★ si  $u_1 \leq u_0$ , c'est-à-dire si  $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leq 0$ , et si  $f$  est croissante alors  $u$  **est décroissante**.

On peut conclure à la stricte monotonie de  $u$  si  $f$  est strictement croissante et si  $g(u_0) \neq 0$ .

- Si  $f$  est **décroissante** sur  $I$  alors  $u$  **n'est en général pas monotone** (la seule exception venant de la possibilité que  $u$  soit constante).

Cependant  $f \circ f$  est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.

- Si  $f$  **est continue sur  $I$**  et **si la suite  $u$  converge vers  $l$**  alors  $l$  est **un point fixe de  $f$**  c'est-à-dire vérifie  $f(l) = l$ .

Ces résultats associés au théorème 8.51 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 15.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

**Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite**

On étudie la fonction  $f$  de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par  $f$ . Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}$  est un intervalle stable par  $f$  !
- Si  $f$  est croissante, tout segment de la forme  $[a; b]$  où  $a$  et  $b$  sont deux points fixes de  $f$  tels que  $a < b$  est stable par  $f$ .

En effet,  $\forall x \in [a; b], a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \Rightarrow a \leq f(x) \leq b$ .

- Si  $f$  est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à  $f \circ f$ .
- **Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par  $f$ .**

**Méthode : Monotonie de la suite**

L'étude de  $f$  a permis de connaître ses variations.

- Si  $f$  est croissante on étudie le signe de  $g = f - \text{id}$  :
  - ★ si  $g$  est **positive sur l'intervalle stable par  $f$  considéré**, la suite est croissante ;
  - ★ si  $g$  est **négative sur l'intervalle stable par  $f$  considéré**, la suite est décroissante.
- Si  $f$  est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

**Méthode : Convergence de la suite**

L'étude de  $f$  et du signe de  $g$  a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de  $f$  (les points où  $g$  s'annule sont les points fixes de  $f$ ). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à  $g$  pour montrer qu'elle s'annule.

**Les points fixes de  $f$  sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !**

Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à  $u$  ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.

De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

## V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 17.31) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».

Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.

**Ex. 17.19** Nous avons déjà étudié (exercice 15.22, TD d'informatique) la suite récurrente définie

pour  $r \in \mathbb{R}_+^*$  par  $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$  et nous avons montré que

- $u$  est décroissante à partir du rang 1 ;
- $u$  converge vers  $\sqrt{r}$ .

Montrer que pour  $n \geq 1, 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{r} \leq \frac{1}{\sqrt{r}}(u_n - \sqrt{r})^2$ .

En déduire que pour  $r > 1$  et  $k \in \mathbb{N}^*$ , si  $u_n$  est une approximation de  $\sqrt{r}$  à  $10^{-k}$  près alors  $u_{n+1}$  est une approximation de  $\sqrt{r}$  à  $10^{-2k}$  près.

**Cor. 17.19**

### V.3. Fonctions lipschitziennes



#### Définition 17.37 (Fonction lipschitzienne)

Soient  $I$  un intervalle réel,  $k \in \mathbb{R}_+$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur  $I$  si

$$\forall (x; y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

#### Proposition 17.38

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $|f'|$  est majorée par  $M \in \mathbb{R}_+$  alors  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $I$ .

#### Démonstration

#### Proposition 17.39

Si  $I = [a; b]$  est un segment et si  $f : I \rightarrow I$  est continue et  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$  alors  $f$  possède un unique point fixe.

#### Démonstration



#### Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction  $f$  dérivable sur un segment  $I$  stable par  $f$  et  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ , toute suite récurrente  $u$  définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $u_0 \in I$  converge vers l'unique point fixe de  $f$ .