Correction DM n°2

Exercice 1.

2) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 = \dfrac{1+5+2\sqrt{5}-8}{8} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3) $OC = |1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

4) D est un point du cercle trigonométrique, donc $OD = 1$.
Donc l'affixe de D vérifie $d = \dfrac{c}{|c|} = \dfrac{1+2i}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+2i\sqrt{5}}{5}$ d'une part,
et d'autre part $CD = OC - OD = \sqrt{5} - 1$.

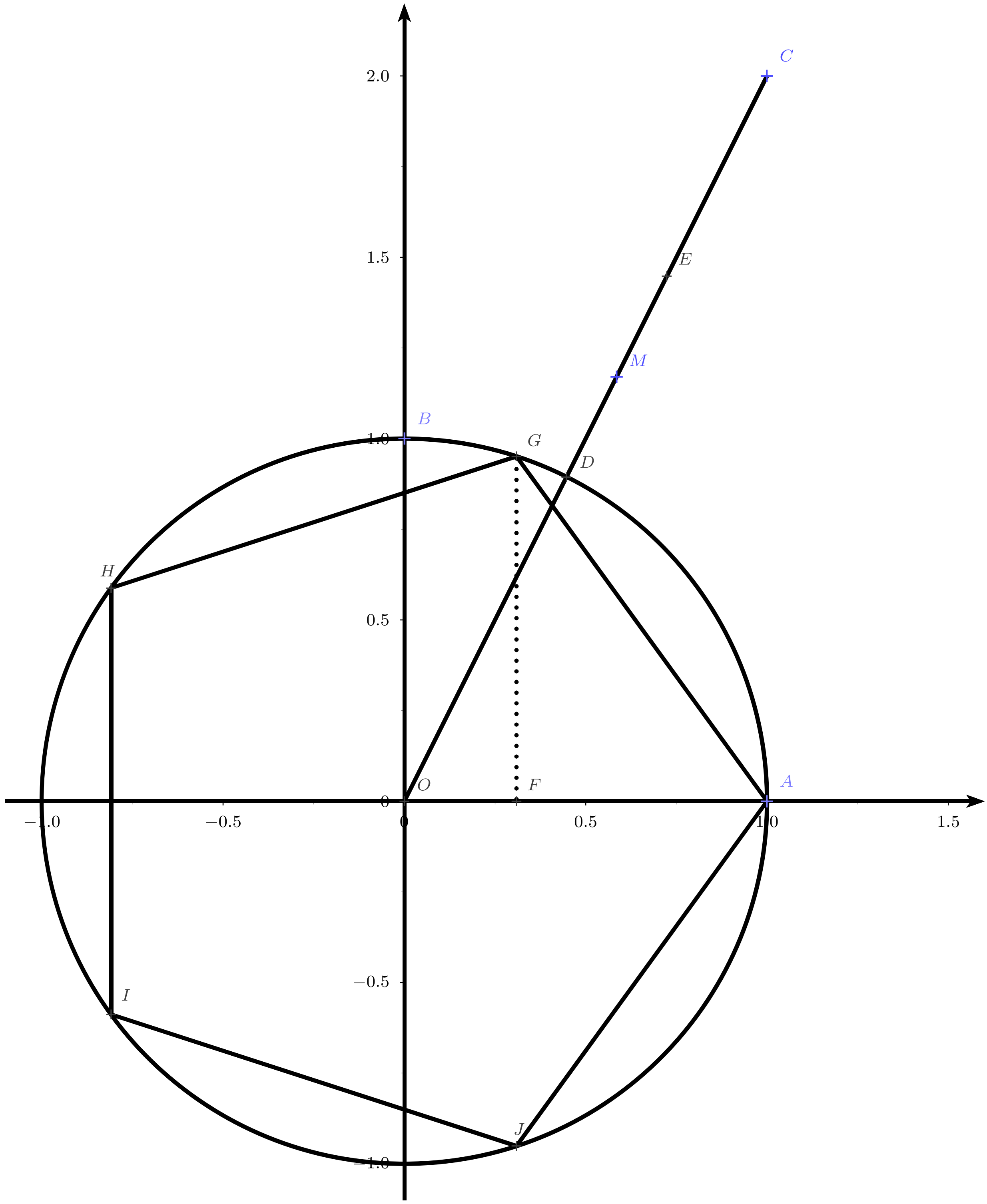
5)

6) Pour construire F, on obtient le milieu M de $[DE]$ puis on reporte la longueur DM sur l'axe des abscisses : F est le point de coordonnées $(DM; 0)$.

7)

8) L'aire de $\mathcal{P}$ est cinq fois l'aire du triangle OAG dont la base OA vaut 1 et la hauteur FG vaut $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
Donc $Aire(\mathcal{P}) = 5 \times \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}}{2} = \dfrac{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$.

1) Figure :



Exercice 2.

$Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\frac{n+a}{n} + i\frac{b}{n}\right)^n$

Donc $|Z_n| = \left(\frac{n^2 + a^2 + 2na + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

De même, un argument de Z_n est :

$\arg(Z_n) = n \arg\left(\frac{n+a}{n} + i\frac{b}{n}\right)$. On en déduit suivant le signe de $a+n$ et de b :

- si $a = -n$ et $b = 0$, alors $Z_n = 0$ n'a pas d'argument ;
- si $a = -n$ et $b > 0$, alors $\arg(Z_n) = n\frac{\pi}{2} [2\pi]$;

- si $a=-n$ et $b<0$, alors $\arg(Z_n) = -n\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$;
- si $a>-n$, alors $\arg(Z_n) = n\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+n}\right)[2\pi]$;
- enfin, si $a<-n$, alors $\arg(Z_n) = \pi + n\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{b}{a+n}\right)[2\pi]$.

Exercice 3.

1) sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\mathrm{ch} \geqslant 1 > 0$. Donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.
De plus, on l'a dit, sh est continue, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, sh est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit donc que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2) D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) = x$.
Or $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) - x^2 = 1$.
De plus, ch est positive donc $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\left(\mathrm{Argsh}(x)\right) = \sqrt{1+x^2}$.

3) D'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque, sh étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, Argsh est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout $y \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(y)) \neq 0$.
Or $\mathrm{sh}'(\mathrm{Argsh}(y)) = \mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(y)) = \sqrt{1+y^2} > 0$.
Donc Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}' \circ \mathrm{Argsh}(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4) D'une part, par définition de Argsh, $\mathrm{sh}(x) = y \Leftrightarrow x = \mathrm{Argsh}(y)$.
D'autre part,
$$\begin{aligned} \mathrm{sh}(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \end{aligned}$$
En posant $X = e^x$, on obtient l'équation du second degré $X^2 - 2yX - 1 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$, l'équation a donc deux solutions
$X_\pm = \dfrac{2y \pm \sqrt{4+4y^2}}{2} = y \pm \sqrt{1+y^2}$.
Or $1+y^2 > y^2$ donc $\sqrt{1+y^2} > |y| \geqslant y$ c'est-à-dire $y - \sqrt{1+y^2} < 0$.
De plus $X = e^x > 0$, la seule solution de $\mathrm{sh}(x) = y$ est donc finalement
$$x = \mathrm{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$$

5) D'après les questions précédentes et le théorème fondamental de l'intégration :
   - $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$: toutes ses primitives sont donc obtenues en ajoutant une constante réelle à l'une d'entre elles.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, donc Argsh est une primitive de $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Donc l'ensemble des primitives de $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est
$$\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + k, \ \text{où } k \in \mathbb{R}\right\}$$