Correction DS n°2

Exercice 1.

1) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 3$

u est une suite arithmético-géométrique, $2 \neq 1$, donc u est la somme d'une suite constante satisfaisant la même relation de récurrence et d'une suite géométrique de raison 2.

$c = 2c - 3 \Leftrightarrow c = 3$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 + \lambda 2^n$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $u_0 = 3 + \lambda = 2$ donc $\lambda = -1$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3 - 2^n$$

2) $v_0 = 2, v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$

v est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Équation caractéristique : $r^2 - 2r - 1 = 0$.

$\Delta = 4 + 4 = 8$ donc $r_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \lambda(1+\sqrt{2})^n + \mu(1-\sqrt{2})^n$.

Or $v_0 = 2 = \lambda + \mu$ et $v_1 = 2 = \lambda(1+\sqrt{2}) + \mu(1-\sqrt{2})$.

Donc $-2(1-\sqrt{2}) + 2 = \lambda(1+\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\lambda$.

Donc $\lambda = 1$.

Et de même, $2(1+\sqrt{2}) - 2 = \mu(1+\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}) \Rightarrow \mu = 1$.

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$$

Exercice 2.

1) Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(E) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2} y = r(1+x^2)$

Équation homogène : $(E_H) : y' - \dfrac{2x}{1+x^2} y = 0$

$A(x) = \displaystyle\int^x -\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\ln(1+x^2)$ en reconnaissant la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Donc $y_H = \lambda e^{\ln(1+x^2)} = \lambda\,(1+x^2)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : par la méthode de variation de la constante.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_P = \lambda(x)\,(1+x^2)$.

En réinjectant dans (E) on obtient : $\lambda'\,(1+x^2) = r\,(1+x^2)$.

Donc $\lambda' = r$ et $\lambda = rx$.

Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$y = \lambda\left(1+x^2\right) + rx\left(1+x^2\right) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

2) On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = (1+x^2) \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$
Ici, $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ est ***un nombre réel***, qui ***dépend de la fonction inconnue***.
Analyse : soit f une solution du problème.
En posant $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$, f est donc solution de $y' - \dfrac{2x}{1+x^2} y = r(1+x^2)$.
Donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \lambda + rx + \lambda x^2 + rx^3$.
Or $r = \displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda + ru + \lambda u^2 + ru^3 \mathrm{d}u = \lambda + \frac{r}{2} + \frac{\lambda}{3} + \frac{r}{4}$
Donc $\dfrac{r}{4} = \dfrac{4\lambda}{3}$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$ (en posant $\lambda = 3\mu$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ à choisir librement).
Synthèse : soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3$.
Alors, f est continue et dérivable et
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2$
Donc $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - \dfrac{2x}{1+x^2} \times (3\mu + 16\mu x)(1+x^2)$
c'est-à-dire $f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = 16\mu + 6\mu x + 48\mu x^2 - 6\mu x - 32\mu x^2 = 16\mu(1+x^2)$.
Or $\displaystyle\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = 3\mu + \frac{16\mu}{2} + \frac{3\mu}{3} + \frac{16\mu}{4} = 16\mu$.
Donc f est bien solution de $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2} f(x) = (1+x^2) \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$.
Finalement, l'ensemble des solutions du problème posé est

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3\mu + 16\mu x + 3\mu x^2 + 16\mu x^3, \text{ où } \mu \in \mathbb{R} \text{ peut être choisie librement}$$

Exercice 3.

Il y a essentiellement deux méthodes :
étudier la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x+1) + \mathrm{Arctan}(x)$ et montrer que c'est la fonction nulle
ou tenter d'obtenir l'identité en composant par la fonction tan.
Je rédige la seconde méthode : soit $x \in \mathbb{R}$.
$\tan\big(\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)\big) = \dfrac{x+1-x}{1+x(x+1)} = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.
Donc $\tan\big(\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)\big) = \tan\Big(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)\Big)$
c'est-à-dire $\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ (résolution des équations du type $\tan(a) = \tan(b)$).
Il s'agit donc de montrer que $k = 0$ et pour cela de montrer que

1) $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$: évident par définition de Arctan ;
2) $\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:
   $\mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{x+1} 1\mathrm{d}t = 1 < \frac{\pi}{2}$ d'une part,
   et $0 \leqslant \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)$ d'autre part (car Arctan est croissante).

On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x)$$

Exercice 4.

1) $(E_1) : x'' + \alpha x' = 0$
   On peut voir (E_1) comme une équation différentielle linéaire du premier ordre portant sur x'.
   Donc $x'(t) = Ae^{-\alpha t}$ donc $x(t) = B - \dfrac{A}{\alpha}e^{-\alpha t}$ (remarque : $\alpha > 0$).
   Or :
   - $x(0) = 0 \Rightarrow B - \dfrac{A}{\alpha} = 0$;
   - $x'(0) = V_0 \cos(\theta_0) \Rightarrow A = V_0 \cos(\theta_0)$.

   Donc
   $$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{V_0 \cos(\theta_0)}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$
2) De même : $(E_2) : y'' + \alpha y' = -\beta$ dont on a déjà résolu l'équation homogène associée à la question précédente.
   Par ailleurs, en choisissant $y' = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ constante, on obtient une solution particulière de l'équation avec second membre.
   Donc $y(t) = -\dfrac{\beta}{\alpha}t + C - \dfrac{D}{\alpha}e^{-\alpha t}$
   Or :
   - $y(0) = 0 \Rightarrow C - \dfrac{D}{\alpha} = 0$;
   - $y'(0) = V_0 \sin(\theta_0) \Rightarrow -\dfrac{\beta}{\alpha} + D = V_0 \sin(\theta_0)$.

   Donc $D = V_0 \sin(\theta_0) + \dfrac{\beta}{\alpha}$ et $C = \dfrac{V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha^2}$.
   Finalement,
   $$\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = -\frac{\beta}{\alpha}t + \left(\frac{V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \times \left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$
3) On cherche le maximum de la fonction $t \mapsto y(t)$.
   Dérivons y (qui est évidemment dérivable puisque solution d'une EDL2) :
   $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = -\dfrac{\beta}{\alpha} + \alpha \times \left(\dfrac{V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$.
   Soit, après simplification : $y'(t) = e^{-\alpha t}\left(V_0 \sin(\theta_0) + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) - \dfrac{\beta}{\alpha}$.
   $y'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha t} \geqslant \dfrac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}$
   ce qui équivaut à $t \leqslant \dfrac{-1}{\alpha}\ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}\right)$.
   y est donc bien croissante puis décroissante, passe par un maximum pour
   $t_0 = \dfrac{-1}{\alpha}\ln\left(\dfrac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}\right)$.
   Donc
   $$y_{max} = \frac{\beta}{\alpha^2}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}\right) + \left(\frac{V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^2}\right) \times \frac{\alpha V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}$$
   ou encore
   $$y_{max} = \frac{\beta}{\alpha^2}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}\right) + \frac{V_0^2 \sin^2(\theta_0)}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta} + \frac{\beta V_0 \sin(\theta_0)}{\alpha\left(\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta\right)}$$

4) On évalue $x(t)$ en $t_0 = \frac{-1}{\alpha} \ln\left(\frac{\beta}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta}\right)$.
Après simplification, on obtient

$$x_m = \frac{V_0^2 \cos(\theta_0)\sin(\theta_0)}{\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta} = \frac{V_0^2 \sin(2\theta_0)}{2\left(\alpha V_0 \sin(\theta_0) + \beta\right)}$$

~~Notamment, pour que la trajectoire passe par son apogée avec la plus grande abscisse possible, il faut lancer l'objet avec un angle de~~ $\cancel{\theta_0 = \frac{\pi}{4}}$~~, et ceci, même en tenant compte, comme c'est le cas ici, des forces de frottement.~~

Exercice 5.

1) $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $c - a$.

2) $(E) : c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a)$ signifie que le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une rotation (vectorielle) d'angle $\frac{\pi}{3}$
ou encore, que le point C est l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Ce qui revient à dire que le triangle ABC est équilatéral ***direct*** (rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et non pas $\frac{-\pi}{3}$).

3) $$\begin{aligned} (E) : c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - a) &\Leftrightarrow a\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right) - be^{\frac{i\pi}{3}} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow ja + j^2 b + c = 0 \end{aligned}$$
en simplifiant.

4) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si il est ***équilatéral direct ou indirect*** ce qui équivaut à $(ja + j^2b + c)(j^2a + jb + c) = 0$ puisqu'il suffit, dans le cas indirect, de remplacer $e^{i\frac{\pi}{3}}$ par son conjugué $e^{i\frac{-\pi}{3}}$.
Donc ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0$ qui est identique à l'identité $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$ donnée, à un facteur $\frac{1}{2}$ près.