Maths - DM n°1 - Pour le mercredi 14 octobre,

Complexes, analyse

Exercice 1.

1) Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 2.

Partie A : calculs de limite

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$.
3) Montrer que, pour tout réel x non nul, $\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$.
4) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$.
5) Montrer que, pour tout réel x non nul, $\dfrac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \times \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x}$.
6) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x}$.

Partie B : utilisation en analyse

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \quad \dfrac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto \quad 1 \end{cases}$.

Autrement dit, si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $f(0) = 1$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   [On distinguera deux cas : continuité sur $\mathbb{R}^*$ et continuité en 0.]
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
4) f' est-elle continue en 0 ? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $g_n : \begin{cases} [-\pi;\pi] & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \end{cases}$.

1) Que vaut $g_n(0)$?

2) Montrer que pour tout réel $x \in [-\pi; \pi] \backslash \{0\}$, $g_n(x) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

3) En déduire que pour tout réel $x \in [-\pi; \pi] \backslash \{0\}$, $g_n(x) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \dfrac{1}{2}$.

4) Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?