Équations différentielles, suites, DL

<u>L'usage d'une calculatrice est interdit.</u>

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Cours

1) Donner (sans démonstration) le DL à l'ordre n de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
2) Donner (sans démonstration) le DL à l'ordre n de $x \mapsto \exp(x)$.
3) Donner (sans démonstration) le DL à l'ordre $2n$ de $x \mapsto \cos(x)$.

Exercices

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de donner l'expression des coefficients du développement limité de Arcsin en 0 à l'ordre $2n+1$.

1) Rappeler l'expression, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, de $\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix}$.
2) Calculer $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.
3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.
4) Donner l'expression du développement limité de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ à l'ordre n en 0.
5) Donner l'expression du développement limité de $\mathrm{Arcsin}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.
6) Donner l'expression du développement limité de $\mathrm{Arccos}(x)$ à l'ordre $2n+1$ en 0.

Exercice 2.

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x$ définie pour tout entier naturel n.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1} - I_n$.

3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

4) Montrer que pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$.

5) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, positive et qu'elle converge vers une limite que l'on précisera.

6) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$.

7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 3.

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(F) : \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

Soit f une solution de (F). En particulier f est deux fois dérivable.

- Partie A -

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f(-x)$.

1) Montrer que g est paire.

2) Montrer que g est deux fois dérivable et satisfait l'équation différentielle $(G) : u'' + u = 0$.

3) Résoudre (G).

4) En utilisant le résultat de la question précédente et le fait que g est paire, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos(x) \text{ où } A \in \mathbb{R}$$

- Partie B -

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) - f(-x)$.

1) Montrer que h est impaire et deux fois dérivable.

2) Montrer que h est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (H) que l'on précisera.

3) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = B\,\mathrm{sh}(x) - 2x \text{ où } B \in \mathbb{R}$$

- Partie C -

Donner l'ensemble des solutions de (F).

Correction DS n°3

Exercice 1.

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$: par définition,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1\times 2\times ...\times k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!}.$$

2) $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{2} = \frac{\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}}{2} = \frac{3}{8}.$

$\binom{\frac{-1}{2}}{3} = \frac{\frac{-1}{2}\times\frac{-3}{2}\times\frac{-5}{2}}{6} = \frac{-5}{16}.$

3) Montrons par récurrence que $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$.

Initialisation : pour $k=0$, $(-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} = 1$ et $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1$.

Hérédité : supposons que pour k entier donné, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{-1}{2}}{k+1} &= \frac{\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{(k+1)!} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{k!} \times \frac{\frac{-1}{2}-k}{k+1} \\
&= (-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{-(2k+1)}{2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{2(k+1)\times 2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1}\frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$.

4) $\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}u^k + \underset{u\to 0}{o}(u^n).$

5) $\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1;1[$ donc en posant $u = -x^2$ dans le développement

limité précédent, et en remarquant que $\mathrm{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\mathrm{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

6) De même qu'à la question précédente, en remarquant que $\mathrm{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\mathrm{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Exercice 2.

1) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^0}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)}{2} = \frac{\ln(2)}{2}$

$I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = 1 - I_0 = \frac{4-\pi}{4}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n-x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n \frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - I_n \\ &= \frac{1}{n+1} - I_n \end{aligned}$$

3) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation :

$(-1)^0 I_0 = I_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

De même, $(-1)^0 I_{2\times 0+1} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et $\dfrac{\ln(2)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k} = \frac{\ln(2)}{2}$.

Hérédité :

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on ait

$$\begin{aligned} (-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\ (-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)} &= (-1)^{n+1} I_{2n+2} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1} - I_{2n}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} + (-1)^n I_{2n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} + \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)+1} &= (-1)^{n+1} I_{2n+3} \\
&= (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+2} - I_{2n+1}\right) \quad \text{d'après la question 2)} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} + (-1)^n I_{2n+1} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} \quad \text{d'après l'hyp. de récurrence} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est initialisée pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(-1)^n I_{2n} &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \\
(-1)^n I_{2n+1} &= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}
\end{aligned}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$.

- $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car le membre droit est un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur strictement positif.
- $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \dfrac{x^n}{1+x^2}$ car $\dfrac{x^n}{1+x^2} \geqslant 0$ d'après le point précédent.
- $1 + x^2 \geqslant 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ dont on déduit que $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ car $x^n \geqslant 0$.

Donc pour tout entier positif n et tout $x \in [0; 1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$$

5) En intégrant l'encadrement de la question précédente, valable pour tout $x \in [0; 1]$, sur le segment $[0; 1]$, on obtient, pour tout entier positif n :
$\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$
d'où, pour tout entier positif n,
$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante, positive, donc convergente, et en utilisant le théorème des gendarmes appliqué à l'inégalité précédente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

6) D'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1} = (-1)^n I_{2n} - \frac{\pi}{4}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = -(-1)^n I_{2n} + \frac{\pi}{4}$
Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

7) De même, d'après la question 3) : pour tout entier positif n,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k} = (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\ln(2)}{2}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = -2(-1)^n I_{2n+1} + 2\frac{\ln(2)}{2}$
Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Exercice 3.

- Partie A -

1) $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = f(-x) + f(x) = f(x) + f(-x) = g(x)$. Donc g est paire.

2) g est deux fois dérivable comme somme et composée de fonctions deux fois dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) - f'(-x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = f''(x) + f''(-x)$
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) + g(x) &= f''(x) + f''(-x) + f(x) + f(-x)\\ &= f''(x) + f(-x) + f''(-x) + f(x)\\ &= x + (-x) = 0\end{aligned}$$
car f solution de (F).
Donc g est solution de $(G) : u'' + u = 0$.

3) (G) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, sa résolution conduit à : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = A\cos x + B\sin x, (A; B) \in \mathbb{R}^2$.

4) g est paire, donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = A\cos x - B\sin x = g(x) = A\cos x + B\sin x$. En particulier, l'égalité précédente est valable pour $x = \frac{\pi}{2}$ donc $-B = B \Rightarrow B = 0$.
Finalement, $g(x) = A\cos(x), A \in \mathbb{R}$.

- Partie B -

1) $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = f(-x) - f(x) = -h(x)$ donc h est impaire et deux fois dérivables comme différence et composée de fonctions deux fois dérivables.

2) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) + f'(-x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = f''(x) - f''(-x)$
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) - h(x) &= f''(x) - f''(-x) - f(x) + f(-x)\\ &= f''(x) + f(-x) - (f''(-x) + f(x))\\ &= x - (-x) = 2x\end{aligned}$$
Donc h est solution de $(H) : y'' - y = 2x$.

3) (H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on remarque que $x \mapsto -2x$ est une solution particulière de (H) ce qui conduit à
$h \in \{x \mapsto Ce^x + De^{-x} - 2x, (C; D) \in \mathbb{R}^2\}$
Or h est impaire, donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(-x) = Ce^{-x} + De^x + 2x = -h(x) = -Ce^x - De^{-x} + 2x$, c'est-à-dire après simplifications :
$\forall x \in \mathbb{R}, (C + D)\operatorname{ch}(x) = 0$ d'où $C = -D$ car $\operatorname{ch} > 0$. On a donc
$h : x \mapsto Ce^x - Ce^{-x} - 2x = B\operatorname{sh}(x) - 2x$ en posant $B = 2C$.
Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = B\operatorname{sh}(x) - 2x, B \in \mathbb{R}$.

- Partie C -

Si f est solution de (F) alors
$\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x) + f(-x) = A\cos x$ et $h(x) = f(x) - f(-x) = B\operatorname{sh} x - 2x$.
Donc si f est solution de (F), alors
$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = g(x) + h(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sh}(x) - 2x$.
On en déduit que si f est solution de (F), alors f est de la forme
$x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\operatorname{sh}(x) - x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions de cette forme sont effectivement solutions de (F).
Donc l'ensemble des solutions de (F) est

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\operatorname{sh}(x) - x, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$