Maths - DM n°2 - Pour le mercredi 18 novembre,

Complexes, fonctions usuelles

Exercice 1.

Dans l'exercice 4.7 de la feuille d'exercices 4, nous avons montré que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Dans la suite de l'énoncé, on supposera connues ces deux valeurs.
Le but de cet exercice est de montrer comment ces valeurs permettent de construire à la règle et au compas un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
L'exercice devra être accompagné d'un dessin clair où les traits de construction seront apparents.

1) Tracer un repère orthonormé direct ainsi que le cercle trigonométrique avec pour unité 6cm - prendre une feuille A4 entière pour cette figure et placer le repère vers le bas de la feuille.
   Tracer les points A d'affixe 1, B d'affixe i, O d'affixe 0.
   Tous les tracés ultérieurs seront effectués sur ce repère.
2) Montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
3) Soit C le point d'affixe $1+2i$.
   Tracer le point C. Que vaut OC ?
4) Soit D le point d'intersection du segment $[OC]$ et du cercle trigonométrique.
   Tracer le point D. Quelle est l'affixe de D ? Que vaut CD ?
5) Construire le milieu E du segment $[CD]$.
6) Comment construire le point F du segment $[OA]$ tel que $OF = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$?
7) Construire à l'aide de ce qui a déjà été fait le pentagone régulier $\mathcal{P}$ inscrit dans le cercle trigonométrique dont l'un des sommets est A.
8) Quelle est l'aire de $\mathcal{P}$?

Exercice 2.

Concours Centrale-Supelec, question préliminaire, 2013

Soit $z \in \mathbb{C}$.
On pose $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Déterminer le module et un argument de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.

1) Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On note Argsh la bijection réciproque de sh.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

3) Déduire des questions précédentes que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x

$$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

4) Résoudre pour $y \in \mathbb{R}$ donné l'équation $\operatorname{sh}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5) En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.