Fonctions usuelles, nombres complexes, primitives et intégrales

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Donner (avec démonstration) l'ensemble des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Donner une primitive, en précisant un intervalle de définition de cette primitive, des fonctions
$f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto \tan(x)$, $h : x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercices

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - \frac{2}{x}y = 2$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

1) Trouver une « solution particulière évidente » de (E).
2) Résoudre (E).

Exercice 2.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' - 6y' + 9y = 0$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2) $y'' + y' - (1+3i)y = e^{ix}$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3) $y'' - 6y' + 13y = \cos(4x)$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3.

Concours Centrale-Supelec, question préliminaire, 2013

Soit $z \in \mathbb{C}$.

On pose $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Déterminer le module et un argument de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

1) En étudiant la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

2) Montrer que $0 < \dfrac{q-p}{p+q} < 1$.
3) Soit $A = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
   Montrer que $A \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4) Calculer la valeur de A.
   Remarque : on montrera notamment que la valeur de A ne dépend pas de p et de q.
5) Rappeler la formule donnant $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$ lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis.
6) Calculer $4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$.
7) ***Formule de Machin*** :
   Déduire des question précédentes que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Correction DS n°2

Exercice 1.

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - \frac{2}{x}y = 2$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\right)$.

1) On cherche une solution linéaire : $y_P = ax$, donc $y_P' = a$.
   En injectant dans (E) on obtient :
   $a - \dfrac{2ax}{x} = 2 \Rightarrow -a = 2$.
   Une solution particulière de (E) est donc $y_P = -2x$.

2) Cherchons les solutions de l'équation homogène :
   $(E_H) : y' - \dfrac{2}{x}y = 0$
   Donc $y_H = \lambda e^{2\ln(x)} = \lambda x^2$.
   En utilisant la solution particulière trouvée à la question précédente, on obtient donc comme ensemble de solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \lambda x^2 - 2x, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 2.

1) $(E_1) : y'' - 6y' + 9y = 0$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   $(E_{c1}) : r^2 - 6r + 9 = 0$
   $\Delta = 36 - 36 = 0$, (E_{c1}) possède une unique solution $r_0 = 3$.
   Donc l'ensemble des solutions de (E_1) est

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mapsto (Ax + B)e^{3x}, \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{C}^2\right\}$$

2) $(E_2) : y'' + y' - (1 + 3i)y = e^{ix}$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   - Équation homogène associée : $(E_{H2}) : y'' + y' - (1 + 3i)y = 0$, d'équation caractéristique $(E_{c2}) : r^2 + r - (1 + 3i) = 0$.
     $\Delta = 1 + 4(1 + 3i) = 5 + 12i$.
     Cherchons $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 5 + 12i$:

$$\begin{cases} \delta^2 & = \Delta \\ |\delta|^2 & = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 & = 5 \\ 2ab & = 12 \\ a^2 + b^2 & = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 18 \\ ab & = 6 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3$$

On peut par exemple choisir $\delta = 3+2i$.

(E_{c2}) possède donc deux solutions $r_1 = \dfrac{-1+3+2i}{2} = 1+i$ et $r_2 = \dfrac{-1-3-2i}{2} = -2-i$.

Les solutions de (E_{H2}) sont donc les fonctions $y = Ae^{(1+i)x} + Be^{-(2+i)x}$ où $(A,B) \in \mathbb{C}^2$.

- Cherchons une solution particulière à (E_2).

  Le second membre est de la forme e^{cx} où $c = i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.

  On cherche donc y_P sous la forme $y_P = Ue^{cx}$.

  $y_P' = Uce^{cx}$ et $y_P'' = Uc^2e^{cx}$ ce qui donne, en remplaçant dans (E_2) :

  $Ue^{cx}\left(c^2 + c - (1+3i)\right) = e^{cx} \Leftrightarrow U = \dfrac{1}{c^2+c-1-3i}$ car e^{cx} ne s'annule pas, quelle que soit la valeur de x.

  Donc $U = \dfrac{1}{-1+i-1-3i} = \dfrac{-1}{2+2i} = \dfrac{-2+2i}{8} = \dfrac{-1+i}{4}$.

- Finalement l'ensemble des solutions de (E_2) est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{(1+i)x} + Be^{-(2+i)x} + \frac{-1+i}{4}e^{ix}, \quad \text{où } (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

3) $(E_3) : y'' - 6y' + 13y = \cos(4x)$ où $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

- Équation homogène associée : $(E_{H3}) : y'' - 6y' + 13y = 0$, d'équation caractéristique $(E_{c3}) : r^2 - 6r + 13 = 0$.

  $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$.

  (E_{c3}) possède donc deux solutions $r_1 = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i$ et $r_2 = 3-2i$.

  Les solutions de (E_{H3}) sont donc les fonctions

  $y = e^{3x}\big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\big)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

- Cherchons une solution particulière à (E_3).

  Le second membre est de la forme $\cos(4x) = \mathcal{R}e\left(e^{i4x}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{cx}\right)$ où $c = 4i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique.

  On cherche donc une solution particulière à $y'' - 6y' + 13y = e^{cx}$ sous la forme $y_P = Ue^{cx}$ puis on prendra sa partie réelle pour obtenir une solution particulière de (E_3).

  $y_P' = Uce^{cx}$ et $y_P'' = Uc^2e^{cx}$ ce qui donne, en remplaçant dans (E_3) :

  $Ue^{cx}\left(c^2 - 6c + 13\right) = e^{cx} \Leftrightarrow U = \dfrac{1}{c^2-6c+13}$ car e^{cx} ne s'annule pas, quelle que soit la valeur de x.

  Donc $U = \dfrac{1}{-16-24i+13} = \dfrac{-1}{3+24i} = \dfrac{-3+24i}{9+576} = \dfrac{-1+8i}{291}$.

  Finalement, une solution particulière de (E_3) est

  $y_P = \mathcal{R}e\left(U\left(\cos(4x) + i\sin(4x)\right)\right) = \dfrac{-\cos(4x) - 8\sin(4x)}{291}$.

- L'ensemble des solutions de (E_2) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto e^{3x}\big(A\cos(2x) + B\sin(2x)\big) - \frac{\cos(4x) + 8\sin(4x)}{291}, \quad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 3.

$$Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(\frac{n+a}{n} + i\frac{b}{n}\right)^n$$

Donc $|Z_n| = \left(\dfrac{n^2 + a^2 + 2na + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \dfrac{2a}{n} + \dfrac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

De même, un argument de Z_n est :
$\arg(Z_n) = n \arg\left(\frac{n+a}{n} + i\frac{b}{n}\right)$. On en déduit suivant le signe de $a+n$ et de b :

- si $a = -n$ et $b = 0$, alors $Z_n = 0$ n'a pas d'argument ;
- si $a = -n$ et $b > 0$, alors $\arg(Z_n) = n\frac{\pi}{2}[2\pi]$;
- si $a = -n$ et $b < 0$, alors $\arg(Z_n) = -n\frac{\pi}{2}[2\pi]$;
- si $a > -n$, alors $\arg(Z_n) = n \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a+n}\right)[2\pi]$;
- enfin, si $a < -n$, alors $\arg(Z_n) = \pi + n \operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a+n}\right)[2\pi]$.

Exercice 4.

1) Étudions $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$
Or $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$ est un intervalle, f' est nulle sur cet intervalle, donc f est une fonction constante.
De plus, $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
Donc
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x)$$

Soient p et q deux entiers tels que $0 < p < q$.

2) $q > p$ donc $q - p > 0$ et p et q étant strictement positifs, $p + q > 0$.
Donc $\frac{q-p}{p+q} > 0$.
Concernant l'inégalité de droite,
$\frac{q-p}{p+q} < 1 \Leftrightarrow q - p < p + q \Leftrightarrow -p < p$ qui est vraie puisque $p > 0$.
On a donc bien $0 < \frac{q-p}{p+q} < 1$.

3) Soit $A = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right)$.
$0 < p < q$ donc $0 < \frac{p}{q} < 1$. Comme Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a donc
$$0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{\pi}{4}$$
De même, en utilisant la question précédente,
$$0 < \operatorname{Arctan}\left(\frac{q-p}{p+q}\right) < \frac{\pi}{4}$$
Finalement, en faisant la somme de ces deux encadrements, on a bien
$$0 < A < \frac{\pi}{2}$$

4) Calculons $\tan(A)$ en utilisant la formule d'addition $\tan(u+v) = \frac{\tan(u)+\tan(v)}{1-\tan(u)\tan(v)}$:
$\tan(A) = \frac{\frac{p}{q} + \frac{q-p}{p+q}}{1 - \frac{p}{q} \times \frac{q-p}{p+q}} = \frac{\frac{p^2+pq+q^2-pq}{p(p+q)}}{\frac{q^2+pq-pq+p^2}{p(p+q)}}$.

Donc $\tan(A) = 1$.
Donc $A = \frac{\pi}{4}[\pi]$. Comme d'après la question précédente $A \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on peut donc affirmer que

$$A = \frac{\pi}{4}$$

notamment que A est indépendant de la valeur de p et de q.

5) Lorsque $\tan(2x)$ et $\tan(x)$ sont définis, on a :
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$

6) Soit $B = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $C = 2B$. Il s'agit de calculer la valeur de C.
Commençons par remarquer que $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $0 < B < \dfrac{\pi}{2}$ par stricte croissance de Arctan.
De plus $\tan(B) = \dfrac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{25}{24} = \dfrac{5}{12}$.
Remarquons à nouveau que $\tan(B) < 1$. On peut donc préciser l'intervalle contenant B : $0 < B < \dfrac{\pi}{4}$.
Par conséquent $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$.
$\tan(C) = \dfrac{2\tan(B)}{1 - \tan^2(B)} = \dfrac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{144}{119} = \dfrac{120}{119}$.
Comme de plus $0 < C < \dfrac{\pi}{2}$, on peut donc affirmer que $C = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right)$. Finalement, on a donc

$$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right)$$

7) Posons $p = 119$ et $q = 120$ dans le résultat de la question 4.
On a alors $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
En utilisant par ailleurs la question 1, on a aussi $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Enfin, d'après la question précédente,
$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{120}{119}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{119}{120}\right)$,
c'est-à-dire :
$4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.
En réorganisant cette dernière identité, on obtient bien la ***formule de Machin*** :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$