Exercice 18.13

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

19 avril 2020

Ex. 14 (Cor.) Soient $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de la matrice $\left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$?

Cor. 14 : Soit $A = \left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.
Soient i et j deux entiers vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.
$(i+j+p)^2 = i^2 + 2\times i\times j + j^2 + 2(i+j)p + p^2 = (j^2+2jp+p^2) + i\times(2j+2p) + i^2$.
Notons $A_1, ..., A_j, ..., A_n$ les colonnes de A de sorte que $A = (A_1|...|A_n)$.
Notons $C_1 = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ la matrice à une colonne et n lignes composée de 1.
Notons $C_2 = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\n\end{pmatrix} = (i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $C_3 = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\n^2\end{pmatrix} = (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Le développement $(i+j+p)^2 = (j^2+2jp+p^2) + i\times(2j+2p) + i^2$ se réécrit pour les colonnes de A de la façon suivante :

$$A_j = \left(j^2+2jp+p^2\right)C_1 + (2j+2p)\,C_2 + C_3$$

Donc la famille $\mathcal{F} = (C_1; C_2; C_3)$ est une famille génératrice des colonnes de A, c'est donc une famille génératrice de $\operatorname{Im} A$.
Or il s'agit d'une famille libre (ce que nous savons car nous avons déjà traité le cas $n = 3$).
Donc

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} A = 3$$