

Espaces vectoriels

I. Définition, sous-espaces vectoriels

Ex. 11.1 (Cor.) On considère $F = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
 Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, mais n'est pas un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Ex. 11.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

- 1) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
- 2) $\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0\}$
- 3) $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$
- 4) $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
- 5) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$

Ex. 11.3 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$ et on définit $F = \text{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \text{Vect}((0; 1; 1))$.

- Déterminer $F \cap G$.
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Ex. 11.4 Soit $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère le sous-espace vectoriel de E défini par

$$H = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\} \text{ (voir exercice 11.2).}$$

Trouver un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ex. 11.5 (Cor.) Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F .
 Montrer que $E = F' \oplus G$.

Ex. 11.6 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que A et B sont supplémentaires dans E et $A \subset C$.
 Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C .

Ex. 11.7 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de \mathbb{R}^3 .
 Montrer que $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \text{Vect}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 11.8 (Cor.) Soit \mathcal{U} l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de récurrence $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On note (E_c) l'équation caractéristique $z^3 - az^2 - bz - c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et on suppose que (E_c) possède trois racines distinctes z_1, z_2 et z_3 .

- a. Montrer que \mathcal{U} est un espace vectoriel.
- b. Montrer que $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ z_3^n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}; \begin{pmatrix} z_2^n \\ z_3^n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}\right) \subset \mathcal{U}$.

II. Applications linéaires

Ex. 11.9

a. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

- $f : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x - 2y + 3z \in \mathbb{R}$
- $g : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y; 1) \in \mathbb{R}^2$
- $h : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; x + y) \in \mathbb{R}^2$

b. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires précédentes.

Ex. 11.10 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

- (1) $f \mapsto f(0)$
- (2) $f \mapsto f(1) - 1$
- (3) $f \mapsto f''(3)$
- (4) $f \mapsto (f'(2))^2$
- (5) $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$.

Ex. 11.11 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et

$$\Phi : \begin{cases} E \times E \rightarrow E \times E \\ (x; y) \mapsto (x + y; x + f(x + y)) \end{cases}$$

Montrer que Φ est un automorphisme de $E \times E$.

Ex. 11.12

Ex. 11.12. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Montrer qu'il existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x; y) = (ax + by; cx + dy)$.

b. Donner des énoncés similaires pour

- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ex. 11.13 Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u : E \rightarrow G, v : F \rightarrow G$ linéaires tels que $\text{Im } u \subset \text{Im } v$.

a. Montrer que si v est injective alors il existe une application linéaire $w : E \rightarrow F$ telle que $u = v \circ w$.

b. Montrer que si il existe un sous-espace vectoriel A de F tel que $\text{Ker } v \oplus A = F$, alors il existe une application linéaire $w : E \rightarrow F$ telle que $u = v \circ w$.

Ex. 11.14 (Cor.) E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{Id}_E$.
Montrer que $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

III. Applications linéaires particulières

Ex. 11.15 Montrer que $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto (x - 2y; -y) \end{cases}$ est une symétrie de \mathbb{R}^2 .

Préciser alors les espaces F et G tels que s soit la symétrie autour de F parallèlement à G .

Ex. 11.16 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$.
 $F = \text{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \text{Vect}((0; 1; 1))$ de sorte à ce que $E = F \oplus G$ (cf. exercice 11.3).

Déterminer l'expression de la symétrie autour de F parallèlement à G .

Ex. 11.17 Donner l'expression de la projection sur $\text{Vect}(-1; 1)$ parallèlement à $\text{Vect}(2; 1)$.

Ex. 11.18 Déterminer la nature des applications linéaires suivantes :

- a. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x; y - 2x) \in \mathbb{R}^2$
- b. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; y - x) \in \mathbb{R}^2$

Ex. 11.19 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition de E associée (voir exercice 11.14...).

Ex. 11.20 (Cor.) Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E .

a. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b. Montrer qu'on a alors $\text{ker}(p + q) = \text{ker } p \cap \text{ker } q$.

Corrections

Cor. 11.1 : En considérant \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, $F = \text{Vect}(1 + i)$ est donc un sous-espace vectoriel donc un espace vectoriel (sur \mathbb{R}).

En considérant \mathbb{C} comme un \mathbb{C} -espace vectoriel, le vecteur $1 + i$ par exemple est un vecteur de F mais $i(1 + i) = -1 + i \notin F$: donc F n'est pas un sous-espace vectoriel du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} .

Cor. 11.5 : F' est le supplémentaire de $F \cap G$ (qui est un s.e.v. de $(E, +, \cdot)$) dans F . Donc $F = F' \oplus (F \cap G)$.

Nous devons démontrer que $F' \cap G = \{0\}$ et $F' + G = E$.

- Soit $x \in F' \cap G$. $x \in F' \Rightarrow x \in F$ et $x \in G \Rightarrow x \in F \cap G$. Donc $x \in F'$ et $x \in (F \cap G)$ donc $x = 0$.

Donc $F' \cap G = \{0\}$.

- Soit $x \in E$. $E = F' + G$ donc $\exists (u, v) \in F' \times G, x = u + v$.

$u \in F'$ et $F = F' \oplus (F \cap G)$ donc $\exists (u_1, u_2) \in F' \times (F \cap G)$ tels que $u = u_1 + u_2$.

Donc $x = u_1 + u_2 + v$ avec $u_1 \in F'$ et $u_2 + v \in G$ (car G est un e.v.).

Donc $E = F' + G$.

Finalement on a démontré que $E = F' \oplus G$.

Cor. 11.7 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x; y) \in G$ tels que $u = x e_1 + y e_2$. Cherchons donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) = x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3x \\ \mu = 2x + y \\ \mu = 2x + y \\ x = \frac{\lambda + \mu}{3} \\ y = \frac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$: soit $e = x e_1 + y e_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1; 0; 0) + \mu(1; 1; 1) = x(3; 2; 2) + y(0; 1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 3x \\ \mu = 2x + y \\ \mu = 2x + y \\ \lambda = x - y \\ \mu = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow$$

Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.

Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 11.8 :

- Montrons que \mathcal{U} est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:
 - $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par définition ;
 - La suite nulle Z vérifie bien, pour tout entier n , $Z_{n+3} = 0 = a \times 0 + b \times 0 + c \times 0 = aZ_{n+2} + bZ_{n+1} + cZ_n$ donc la suite nulle appartient à \mathcal{U} ;
 - Soit u et v deux suites de \mathcal{U} et $(\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2$: montrons que $\lambda u + \mu v$ est une suite de \mathcal{U} . Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+3} + \mu v_{n+3} &= \lambda(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n) + \mu(av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n) \\ &= a(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) + b(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + c(\lambda u_n + \mu v_n) \end{aligned}$$
 donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{U}$.

Finalement, \mathcal{U} est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc un espace-vectoriel.

- Soit $z \in \{z_1; z_2; z_3\}$. Montrons que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à \mathcal{U} . Pour tout entier n :

$$z^{n+3} = z^n \times z^3 = z^n \times (az^2 + bz + c) \text{ car } z_1, z_2 \text{ et } z_3 \text{ sont solutions de (E}_c\text{).}$$

Donc $z^{n+3} = az^{n+2} + bz^{n+1} + cz^n$.

Donc les trois suites $(z_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent toutes à

\mathcal{U} .

Or \mathcal{U} est un espace vectoriel donc est stable par combinaisons linéaires.

$$\text{Donc } \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ z_3^n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}; \begin{pmatrix} z_1^n \\ z_2^n \\ z_3^n \end{pmatrix}_{n \in \mathbb{N}}\right) \subset \mathcal{U}.$$

Cor. 11.14 : Nous devons démontrer que $\text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$ et $\text{Ker } v + \text{Im } u = F$.

- Soit $y \in \text{Ker } v \cap \text{Im } u$. $y \in \text{Ker } v$ donc $v(y) = 0$. Or $y \in \text{Im } u$, donc $\exists x \in E, y = u(x)$.
On a alors, $v \circ u(x) = v(y) = 0 = x$ car $v \circ u = \text{Id}_E$. Donc $y = u(0) = 0$.
On a démontré que $\text{Ker } v \cap \text{Im } u = \{0\}$.
- Soit $y \in F$. Soit $y_1 = u(v(y)) = u \circ v(y)$.

ATTENTION : on sait que $v \circ u = \text{Id}_E$ mais on ne sait rien sur $u \circ v$. En particulier, il est tout à fait possible que $y_1 \neq y$.

Posons de plus, $y_2 = y - y_1$ de sorte à ce que $y = y_1 + y_2$.

Par définition, $y_1 = u(v(y)) \in \text{Im } u$. De plus, comme $v \circ u = \text{Id}_E$

$$v(y_2) = v(y - y_1) = v(y) - v(y_1) = v(y) - v \circ u \circ v(y) = v(y) - v(y) = 0$$

Donc $y_2 \in \text{Ker } v$.

On a démontré que $\text{Ker } v + \text{Im } u = F$.

Finalement, $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

Cor. 11.20 :

- $p + q$ est un projecteur si et seulement si $(p + q) \circ (p + q) = p + q$.

$$\text{Or } (p + q) \circ (p + q) = p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q = p + q + p \circ q + q \circ p.$$

Donc $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = -q \circ p$.

Sens direct : on compose à gauche par p :

$$p \circ q = -q \circ p \Rightarrow p \circ p \circ q = p \circ q = -p \circ q \circ p = -(-q \circ p) \circ p = q \circ p.$$

$$\text{Or } p \circ q = -q \circ p = q \circ p \Rightarrow q \circ p = 0 = p \circ q.$$

Réciproquement : $p \circ q = q \circ p = 0 \Rightarrow p \circ q = 0 = -0 = -q \circ p$.

On a donc bien $p + q$ est un projecteur de $E \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$.

- Soit $x \in \text{Ker}(p + q)$. Alors $p(x) + q(x) = 0$ donc $p(x) = -q(x)$. On compose par p :

$$p \circ p(x) = p(x) = -p \circ q(x) = 0. \text{ Donc } x \in \text{Ker } p.$$

De même en composant par q :

$$q \circ p(x) = 0 = -q \circ q(x) = -q(x). \text{ Donc } x \in \text{Ker } q.$$

Donc $x \in \text{Ker}(p + q) \Rightarrow x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Réciproquement, de façon évidente, si $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$, alors $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$.

Donc $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.