Correction DS n°5

Exercice 1.

1) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment : on peut donc affirmer qu'il existe deux réels $m \leqslant M$ tels que $I = [m; M]$.

2) On suppose que $[m; M] \subset [0; 1]$.
Il existe donc $a \in [0; 1]$ et $b \in [0; 1]$ tels que $f(a) = m$, $f(b) = M$ et $0 \leqslant m \leqslant M \leqslant 1$.
Soit $g : x \in [0; 1] \mapsto f(x) - x$.
$g(0) = f(0) \geqslant m \geqslant 0$.
$g(1) = f(1) - 1 \leqslant M - 1 \leqslant 0$.
De plus g est continue : donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[0; 1]$: autrement dit,

$$\exists c \in [0; 1], f(c) = c$$

Exercice 2.

1) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$: par définition,

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{1 \times 2 \times ... \times k} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)}{k!}.$$

2) $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1.$
$\binom{\frac{-1}{2}}{1} = \frac{-1}{2}.$
$\binom{\frac{-1}{2}}{2} = \frac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2}}{2} = \frac{3}{8}.$
$\binom{\frac{-1}{2}}{3} = \frac{\frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2} \times \frac{-5}{2}}{6} = \frac{-5}{16}.$

3) Montrons par récurrence que $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$.

Initialisation : pour $k = 0$, $(-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} = 1$ et $\binom{\frac{-1}{2}}{0} = 1$.

Hérédité : supposons que pour k entier donné, $\binom{\frac{-1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k+1 \end{pmatrix} &= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{(k+1)!} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}\left(\frac{-1}{2}-j\right)}{k!} \times \frac{\frac{-1}{2}-k}{k+1} \\
&= (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{-(2k+1)}{2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} \times \frac{(2k+1)(2k+2)}{2(k+1)\times 2(k+1)} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{(2k+2)!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : la propriété est initialisée au rang 0, héréditaire à partir de ce rang, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \dfrac{(2k)!}{4^k(k!)^2}$.

4) $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2} u^k + \underset{u\to 0}{o}(u^n)$.

5) $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1;1[$ donc en posant $u = -x^2$ dans le développement limité précédent, et en remarquant que $\text{Arcsin}(0) = 0$, on a :

$$\text{Arcsin}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

6) De même qu'à la question précédente, en remarquant que $\text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Exercice 3.

1) Soit $P \in E_n$. P est donc un polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et peut s'écrire :

$$P = a_{n+1}X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

De plus $P(0) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k 0^k = a_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
\phi_n(P) &= P(X+1) - P \\
&= a_{n+1}(X+1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k (X+1)^k - a_{n+1}X^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k X^k \\
&= a_{n+1}X^{n+1} - a_{n+1}X^{n+1} + a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} X^k + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[(X+1)^k - X^k\right] \\
&= a_{n+1}\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} X^k + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[(X+1)^k - X^k\right]
\end{aligned}$$

$\phi_n(P)$ est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à n : ϕ_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, soient P, Q deux polynômes de E_n, λ, μ deux réels.
$\phi_n(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(X+1) - \lambda P - \mu Q = \lambda\big(P(X+1) - P\big) + \mu\big(Q(X+1) - Q\big)$.
Donc ϕ_n est linéaire :

$$\phi_n \in \mathcal{L}\left(E_n, \mathbb{R}_n[X]\right)$$

2) $P_1 = X$
$P_2 = X(X-1)$
$P_3 = X(X-1)(X-2)$

3) Par définition $\deg P_k = k$. Donc les polynômes P_k, pour $k \in [\![1; n+1]\!]$, appartiennent tous à $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Il suffit donc de vérifier que $P_k(0) = 0$.
Or, comme $k \geqslant 1$, le produit $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$ définissant P_k contient au moins un facteur : $P_k = X\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(X-i)$.
Donc, pour tout $k \in [\![1; n+1]\!]$, $P_k(0) = 0$.
En conséquence, la famille $\mathcal{B}_n$ est une famille de polynômes de E_n.

4) La famille $\mathcal{B}_n$ est échelonnée en degrés et ne contient pas le polynôme nul. Elle est donc libre.
De plus, $\dim E_n \leqslant n+1$ car E_n est strictement inclus dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui est de dimension $n+2$.
Donc $\mathcal{B}_n$ est une famille libre de $n+1$ polynômes dans un espace de dimension inférieure ou égale à $n+1$: c'est donc une base de E_n - on peut de plus affirmer, de ce fait, que $\dim E_n = n+1$.

5) E_n et $\mathbb{R}_n[X]$ sont de même dimension. Pour montrer que ϕ_n est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est injective.
On pourrait le faire en calculant le noyau de ϕ_n.
Ou remarquer que $\phi_n(X^k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} X^i$.
La famille $(X; X^2; ...; X^{n+1})$ est une base de E_n puisqu'elle est libre et comporte $n+1 = \dim E_n$ vecteurs.
Or son image est une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$, échelonnée en degrés, donc libre.
Ainsi, l'image par ϕ_n d'une base de E_n est une base de $\mathbb{R}_n[X]$: ϕ_n est donc un isomorphisme.

6) Soit $k \in [\![1; n]\!]$:

$$
\begin{aligned}
\phi_n(P_{k+1}) &= \prod_{i=0}^{k}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k}(X-i) \\
&= \prod_{i=0}^{k}(X-(i-1)) - \prod_{i=0}^{k}(X-i) \\
&= \prod_{i=-1}^{k-1}(X-i) - \prod_{i=0}^{k}(X-i) \\
&= (X+1-(X-k))\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\
&= (k+1)\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) \\
&= (k+1)P_k
\end{aligned}
$$

7)

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} P_k(i) &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\phi_n(P_{k+1})(i) \\
&= \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}P_{k+1}(i+1) - P_{k+1}(i) \\
&= \frac{P_{k+1}(n+1) - P_{k+1}(1)}{k+1}
\end{aligned}
$$

8)

$$
\begin{aligned}
X^3 &= X(X-1+1)(X-2+2) \\
&= X(X-1)(X-2) + X\big(2(X-1)+(X-2)+2\big) \\
&= P_3 + 2X(X-1) + X^2 \\
&= P_3 + 2P_2 + X(X-1+1) \\
&= P_3 + 2P_2 + P_2 + P_1 \\
&= P_3 + 3P_2 + P_1
\end{aligned}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \sum_{i=1}^{n} P_3(i) + 3P_2(i) + P_1(i) \\
&= \frac{P_4(n+1)-P_4(1)}{4} + 3\frac{P_3(n+1)-P_3(1)}{3} + \frac{P_2(n+1)-P_2(1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2) + 4(n+1)n(n-1) + 2(n+1)n}{4} \\
&= n(n+1)\frac{n^2-3n+2+4n-4+2}{4} \\
&= n(n+1)\frac{n^2+n}{4} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$