Maths - DM n°1 - Pour le mercredi 14 octobre,

Correction DM n°1

Exercice 1.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(5x) = \mathcal{R}e\left(e^{i5x}\right)$. On calcule donc $\left(e^{ix}\right)^5$:

$$\begin{aligned} \left(e^{ix}\right)^5 &= (\cos(x) + i\sin(x))^5 \\ &= \cos^5(x) + 5i\sin(x)\cos^4(x) - 10\sin^2(x)\cos^3(x) \\ &\quad -10i\sin^3(x)\cos^2(x) + 5\sin^4(x)\cos(x) + i\sin^5(x) \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos(5x) &= \mathcal{R}e\left(e^{i5x}\right) \\ &= \cos^5(x) - 10\sin^2(x)\cos^3(x) + 5\sin^4(x)\cos(x) \\ &= \cos^5(x) - 10\left(1-\cos^2(x)\right)\cos^3(x) + 5\left(1-\cos^2(x)\right)^2\cos(x) \\ &= 16\cos^5(x) - 20\cos^3(x) + 5\cos(x) \end{aligned}$$

2) En remplaçant x par $\frac{\pi}{10}$ et en posant $X = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = 16X^5 - 20X^3 + 5X \Leftrightarrow X(16X^4 - 20X^2 + 5) = 0$

Or $X = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$ donc X est l'une des quatre racines de $16X^4 - 20X^2 + 5 = 0$.

$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16 \times 5 = 80$ donc $X_{1,2} = \sqrt{\frac{20 \pm \sqrt{80}}{32}} = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$ et $X_{3,4} = -\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$.

$X = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > 0$ donc X est l'une des deux racines $X_{1,2}$. Pour distinguer entre ces deux racines, on peut par exemple comparer $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{4}$:

$0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 1 > X > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 1 > X^2 > \frac{1}{2}$

Or $5 - \sqrt{5} < 4$ donc $\frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{1}{2}$.

Finalement $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 2.

Partie A : calculs de limite

1) En interprétant la limite comme un nombre dérivé :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

2) À nouveau :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

3) Soit $x \neq 0$.

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1}{x^2} = \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}.$$

4) D'après la question précédente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{-1}{2}$$

car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 = 1.$

5) Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} &= \frac{\frac{\sin(x)-x}{x}}{x}\\ &= \frac{\sin(x)-x}{x^2}\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)-x}{x^2}\\ &= \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x}\end{aligned}$$

6) On souhaite calculer $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x}$.

On utilise la question précédente :

D'une part, $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1.$

On en déduit que $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = 1.$

D'autre part, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-1}{\frac{x}{2}} + \frac{1-\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x}.$

On pose $u = \frac{x}{2}$ dans cette dernière limite :

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{u}{\sin(u)}}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{2}\times\frac{u}{\sin(u)}\times\frac{\frac{\sin(u)}{u}-1}{u}.$

Donc $l = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \frac{l}{2}.$

Donc $l = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = 0.$

Partie B : utilisation en analyse

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \\ 0 & \mapsto & 1 \end{cases}$.

Autrement dit, si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f(0) = 1$.

1) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

De plus, en 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ d'après la partie A, et $f(0) = 1$.

Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$: f est aussi continue en 0.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$.

3) Pour savoir si f est dérivable en 0, on calcule $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$: or d'après la partie A,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(h)}{h}-1}{h} = 0.$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4) Pour savoir si f' est continue en 0, on calcule $\lim_{x\to 0} f'(x)$: si cette limite existe et vaut $f'(0)$, f' est continue en 0, sinon, f' n'est pas continue en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)x-\sin(x)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\frac{\sin(x)}{x}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} + \frac{1-\frac{\sin(x)}{x}}{x}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Or

d'après la première partie.

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$: f' est continue en 0.

Enfin, f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes opératoires (le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^*$), et comme f' est continue en 0, f' est donc continue sur $\mathbb{R}$.

En résumé : f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée f' est elle-même continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

1) $g_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \cos(0) = n.$

2) Soit $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$. En particulier, $e^{ix} \neq 1$. Or :

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{R}e\left(e^{ikx}\right)\\
&= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right)\\
&= \mathcal{R}e\left(e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right) \qquad \texttt{(somme des termes consécutifs d'une suite géométrique)}\\
&= \mathcal{R}e\left(e^{ix}\frac{e^{i\frac{n}{2}x}\left(e^{-i\frac{n}{2}x}-e^{i\frac{n}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)}\right)\\
&= \mathcal{R}e\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\mathcal{R}e\left(e^{\frac{i(n+1)x}{2}}\right)\\
&= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

3) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$ donc $\forall x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \cos\left(\tfrac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}+\frac{(n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{nx}{2}-\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g_n(x)+\frac{1}{2} = g_n(0)+\frac{1}{2} = \frac{2n+1}{2}$ car g_n est somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc est elle-même continue sur $\mathbb{R}$.