et 1, donc ne s'annule pas.

⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. Mais $f(0) \neq f(1)$ et $f' = 1$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

Ex. 17.10 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-3)(x-1)x(x+2)(x+4)$. Montrer que f' possède quatre racines distinctes.

Cor. 17.10

On utilise le théorème de Rolle sur les segments $[-4;-2]$, $[-2;0]$, $[0;1]$ et $[1;3]$. f s'annulant aux bornes de chacun de ces intervalles et étant dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, f' s'annule sur $]-4;-2[$, $]-2;0[$, $]0;1[$ et $]1;3[$ et possède donc quatre racines distinctes.

Ex. 17.11 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2.$$

Cor. 17.11

Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + f'(x)(b-x) + A(b-x)^2$ où $A \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $g(b) = g(a)$. L'application g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Ainsi $g'(c) = (f''(c) - 2A)(b-c) = 0$ équivaut à $A = \frac{f''(c)}{2}$ puisque $b - c \neq 0$. L'égalité $g(b) = g(a)$ donne la formule

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2.$$

IV.3. Théorème des accroissements finis

Théorème 17.29 (Théorème des accroissements finis)

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration

Le théorème est illustré par la figure 17.2. La fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On a $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui s'écrit aussi $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Théorème 17.30 (Utilisation : primitivation d'un développement limité)

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

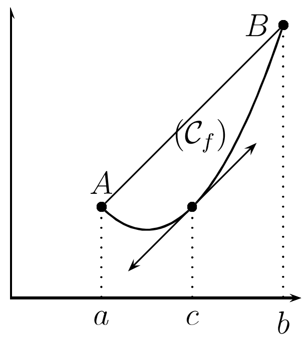

FIGURE 17.2 – Théorème des accroissements finis

Démonstration

$f'(x) = P(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = Q'(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ d'où $f'(x) - Q'(x) = x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.
En utilisant le théorème des accroissements finis sur le segment $[0; x]$ (ou sur le segment $[x; 0]$ si x est négatif), il existe $\theta \in]0; 1[$ tel que

$$f(x) - Q(x) - f(0) + Q(0) = x \times \theta^n x^n \epsilon(\theta x)$$

Or $Q(0) = 0$ donc

$$f(x) = f(0) + Q(x) + x^{n+1}\epsilon_1(x) \quad \text{où } \lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$$

Remarque

L'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point $C(c, f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Ex. 17.12 Établir que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Cor. 17.12

La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $x > 0$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, x + 1]$. Il existe $c \in]x, x + 1[$ tel que $\ln(x + 1) - \ln(x) = \frac{1}{c}(x+1-x) = \frac{1}{c}$. Comme $0 < x < c < x+1$, on a en prenant l'inverse $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. La double inégalité $\frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$ s'en déduit. Il est important de savoir qu'il existe c dans l'ouvert $]x, x + 1[$ pour obtenir des inégalités strictes.

Corollaire 17.31 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)

Si l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Comme $b - a > 0$, $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ implique $m(b - a) \leqslant f'(c)(b - a) \leqslant M(b - a)$.

Ex. 17.13 Donner une valeur approchée rationnelle de $\sqrt[4]{80}$ et majorer l'erreur commise.

Cor. 17.13

$a = \sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{81-1} = 3\sqrt[4]{1-\frac{1}{81}}$. Or $f : x \mapsto \sqrt[4]{1-x}$ est dérivable sur $\left[0; \frac{1}{81}\right]$ et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-1}{4(1-x)^{\frac{3}{4}}}$ qui est négative et décroissante sur cet intervalle. Pour $x \in \left[0; \frac{1}{81}\right]$, $\frac{-1}{4} \geq f'(x) \geq \frac{-27}{4a^3}$. On en déduit, en utilisant l'inégalité des accroissements finis (version réelle), que $\frac{-3}{4\times 81} \geq a-3 \geq \frac{-1}{4a^3}$. On obtient donc pour a la valeur approchée $a \approx 3 - \frac{1}{4\times 27} = \dfrac{323}{108}$. Cette valeur approchée est une valeur par excès, à la précision de
$\frac{1}{4a^3} - \frac{3}{4\times 81} = \frac{a}{320} - \frac{1}{4\times 27} \leq \frac{323}{320\times 108} - \frac{320}{108\times 320} \leq 10^{-4}$.

IV.4. Variation, extremums et dérivabilité

Proposition 17.32 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. La fonction f est constante sur I ***si et seulement si*** sa dérivée f' est nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

La condition est clairement nécessaire, on montre qu'elle est suffisante.
On suppose que $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$. Soit x et y dans I avec $x < y$. Comme f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, on applique le théorème des accroissements finis à f sur le segment $[x, y]$. Il existe donc $c \in]x, y[\subset \overset{\circ}{I}$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, ce qui implique que $f(x) = f(y)$ car $f'(c) = 0$.

Ex. 17.14 Soit $g : x \mapsto \text{Arccos}\,(2x^2 - 1)$.

1) Ensemble de définition et continuité de g.
2) Ensemble de dérivabilité de g.
3) Calcul de g'.
4) Simplifier, pour $x \in [-\pi; \pi]$, l'expression $g(\cos(x))$.

Cor. 17.14

1) $g(x)$ est définie si et seulement si $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1$.
   Or $-1 \leqslant 2x^2 - 1 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2x^2 \leqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1$.
   Donc g est définie sur $[-1; 1]$.
   De plus, sur cet intervalle, c'est une fonction continue comme composée de deux fonctions continues.
2) g est dérivable si et seulement si $-1 < 2x^2 - 1 < 1$.

En reprenant les calculs de la question précédente, on obtient donc que g est dérivable si et seulement si $0 < x^2 < 1$, c'est-à-dire sur $]-1;0[\cup]0;1[$.

3) $\forall x \in]-1;0[\cup]0;1[$, $g'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2-4x^4}}$.

   Donc $g'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}} = \dfrac{2x}{|x| \times \sqrt{1-x^2}}$.

   Donc, si $x > 0$, $g' = 2\,\mathrm{Arccos}'$

   et, si $x < 0$, $g' = -2\,\mathrm{Arccos}'$

4) Soit $x \in [-\pi;\pi]$.

   $g(\cos(x)) = \mathrm{Arccos}\left(2\cos^2(x) - 1\right) = \mathrm{Arccos}\big(\cos(2x)\big)$.

   Or $\mathrm{Arccos}(cos(u)) = u$ ***si et seulement si*** $u \in [0;\pi]$**.**

   Donc $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], g(x) = 2x$.

   Sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$ donc $0 \leqslant 2\pi - 2x \leqslant \pi$.

   Donc $g(x) = \mathrm{Arccos}\big(\cos(2x)\big) = \mathrm{Arccos}\big(\cos(-2x)\big) = \mathrm{Arccos}\big(\cos(2\pi-2x)\big) = 2\pi - 2x$ par parité et périodicité.

   On démontre de même que :

   Sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, $g(x) = -2x$.

   Sur $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = 2x + 2\pi$.

Proposition 17.33 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

- Si $f' \geqslant 0$ sur $\mathring{I}$, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur $\mathring{I}$, alors f est décroissante sur I.

Démonstration

Reprendre exactement la démonstration précédente avec la différence que $f'(c) \geqslant 0$ dans le premier cas et $f'(c) \leqslant 0$ dans le deuxième.

Voici un corollaire qui complète la proposition 17.27.

Proposition 17.34 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point intérieur à I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Démonstration

On considère $\alpha > 0$, tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset I$ et par exemple que $f' \leqslant 0$ sur $]a-\alpha, a]$ et $f' \geqslant 0$ sur $[a, a+\alpha[$. L'application f est donc croissante sur $]a-\alpha, a]$ et décroissante sur $[a, a+\alpha[$, ceci prouve que $f(a)$ est le maximum de f restreinte à l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$. Si l'on suppose l'inverse sur le signe de la dérivée, on obtient que $f(a)$ est un minimum local.

Ex. 17.15 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geqslant x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 17.15

L'inégalité précédente est équivalente à $x\ln a \geqslant a\ln x$ puisque la fonction ln est croissante, ou aussi à $\frac{\ln a}{a} \geqslant \frac{\ln x}{x}$. Il s'agit donc de trouver, s'il existe, le maximum de la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Cette fonction est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ est nul seulement pour $x = e$. On a $f' > 0$ sur $]0,e[$, $f' < 0$ sur $]e,+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi, f admet un unique maximum, obtenu pour $a = e$.

On en déduit que $e^\pi \geqslant \pi^e$. L'inégalité est même stricte puisque $\pi \neq e$ et que le maximum de f est unique.

Proposition 17.35 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec f' de signe constant sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Supposons f croissante la démonstration étant similaire dans le cas décroissant.

Si f est strictement croissante, alors f n'est constante sur aucun intervalle ouvert non vide, donc sa dérivée n'est pas nulle sur un tel intervalle. On établit la réciproque par contraposée. Si f n'est pas strictement croissante, il existe deux points x et y dans I tels que $x < y$ et $f(y) \leqslant f(x)$. La restriction de f à $[x,y]$ est donc constante puisque f est croissante. La dérivée de f est alors nulle sur l'intervalle ouvert non vide $]x,y[$.

Ex. 17.16 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.16

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \sin x \geqslant 0$, donc f est croissante. Par ailleurs, $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide, f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.17 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$.

Cor. 17.17

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ dont le signe paraît difficile à étudier. Étudions les variations de f'.

$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x \geqslant 0$ et f'' s'annule seulement pour $x = 0$, donc f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f'(0) = 0$ donc f' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$.

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

IV.5. Limite de la dérivée

Proposition 17.36 (Limite de la dérivée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et si $f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration

Soit x un point de $I \backslash \{a\}$. On peut appliquer le théorème des accroissements finis entre a et x puisque f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. Il existe donc $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Par encadrement ($a < c_x < x$), $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$.
D'après le théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité ***lorsque sa dérivée possède une limite en ce point***. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

Ex. 17.18 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.18

1) Par composition des limites, $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est prolongeable par continuité par 0 en 0.
2) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée. De plus $\forall x \neq 0, f'(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ et $f'(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée (en écrivant $u = \dfrac{1}{x^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ si ce n'est pas clair). Donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 de dérivée 0.
3) La question précédente permet d'affirmer immédiatement que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$... on recommence !
$\tilde{f}'$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée
$\tilde{f}''(x) = \dfrac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - \dfrac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}(2 - 3x^2)}{x^6}$ qui tend à nouveau vers 0 en 0 par croissance comparée. Donc $\tilde{f}'$ est dérivable en 0, de dérivée continue, donc $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur