Fonctions usuelles, nombres complexes, intégrales et équa.diff.

L'usage d'une calculatrice est interdit.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Calculer $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$.

2) Résoudre les équations suivantes d'inconnue complexe z :

$$(E_1) : z^2 - (2+i)z - 1 + 7i = 0 \qquad (E_2) : z^3 + (4-2i)z^2 + (19-14i)z + 30 - 20i = 0$$

On pourra utiliser dans les calculs que $68^2 = 4624$ ***et*** $25^2 = 625$.

Exercices

Exercice 1.

1) Donner une formule explicite pour la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$$

2) Donner une formule explicite pour la suite définie par

$$v_0 = 2, v_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$$

Exercice 2.

1) Soit $r \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$y' - \frac{2x}{1+x^2} y = r(1+x^2)$$

2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \frac{2x}{1+x^2} f(x) = (1+x^2) \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Exercice 3.

Montrer que pour tout réel x,

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x)$$

Exercice 4.

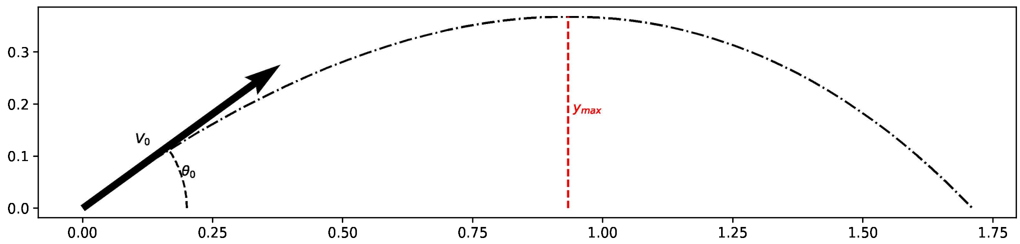
Dans tout ce qui suit, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*, \beta \in \mathbb{R}_+^*, V_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sont des réels donnés.
Dans cet exercice, on souhaite étudier le mouvement d'un solide soumis à la force d'attraction terrestre et à des forces de frottement fluide.
On montre en utilisant le principe fondamental de la dynamique que son abscisse $x : t \in \mathbb{R} \mapsto x(t)$ et son ordonnée $y : t \in \mathbb{R} \mapsto y(t)$ vérifient les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : x'' + \alpha x' = 0 \qquad (E_2) : y'' + \alpha y' = -\beta$$

De plus, on donne les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x'(0) &= V_0\cos(\theta_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= V_0\sin(\theta_0) \end{cases}$$

Le tout est résumé sur la figure ci-dessous :



1) Résoudre (E_1) et montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{V_0\cos(\theta_0)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

2) Résoudre (E_2) et obtenir une expression similaire pour $y(t)$.
3) On note y_{max} l'altitude maximale atteinte par le solide.
   Donner une expression y_{max} ne faisant intervenir que α, β, V_0 et θ_0.
   Rappel : on pourra considérer que $\alpha > 0, \beta > 0, V_0 > 0$ et $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$.
4) Donner une expression de l'abscisse x_m du point où le solide atteint son altitude maximale.

Exercice 5.

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.
Soit j le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1) Quels sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?
2) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de l'égalité

$$(E) : c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$$