Exercice 14.22

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

3 avril 2020

Ex. 22 (Cor.) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{x + \frac{r}{x}}{2}$ et u la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$.

1) Montrer que $\left[\sqrt{r}; +\infty\right[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{r}$.
2) Montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $\left[\sqrt{r}; +\infty\right[$.
3) En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
4) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
5) Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

Cor. 22 :

1) f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.
$\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1 - \frac{r}{x^2}}{2} = \dfrac{x^2 - r}{2x^2}$.
Donc $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > r \Leftrightarrow (x > \sqrt{r} \quad \text{ou} \quad x < -\sqrt{r})$.
Sur $]0; \sqrt{r}]$, f est donc décroissante et f est croissante sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.
Or $f(\sqrt{r}) = \sqrt{r}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et f est continue, donc

$$f\left([\sqrt{r}; +\infty[\right) = [\sqrt{r}; +\infty[$$

De plus f passe par son minimum (sur $\mathbb{R}_+^*$) $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r}$. Donc $\forall x > 0, f(x) \geqslant \sqrt{r}$.
Donc $u_1 = f(u_0) \geqslant \sqrt{r}$, et $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{r}$.

2) Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.
$\forall x > 0, g(x) = \dfrac{\frac{r}{x} - x}{2} = \dfrac{r - x^2}{2x}$ est négatif sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.

3) $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$.
Or pour $n \geqslant 1$, $u_n \in [\sqrt{r}; +\infty[$ donc $g(u_n) \leqslant 0$.
Donc u est décroissante à partir du rang 1.
De plus $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant \sqrt{r}$: u est décroissante et minorée à partir du rang 1, donc elle converge.

4) Soit $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
f est continue, donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$.
Or $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$.
Donc $f(l) = l$: l est un point fixe de f.
Or l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = r$ possède une unique solution positive, c'est $\sqrt{r}$.
Donc $l = \sqrt{r}$.

5) Pour donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$, on calcule les termes de u - qui sont rationnels - jusqu'à obtenir une approximation suffisante.
$u_1 = \dfrac{3}{2}$.
$u_2 = \dfrac{17}{12}$.
$u_3 = \dfrac{577}{408}$ qui est déjà une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ à 2.10^{-6} près.
$u_4 = \dfrac{665857}{470832}$ est une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ qui convient puisqu'elle est non seulement valable à 10^{-6} près, mais en fait approxime $\sqrt{2}$ à 10^{-11} près.