Maths - DS n°1 - Vendredi 2 octobre, 2 heures

Sommes finies, étude de fonctions

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs*.*

Cours

1) Démontrer la formule de Pascal.

2) Construire le triangle de Pascal contenant les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour $0 \leqslant n \leqslant 6$.

Exercices

Exercice 1.

Bac 2017, Antilles/Guyane

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel ***strictement positif***.

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel x strictement positif.

Partie A.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1) Étudier les variations de f.

2) Déterminer son maximum.

3) Faire une représentation graphique ***rapide*** la fonction f sur le repère donné en annexe.
Pour les applications numériques on donne les valeurs suivantes :
$e \simeq 2,7 \quad \ln(2) \simeq 0,7$

Partie B.

1) Montrer que pour $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution sur $[1; e]$ notée α_n.

2) À l'aide de la représentation graphique faite en annexe, conjecturer le sens de variations de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.

3) Comparer pour tout entier $n \geqslant 3$ les valeurs de $f(\alpha_n)$ et de $f(\alpha_{n+1})$.

4) Déduire de la question précédente le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$.

5) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ converge (on ne demande pas sa limite).

6) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une seconde solution sur $[e;+\infty[$ notée β_n.

7) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$.

8) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.

Exercice 2.

Soit n un entier naturel.

On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\binom{k}{2}}$, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n}$ et $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+k}{n}}{2^k}$.

Le but de cet exercice est de simplifier ces trois sommes.

Calcul des premiers termes

1) Calculer la valeur de A_2, A_3, B_0, B_1, C_0 et C_1

Calcul de A_n

2) Montrer que pour tout entier k ***supérieur ou égal à 2***, $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3) Déduire de la question précédente que $A_n = \dfrac{2(n-1)}{n}$.

Calcul de B_n

4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

5) Déduire de la question précédente une expression simplifiée de B_n.

Calcul de C_n

6) À l'aide de la question 4., montrer que $C_{n+1} = qC_n$ où q est un réel que l'on précisera.

7) En déduire une expression simplifiée de C_n.

ANNEXE

NOM : .... ***Prénom*** : ....