Maths - Feuille d'exos n° 17

Dérivabilité

I. Dérivabilité

Ex. 17.1 (Cor.) Déterminer $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1}$.

Ex. 17.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la classe de la fonction f définie par $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in [-1;1] & \mapsto & (1-x^2)^n \\ x \notin [-1;1] & \mapsto & 0 \end{cases}$

Ex. 17.3 (Cor.) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$.

a. Calculer $f^{(n)}(x)$.

b. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Ex. 17.4 ***Arguments des sinus et cosinus hyperboliques***

a. Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{ch} : [0;+\infty[\to [1;+\infty[$ sont bijectives.
On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[, \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\, x) = \sqrt{x^2-1}$.

d. Calculer (en précisant les conditions d'existence) $\mathrm{Argsh}'(x)$ et $\mathrm{Argch}'(x)$.

e. Faire le même travail pour la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Montrer notamment que lorsqu'elle est définie $\mathrm{Argth}\, x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

II. Éléments de calcul différentiel

Ex. 17.5 Trouver les extrema des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ sur $[3;+\infty[$
- $g : x \mapsto (x^2-3x)\, e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $h : x \mapsto (x^2-3x)\, e^x$ sur $[1;2]$
- $k : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ sur $\mathcal{D}_k$

Ex. 17.6 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique qui admet n zéros sur $[0;1[$.
Montrer que f' admet au moins n zéros sur $[0;1[$.

Ex. 17.7 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que f définie par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Ex. 17.8 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x)$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.9

a. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$.
Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

b. Application : soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et $\forall x \in]a;b[, |f'(x)| \leq g'(x)$.
Montrer que $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$.

Ex. 17.10 Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$.

a. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 1$.

b. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel g est croissante.

III. Divers

Ex. 17.11 (Cor.) ***Méthode de Newton***
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f' est à signe constant et que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x coupe l'axe des abscisses en un point dont on précisera l'abscisse $X(x)$.

c. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = X(u_n)$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
Montrer que la suite u est bien définie et est monotone à partir du second terme.

d. En déduire les comportements asymptotiques possibles de la suite u. Préciser sa limite.

Ex. 17.12 ***Règle de l'Hospital*** Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

Ex. 17.13 Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex. 17.14 (Cor.) [**] On définit les fonctions th, Argsh, Argch et Argth de la même façon qu'à l'exercice 17.4 dont les résultats peuvent être admis ici.
Soient $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et Gd la fonction définie par

$$\mathrm{Gd} : \left\{ \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{array} \right. .$$

a. Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \operatorname{Argsh}(\tan x) = \operatorname{Argth}(\sin x) = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

c. Calculer Gd' et tracer l'allure de la représentation graphique de Gd.

d. Justifier l'existence de Gd^{-1} et montrer que sur son ensemble de définition $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th} x)$. Calculer la dérivée de Gd^{-1}.

Corrections

Cor. 17.1 : À l'aide de DL : $x = e(1+h)$ où $h \underset{x\to e}{\longrightarrow} 0$.
$\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e(1+h)} - \sqrt{e} = \sqrt{e}(h/2 + o(h))$.
$\ln x - 1 = \ln(e) + \ln(1+h) - 1 = h + o(h)$.
Donc $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x} - e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1} = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

Cor. 17.3 :

a. On pose $g(x) = (x-a)^n$ et $h(x) = (x-b)^n$.
$g^{(k)}(x) = n(n-1)...(n-k+1)(x-a)^{n-k} = \dfrac{n!(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}$.
En utilisant la formule de Leibniz, on obtient :
$f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}(x-a)^{n-k}(x-b)^k$.

b. En prenant $a = b$, on obtient ainsi deux expressions de $f^{(n)}$:
$f^{(n)}(x) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!}\right](x-a)^n$ et
$f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!n!}(x-a)^n$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Cor. 17.11 :

a. f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue. Or f' ne s'annule pas, donc f' est de signe constant.
f est donc strictement monotone et injective.
Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.

b. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Comme f' ne s'annule pas, la tangente coupe l'axe des abscisses au point (d'ordonnée 0...) d'abscisse :

$$X(x_0) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

c. La fonction $F : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Donc la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$ est bien définie ($\mathbb{R}$ est un intervalle stable par F).
On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
Supposons, par exemple, $f'' \geqslant 0$ et $f' > 0$ (les autres cas se traitent de même).
Notamment, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $f(u_0) = f(0) < 0$, alors $u_1 = u_0 - \dfrac{f(u_0)}{f'(u_0)} = \dfrac{-f(0)}{f'(0)} > 0$.
De plus, f' est croissante (car $f'' \geqslant 0$). Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis,
$$f(u_1) - f(u_0) \geqslant (u_1 - u_0) f'(u_0)$$
On en déduit que $f(u_1) \geqslant f(0) + \dfrac{-f(0)}{f'(0)} \times f'(u_0) = 0$.
Notamment, f étant continue et strictement croissante, $\exists! l \in \mathbb{R}, f(l) = 0$.
Enfin, on vérifie que $I = [l; +\infty[$ est stable par F puisque $F(l) = l$ et $F'(x) = \dfrac{f(x) f''(x)}{f'^2(x)} > 0$ pour $x \in]l; +\infty[$.
Donc à partir du rang 1, $u_n \geqslant l$ et u est monotone.
Enfin, $u_2 = u_1 - \dfrac{f(u_1)}{f'(u_1)} \leqslant u_1$, donc u est décroissante à partir du rang 1.
- Si $f(u_0) \geqslant 0$, on étudie deux cas : 1er cas $f > 0$ ne s'annule jamais, 2ème cas f s'annule en $l \in \mathbb{R}$ unique.
Le deuxième cas est similaire à ce que nous venons de faire, le premier cas est encore plus simple puisqu'on obtient directement pour tout réel x, $F \leqslant x$.

d. La suite u est monotone à partir du rang d'après la question précédente.
Donc, elle est soit bornée et convergente, soit non bornée et divergente vers $\pm\infty$.
Plus précisément, dans le cas convergent, F étant continue, u converge vers une solution de $F(x) = 0$, c'est-à-dire vers l'unique solution de $f(x) = 0$.

Cor. 17.14 :

a. $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.
Par composition, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

b. $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.
On obtient immédiatement la dernière relation en écrivant
$\operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\ln\sqrt{\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\operatorname{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. De plus
$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$ ce qui conduit à la première égalité.
Sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$.
D'où : $\operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{1 + \tan^2(x)}\right) = \operatorname{Argsh}(\tan x)$ et
$\operatorname{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x) + 1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}\right) = \operatorname{Argth}(\sin x)$.

c. $\forall x \in I, \operatorname{Gd}'(x) = (\operatorname{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

d. $\operatorname{Gd}'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{Gd}^{-1})' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}}$