Maths - DS n°1 - Vendredi 2 octobre, 2 heures

Correction DS n°1

Exercice 1.

Partie A.

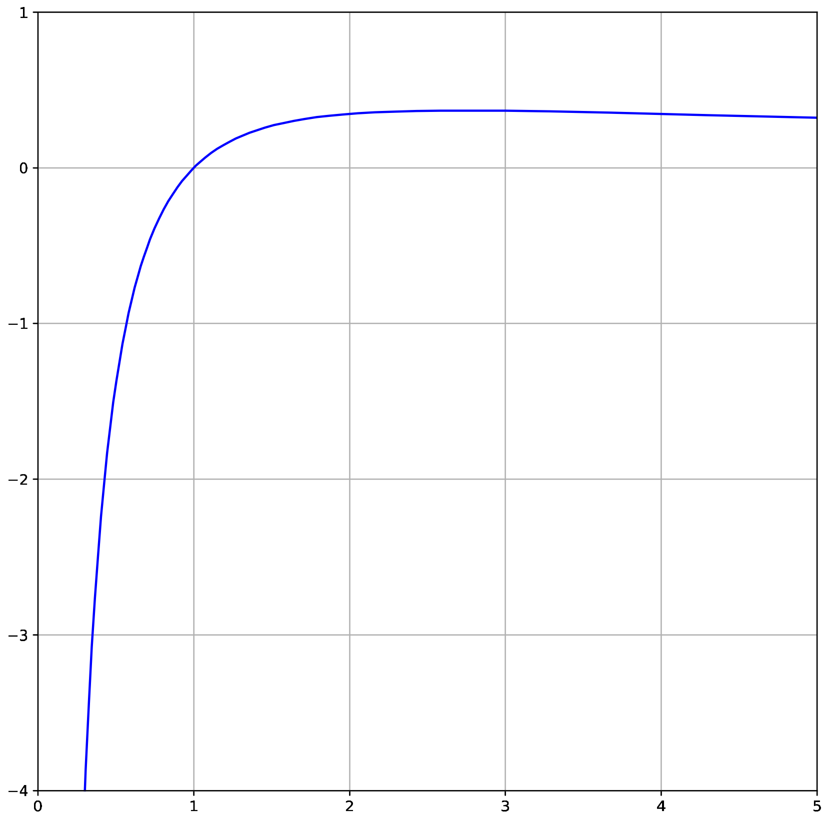
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$.
   $1-\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \ln(x) \Leftrightarrow e \geqslant x$.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	-	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2) D'après le tableau de variations de f, la fonction passe par son maximum $\dfrac{1}{e}$ en $x = e$.
3)



Partie B.

1) $(E_n) \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{n}$.

   Or, pour $n \geqslant 3 > e$, $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{e}$.

   Sur l'intervalle $[1; e]$, f est strictement croissante, continue, $f(1) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$, c'est donc une bijection de $[1; e]$ sur $\left[0; \frac{1}{e}\right]$.

   Notamment, comme $\dfrac{1}{n} \in \left[0; \frac{1}{e}\right]$, (E_n) possède une unique solution sur $[1; e]$, que nous noterons α_n.

2) Graphiquement, la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ semble décroissante.

3) Soit $n \geqslant 3$.

   $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ par définition de α_n

   et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$.

   Donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$.

4) Nous avons montré que f est bijective strictement croissante de $[1; e]$ sur $\left[0; \frac{1}{e}\right]$.

   Donc f^{-1} est aussi strictement croissante.

   Donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

   La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est donc décroissante.

5) La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante (d'après la question précédente).

   De plus, par définition, $\forall n \geqslant 3, \alpha_n \geqslant 1$.

   La suite est donc décroissante et minorée : elle est convergente.

6) Sur l'intervalle $[e; +\infty[$, f est strictement décroissante, continue, $f(e) = \dfrac{1}{e}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   f est donc une bijection de $[e; +\infty[$ sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$.

   Notamment, comme $\dfrac{1}{n} \in \left]0; \frac{1}{e}\right]$, (E_n) possède une unique solution sur $[e; +\infty[$, que nous noterons β_n.

7) Soit $n \geqslant 3$.

   $f\left(n\frac{\beta_3}{3}\right) = \dfrac{\ln\left(n\frac{\beta_3}{3}\right)}{n\frac{\beta_3}{3}} = 3\dfrac{\ln\left(\frac{n}{3}\right) + \ln(\beta_3)}{n\beta_3}$.

   Or $f(\beta_3) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{\ln(\beta_3)}{\beta_3}$ donc $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$.

   D'autre part, $n \geqslant 3 \Rightarrow \dfrac{n}{3} \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{n}{3}\right) \geqslant 0$. Donc : $f\left(n\frac{\beta_3}{3}\right) = 3\dfrac{\ln\left(\frac{n}{3}\right) + \dfrac{\beta_3}{3}}{n\beta_3} \geqslant \dfrac{3\dfrac{\beta_3}{3}}{n\beta_3} = \dfrac{1}{n}$.

   Or, sur l'intervalle $[e; +\infty[$, f est bijective décroissante, donc f^{-1} est elle aussi décroissante.

   Donc $n\frac{\beta_3}{3} \leqslant f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \beta_n$.

   Finalement, $\forall n \geqslant 3, \beta_n \geqslant n\dfrac{\beta}{3}$.

8) β_3 est strictement positive par définition.

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\frac{\beta_3}{3} = +\infty$.

   Or, d'après la question précédente, $\forall n \geqslant 3, \beta_n \geqslant n\dfrac{\beta}{3}$.

   Donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

Exercice 2.

Calcul des premiers termes

1) $A_2 = 1$, $A_3 = \dfrac{1}{3} + 1 = \dfrac{4}{3}$.
$B_0 = 1$, $B_1 = 1 + 2 = 3$.
$C_0 = 1$ et $C_1 = 1 + \dfrac{2}{2} = 2$.

Calcul de A_n

2) Soit k un entier ***supérieur ou égal à 2***.
$\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

3)
$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\frac{k(k-1)}{2}} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k(k-1)} \\ &= 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{par télescopage} \\ &= \frac{2(n-1)}{n} \end{aligned}$$
.

Calcul de B_n

4) Pour un entier $a \in \mathbb{N}$ et un entier $b \in [\![0; a-1]\!]$, la formule de Pascal permet d'affirmer que
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ b+1 \end{pmatrix}$$
En posant $a = n + k$ et $b = n$, $b < a \Leftrightarrow k > 0$.
Donc, pour tout entier n et tout entier $k > 0$, la formule de Pascal s'écrit
$$\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$
D'où l'on déduit : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}$$

5)
$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calcul de C_n

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= 1 + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\begin{pmatrix} n+j \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{j-1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \quad \text{en posant, dans la première somme, } j = k+1 \\
&= 1 + \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^n} - \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\begin{pmatrix} n+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{\begin{pmatrix} n+1+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} \quad \text{après un nouveau changement d'indice}
\end{aligned}$$

6)

Il manque le terme d'indice $k = n+1$ dans la somme : il s'écrit $\frac{\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{n+2}}$ (en développant le 1/2 en facteur).

Or $\frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{n+1}} = \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2n+1-n-1 \end{pmatrix}}{2^{n+2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n \end{pmatrix}}{2^{n+2}} = \frac{\begin{pmatrix} 2n+2 \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^{n+2}}$.

Donc $C_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\begin{pmatrix} n+1+k \\ n+1 \end{pmatrix}}{2^k} = \frac{1}{2} C_{n+1}$.

La suite C est donc géométrique de raison 2.

7) On en déduit que $C_n = 2^n C_0 = 2^n$.