Maths - Chapitre 7

Équations différentielles et calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques outils de résolution des équations différentielles. En commençant par la plus simple de toute : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que $F' = f$.

I. Programme officiel

Techniques fondamentales de calcul en analyse

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
C - Primitives et équations différentielles linéaires a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs réelles ou complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. $\leftrightarrows$ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ lorsque f est continue.	Le résultat est admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par partie d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Changement de variable : si ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\phi(I)$, alors pour tous a et b dans I, $$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$	On définit à cette occasion la classe $\mathcal{C}^1$. Application au calcul de primitives.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y'+a(x)y=b(x)$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où a est une fonction constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	$\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	$\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques RC, RL et de systèmes mécaniques linéaires.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y''+ay'+by=f(x)$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, $x \mapsto A\cos(\omega x)$, $x \mapsto A\sin(\omega x)$.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors-programme. $\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

II. Calcul pratique des intégrales et des primitives

Dans ce qui suit, I est un intervalle ***réel*** contenant une infinité de points.

II.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$

Définition 7.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^0$ ***sur*** I si f est continue sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^0(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et continue sur I.

II.2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 7.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I si f est dérivable sur I et si f' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^1(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^1(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et dérivable (donc continue) sur I ***et de dérivée*** f' ***continue sur*** I.

II.3. Intégrales et primitives

a) Primitivation « à vue »

On dit qu'on primitive ***« à vue »*** une fonction lorsque l'obtention d'une primitive se fait en n'utilisant que :

- les primitives des fonctions de référence ;
- le fait que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$, une primitive de $\lambda f' + \mu g'$ est $\lambda f + \mu g$;
- le fait qu'une primitive de $u' \times f' \circ u$ est $f \circ u$.

Ex. 7.1 Donner une primitive des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \qquad f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x) + 2\sin(2x) \qquad f_3 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$$

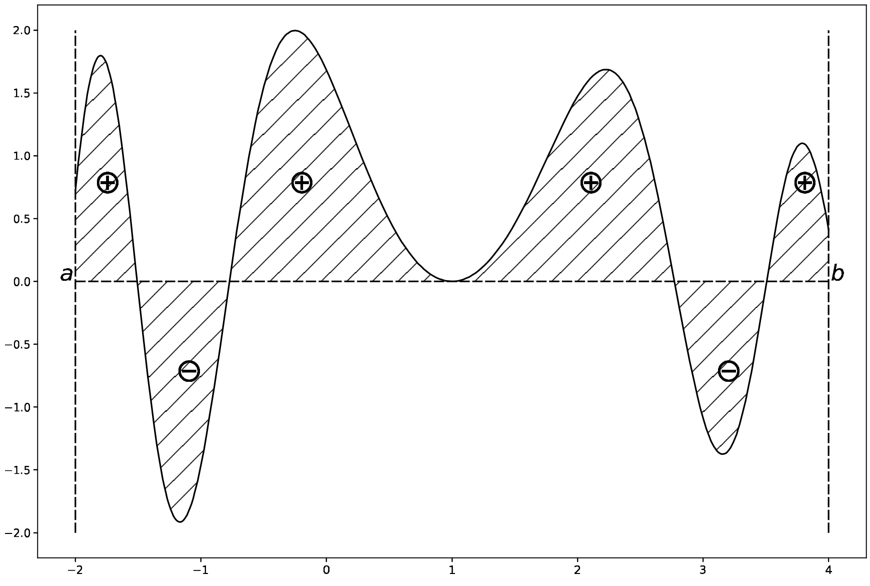
$$f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1+2x}{1+x^2} \qquad f_5 : x \in]-1; 1[\mapsto \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f_6 : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1+x^2)^3$$

b) Définition/interprétation d'une intégrale

Étant donnés :

- $a < b$ deux réels de l'intervalle I
- f une fonction continue sur I ***à valeurs réelles***

nous donnerons en fin d'année une ***définition*** de $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ qui permet d'interpréter sa valeur comme ***l'aire algébrique*** (c'est-à-dire pouvant être positive ou négative) de la portion du plan représentée ci-dessous (à condition que le repère soit orthonormé).



Si $b < a$***, on pose*** $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 7.2 Dans un repère orthonormé on donne les points $A(0;1)$, $B(3;2)$ et $C(4;0)$.
Calculer l'aire du triangle ABC.

c) Propriétés de l'intégrale

Étant donnés $a \in I, b \in I, f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C}), g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$:

- ***Linéarité*** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

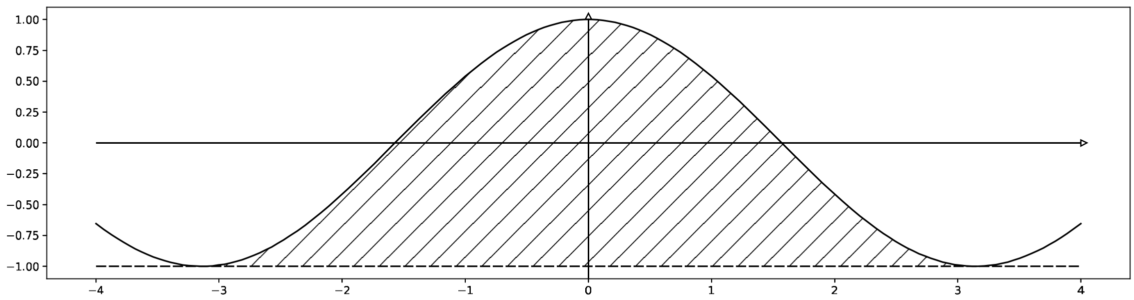
- ***Croissance*** :
  Si f et g sont ***à valeurs réelles***,
  si $a < b$,
  et si $\forall t \in [a;b], f(t) \leqslant g(t)$,

$$\text{alors } \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

- ***Relation de Chasles*** :

$$\forall (a;b;c) \in I^3 \text{ (sans hypothèse sur leur ordre)}, \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 7.3 On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, la fonction cos.
Que vaut l'aire hachurée ?



Ex. 7.4

1) Calculer $\mathcal{I} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \ln(n+1)$.

d) Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est une fonction continue sur I, alors d'après le théorème fondamental du calcul intégral (proposition 3.34 page 71), quel que soit $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f, donc une ***fonction de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I (puisque sa dérivée f est continue).

Méthode : Primitives et intégrales

- Si f est une fonction continue sur I dont ***on connaît une primitive*** F, alors pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- Si f est une fonction continue sur I dont ***on ne connaît pas de primitive***, alors pour $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ en est une.
  L'ensemble de toutes les primitives de f est obtenu en rajoutant à cette primitive particulière une constante (réelle ou complexe suivant les cas) quelconque.
  Les techniques de calcul d'intégrale que nous allons voir durant cette section peuvent alors ***parfois*** permettre d'obtenir une expression d'une primitive de f. Cependant, même lorsque le TFCI garantit l'existence de primitives, il est ***parfois impossible d'en obtenir une expression***.

Notation

On note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$. On a donc pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ de primitive F :

$$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Lorsqu'on cherche ***une primitive quelconque*** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on notera souvent

$x \in I \mapsto \int^x f(t)\mathrm{d}t$ une telle primitive. En utilisant la notation précédente, l'absence de borne inférieure dans l'intégrale s'interprète de la façon suivante :

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]^x = F(x)$$

Ex. 7.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Cor. 7.5

L'intégrande est continue donc l'intégrale de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. En dérivant cette intégrale, on a donc :
$\displaystyle\frac{\ln(x)}{1+x^2} - \left(\frac{-1}{x^2}\right)\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\ln(x)}{1+x^2} = 0.$
L'intégrale est donc constante, or sa valeur en $x = 1$ est nulle, donc pour tout réel x strictement positif, cette intégrale est nulle.

Ex. 7.6 Calculer $A(x) = \displaystyle\int_0^x \cos(xt)\mathrm{d}t$.
Indication : on distinguera les deux cas $x = 0$ et $x \neq 0$.

II.4. Intégration par partie

Proposition 7.3 (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(a; b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I donc $uv' + u'v$ est continue et ses primitives sur I sont, en vertu des propositions 3.25 et 3.34, les fonctions $uv + k$ où $k \in \mathbb{R}$. Donc, pour $(a; b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t) + u'(t)v(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b$.

Ex. 7.7 Trouver l'ensemble des primitives de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$.

Cor. 7.7

$\displaystyle\int_e^x \ln(t)\mathrm{d}t = [t\ln(t)]_e^x - \int_e^x \frac{t}{t}\mathrm{d}t = x\ln x - e - x + e = x(\ln x - 1)$. Les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc les fonctions de la forme $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x(\ln x - 1) + k \in \mathbb{R}$.

Ex. 7.8 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^x$.

Cor. 7.8

On intègre par parties : $\displaystyle\int^x te^t\mathrm{d}t = \left[te^t\right]^x - \int^x e^t\mathrm{d}t = (x-1)e^x$. L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^x$ est donc $\{x \mapsto (x-1)e^x + k, k \in \mathbb{R}\}$.

Ex. 7.9 (Cor.) Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$.

II.5. Changement de variable

Proposition 7.4 (Changement de variable)

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $J = \phi(I)$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f \circ \phi(t) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(\phi(t)\big) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

f est continue sur J donc, d'après la proposition 3.34, f possède une primitive F sur J et $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = F \circ \phi(b) - F \circ \phi(a)$ indépendamment de la primitive choisie.
Par ailleurs, la fonction $x \in I \mapsto F \circ \phi(x)$ est la composée de deux fonctions dérivables, donc est dérivable d'après la proposition 3.26, et $(F \circ \phi)' = f \circ \phi \times \phi'$ est produit et composée de fonctions continues donc est continue. On en déduit à nouveau que $\displaystyle\int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t = F \circ \phi(b) - F \circ \phi(a)$.

Méthode : Changement de variable dans une intégrale

En pratique, dans $\displaystyle\int_A^B f(u)\mathrm{d}u$, on effectue très souvent le changement de variables en utilisant une ***bijection*** $\phi : [a, b] \to [A, B]$. Cependant, la proposition 7.4 est valable sous la forme donnée y compris ***si ϕ n'est pas bijective***.

1) On pose $u = \phi(t)$ et on calcule $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
2) On calcule la bijection réciproque $t = \psi(u)$.
3) On remplace dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{u=A}^{u=B} f(u)\mathrm{d}u = \int_{t=\psi(A)}^{t=\psi(B)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\mathrm{d}t$.

On peut aussi poser $t = \psi(u)$ et adapter la méthode précédente.

Ex. 7.10 Calculer $L = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

Cor. 7.10

On reconnaît l'aire d'un demi-disque de rayon 1 : $L = \frac{\pi}{2}$. Pour le démontrer, on effectue le changement de variable $u = \cos(t)$, $-1 = \cos(\pi)$, $1 = \cos(0)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$ en remarquant que sur $[0, \pi]$, $\sqrt{1-u^2} = \sin(t)$. On remplace dans l'intégrale

$$L = -\int_{\pi}^{0} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t-\sin(t)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Ex. 7.11 Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

Cor. 7.11

$K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u \mathrm{d}u}{\cos^2 u}$. On effectue le changement de variable $t = \sin u$, d'où $\mathrm{d}t = \cos u \mathrm{d}u$. Par ailleurs, $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u = 1 - t^2$. On remplace dans l'intégrale

$$K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \left[\frac{\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Ex. 7.12 Calculer une primitive des fonctions $f : x \in]-1; 1[\mapsto \frac{1}{x^2-1}$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x^2+9}$ et $h : x \in]-1; +\infty[\mapsto \frac{1}{x^2+2x+1}$.

Cor. 7.12

La fonction est définie suivant la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$ sur $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, x_0[\cup]x_0, +\infty[$ ou $]-\infty, x_1[\cup]x_1, x_2[\cup]x_2, +\infty[$ avec $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On se place sur l'un des intervalles de l'ensemble de définition. On a alors

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}u}{au^2+bu+c} = \frac{1}{a}\int^x \frac{\mathrm{d}u}{\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}}$$

- si $\Delta < 0$, on pose $t = \frac{2au+b}{\sqrt{-\Delta}}$, d'où $u = \frac{\sqrt{-\Delta}t - b}{2a}$ et $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\mathrm{d}t$. On a alors

$$F(x) = \frac{4a}{-\Delta} \times \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int^{\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{2\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)}{\sqrt{-\Delta}}$$

- si $\Delta = 0$, on pose $t = u + \frac{b}{2a}$, d'où $u = t - \frac{b}{2a}$ et $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. On a alors

$$F(x) = \frac{1}{a}\int^{x+\frac{b}{2a}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{-2}{2ax+b}$$

- si $\Delta > 0$, $\frac{1}{\left(u+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{1}{(u-x_1)(u-x_2)} = \frac{1}{(x_1-x_2)(u-x_1)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(u-x_2)}$.

On a alors $F(x) = \frac{1}{a} \times \frac{\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|}{x_1 - x_2}$.

Méthode : Primitives des fonctions du type $x \mapsto \frac{\alpha}{ax^2+bx+c}$

Les trois ***méthodes*** utilisées pour l'obtention de primitives dans l'exercice 7.12 sont ***à connaître***. Voici un résumé de ces méthodes :

1) On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du dénominateur.
2) Suivant le signe de Δ, **sur chaque intervalle où la fonction est définie** :
   a) si $\Delta > 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.
   On écrit $I(x) = \frac{1}{a}\int^x \frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}dt$ puis on cherche $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \frac{A}{t-t_1} + \frac{B}{t-t_2}$ ce qui permet de calculer $I(x)$.
   b) si $\Delta = 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède une solution double $t_0 \in \mathbb{R}$.
   On écrit $I(x) = \frac{1}{a}\int^x \frac{1}{(t-t_0)^2}dt$ qui se calcule simplement :
   $I(x) = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{t-t_0}\right]^x = \frac{1}{a} \times \frac{1}{x-t_0}$
   c) si $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.
   On écrit $I(x) = \frac{1}{a}\int^x \frac{1}{(t+A)^2+B}dt$ pour éliminer le terme en t du dénominateur.
   Le dénominateur ne s'annulant pas, on a alors forcément $B > 0$ ce qui permet d'obtenir l'intégrale à l'aide de changement(s) de variable(s).
3) Si l'on souhaite obtenir **l'ensemble des primitives sur un intervalle où l'intégrande est définie**, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, toutes les primitives s'obtiennent à partir de celle calculée en rajoutant un terme constant.

Pour les fonctions du type $x \mapsto \frac{ux+v}{ax^2+bx+c}$, on élimine le terme ux du numérateur en faisant apparaître la dérivée du dénominateur (voir exercice suivant).

Ex. 7.13 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+4}$.

Cor. 7.13

$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x+1}{x^2+4} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+4}$.

Or $\frac{2x}{x^2+4}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$.

Le second terme a été abordé dans l'exercice 7.12 et s'intègre en $x \mapsto \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Finalement l'ensemble des primitives de $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+4}$ est $\left\{x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\ln(x^2+4) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\right\}$.

Ex. 7.14 (Cor.) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t = k$$

Ex. 7.15 (Cor.) Calculer $I(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{5t^2+2t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

Ex. 7.16 (Cor.) Calculer $J(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

II.6. Primitives usuelles

Primitives usuelles

Le tableau suivant donne les primitives à connaître. La colonne « Validité » indique les intervalles maximaux de validité de la primitive fournie. Lorsqu'on cherche une primitive sur une réunion d'intervalles, on doit a priori prendre ***des constantes d'intégration différentes sur chaque intervalle***. Le tableau peut aussi se lire « à l'envers » : pour chaque primitive donnée, la colonne de gauche fournit sa dérivée. Enfin, les primitives de tan s'obtiennent en écrivant $\tan = \frac{-\cos'}{\cos}$, celles de $\frac{1}{\sin(x)}$ ou $\frac{1}{\cos(x)}$ de la même manière que dans l'exercice 7.11 et celles des fonctions $x \mapsto \frac{1}{a^2 \pm x^2}$ à l'aide de l'exercice 7.12.
Lorsque ce n'est pas précisé, a ***est un réel strictement positif et*** k ***un entier relatif***.

Fonction	Primitive	Validité
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$x \mapsto x\ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{cx},\ c \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1,1[$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$

$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$

II.7. Primitives particulières

Méthode : Calcul des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

On écrit $e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx) = e^{(a+ib)x}$, dont on connaît les primitives. On passe ensuite à la partie réelle ou imaginaire suivant ce que l'on cherche.

Ex. 7.17 Calculer l'ensemble des primitives de $x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$.

Cor. 7.17

Une primitive de $x \mapsto e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \dfrac{e^{(1+i)x} - ie^{(1+i)x}}{2}$. Les primitives de $x \mapsto e^x\cos x$ sont donc les fonctions données pour $k \in \mathbb{C}$ par $x \mapsto \dfrac{e^x\cos x + e^x\sin x}{2} + k$ et celles de $x \mapsto e^x\sin x$ sont $x \mapsto \dfrac{e^x\sin x - e^x\cos x}{2} + k$. L'ensemble des primitives cherchées est donc $\{x \in \mathbb{R} \mapsto e^x\sin x + k, k \in \mathbb{C}\}$.

Méthode : Polynômes trigonométriques

Pour primitiver un polynôme trigonométrique (c'est-à-dire une somme d'expressions du type $\cos^n(x)\sin^p(x)$), on le ***linéarise***.

Ex. 7.18 Calculer l'ensemble des primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)$ et de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^3(x)$.

Cor. 7.18

Pour les primitives de f, on écrit
$F(x) = \displaystyle\int^x \frac{\cos(2t)+1}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]^x = \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$.
Donc l'ensemble des primitives de f est

$$\mathcal{S} = \left\{x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}, k \in \mathbb{R}\right\}$$

Pour g, on linéarise $\sin^3$.

III. Équations différentielles

III.1. Généralités

Définition 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{C}$ n fois dérivable de dérivées continues.
On appelle ***équation différentielle d'ordre*** n ***sur*** I une relation satisfaite pour tout $t \in I$ par $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$.

Parmi les équations différentielles que l'on rencontre en physique, on peut par exemple citer :

- Oscillateur harmonique : $y'' + \omega_0^2 y = 0$
- Pendule pesant : $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Ex. 7.19 (Cor.) La fonction tangente est solution sur $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre : $y' = 1 + y^2$.
Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle définies de I dans $\mathbb{R}$.

III.2. Équations différentielles linéaires

Définition 7.6

On dit qu'une équation différentielle est ***linéaire*** lorsqu'elle s'écrit

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ et b sont des fonctions continues définies sur I.
On dit qu'elle est ***à coefficients constants*** lorsque $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont des fonctions ***constantes***.
On dit qu'elle est ***homogène*** ou ***sans second membre*** lorsque $b = 0$. Sinon on dit qu'elle est ***avec second membre***.

Ex. 7.20 Expliciter la nature des équations différentielles suivantes :

- Oscillateur harmonique :...
- Pendule pesant :..
- $xy''' + 2y'' - y = \cos(x)$ est. ....

IV. Linéaires du premier ordre

IV.1. Sans second membre

Théorème 7.7

Étant donnée une fonction $a : I \to \mathbb{C}$ continue et $A : I \to \mathbb{C}$ l'une de ses primitives, l'équation $y' + a(t)y = 0$ a pour solutions $y : t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$ et il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $t_0 \in I, y(t_0) = k_0$ où $k_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration

Analyse

Soit y une solution de $y' + a(t)y = 0$ sur I et définissons la fonction $z : t \in I \mapsto ye^{A(t)}$. z est dérivable sur I comme produit et composée de fonctions qui le sont et

$z' = y'e^{A(t)} + ya(t)e^{A(t)} = 0$ donc $z = \lambda \in \mathbb{C}$ est une fonction constante.

Synthèse

Réciproquement, on vérifie aisément que $t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$ sont des solutions de l'équation différentielle donnée.

Concernant le second point, cherchons parmi les solutions celles qui vérifient pour $t_0 \in I$ et $k_0 \in \mathbb{C}$, $y(t_0) = k_0$. On remplace y par son expression et on obtient

$\lambda e^{-A(t_0)} = k_0 \Leftrightarrow \lambda = k_0 e^{A(t_0)}$. Il existe donc une unique solution vérifiant la condition initiale donnée, celle correspondant à la constante d'intégration $\lambda = k_0 e^{A(t_0)}$.

IV.2. Équations avec second membre

Théorème 7.8

Étant données deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues, l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ de l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Démonstration

Analyse

Soit y_1 et y_2 deux solutions de (E) et $z = y_2 - y_1$. z est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et $z' = y_2' - y_1' = b(t) - a(t)y_2 - b(t) + a(t)y_1 = -a(t)z$. Donc z est solution de l'équation différentielle homogène $(E') : z' + a(t)z = 0$.

Synthèse

Réciproquement, si y_0 est une solution de (E) et $z : t \in I \mapsto \lambda e^{-\int a(t)\mathrm{d}t}, \lambda \in \mathbb{C}$ la solution générale de (E') alors $y = y_0 + z$ est de classe $\mathcal{C}^1(I)$ et

$y' + a(t)y = y_0' + a(t)y_0 + z' + a(t)z = b(t)$ est solution de (E).

Ex. 7.21 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy' - 2y = 0$.
Résoudre la même équation sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire les solutions de $xy' - 2y = 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 7.21

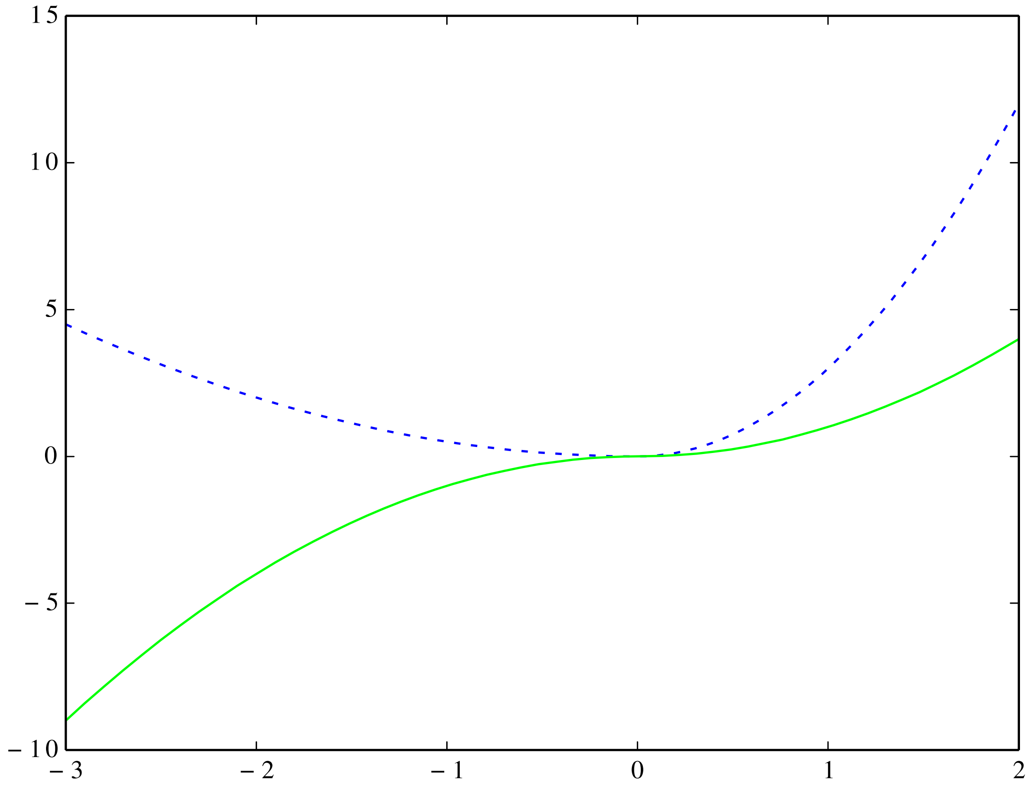
D'après le théorème précédent les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y' - \frac{2}{x}y = 0$ sont les fonctions $y = \lambda_1 e^{2\ln(x)} = \lambda_1 x^2, \lambda_1 \in \mathbb{R}$.

De même, les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de $y' - \frac{2}{x}y = 0$ sont les fonctions $y = \lambda_2 e^{2\ln(-x)} = \lambda_2 x^2, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Comme toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifient $y(0) = 0, y'(0) = 0$ on en déduit que les solutions de l'équation différentielle $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$f \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}_+ & \mapsto \quad \lambda_1 x^2 \\ x \in \mathbb{R}_- & \mapsto \quad \lambda_2 x^2 \end{cases}.$$

On dit qu'on a effectué un ***recollement en*** 0 des solutions de $xy' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.



Deux solutions : en pointillés, $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \frac{1}{2}$, en trait plein, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Méthode : Méthode de variation de la constante

Pour obtenir une solution particulière de l'équation (E) avec second membre, on résout d'abord l'équation homogène (E') associée dont la solution est de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$.
On recherche alors une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$: en remplaçant $y(t)$ dans (E), on obtient $\lambda'(t)$ et une solution particulière y_p de (E) après intégration.

Ex. 7.22 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E_1) : y' - \frac{2}{x}y = x^2$ puis $(E_2) : y' - \frac{2}{x}y = 1 - \ln(x)$.

Cor. 7.22

D'après l'exercice précédent les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y' - \frac{2}{x}y = 0$ sont les fonctions $y = \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de variation de la constante : soit $y = \lambda(x)x^2$ où $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Remplaçons dans (E_1) :
$\lambda' x^2 + 2x\lambda - 2x\lambda = x^2$ donc $\lambda(x) = x$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^3 + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
De même pour (E_2) :
$\lambda' x^2 + 2x\lambda - 2x\lambda = 1 - \ln(x)$ donc $\lambda' = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ et

$\lambda(x) = -\dfrac{1}{x} - \displaystyle\int^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x} + \left[\frac{\ln(t)}{t}\right]^x - \int^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\ln(x)}{x}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E_1) est $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln(x) + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

IV.3. Principe de superposition

Théorème 7.9 (Principe de superposition)

Étant données deux fonctions b_1 et b_2 continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,
si y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ sur I et
si y_2 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$ sur I,
alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$ sur I.

Démonstration

$y_1 + y_2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme somme de deux fonctions qui le sont et
$y_1' + y_2' + a(t)(y_1 + y_2) = y_1' + a(t)y_1 + y_2' + a(t)y_2 = b_1(t) + b_2(t)$.

Méthode : Principe de superposition

Le théorème précédent est utilisé de la façon suivante :

- lorsque le second membre $b(t)$ d'une équation différentielle est une somme de fonctions on peut tenter d'obtenir des solutions particulières associées à chacun de ses termes puis faire la somme des solutions obtenues pour avoir une solution particulière de l'équation d'origine ;
- dans certains cas au contraire, on peut tenter en ajoutant et retranchant une même expression au second membre de se ramener à des termes plus faciles à intégrer.

Ex. 7.23 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{2}{x}y = \ln(x)$.

Cor. 7.23

D'après l'exercice précédent les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de $y' - \frac{2}{x}y = 1 - \ln(x)$ sont les fonctions $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x\ln(x) + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
On utilise la méthode de variation de la constante pour l'équation différentielle $y' - \frac{2}{x}y = 1$: $\lambda' x^2 + 2x\lambda - 2x\lambda = 1$ donc $\lambda(x) = -\dfrac{1}{x}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x(-1 - \ln(x)) + \lambda x^2, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

IV.4. Exercices

Ex. 7.24 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x + 1$.

Cor. 7.24

La solution générale de l'équation homogène est $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$ et une solution particulière évidente est la fonction identité $x \in \mathbb{R} \mapsto x$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Ex. 7.25 Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \cos^2(x)$.

Cor. 7.25

La solution générale de l'équation homogène est $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}$.
Linéarisons $\cos^2(x)$: $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.
Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :
$\lambda' e^{2x} = \cos(2x)$ donc $\lambda' = \mathcal{R}e\left(e^{2(-1+i)x}\right)$ et
$\lambda = \mathcal{R}e\left(\dfrac{e^{2(-1+i)x}}{2(-1+i)}\right) = \mathcal{R}e\left(\dfrac{-2(1+i)e^{2(-1+i)x}}{8}\right) = e^{-2x}\dfrac{\sin(2x)-\cos(2x)}{4}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\sin(2x)-\cos(2x)-2}{8} + \lambda e^{2x}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

Ex. 7.26 (Cor.) Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y' - iy = -i\left(e^{it}+1\right)$.

V. Linéaires du second ordre

Dans tout ce qui suit, $a, b \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
On cherche les solutions y deux fois dérivables à dérivées continues de l'équation différentielle ***linéaire d'ordre deux à coefficients constants***

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

On note (E') l'équation homogène associée.

V.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 7.10 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe $\mathcal{C}^2$ sur*** I si f est deux fois dérivable sur I et si f'' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^2(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans J.
On note donc $f \in \mathcal{C}^2(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J, dérivable deux fois (donc continue) sur I ***et de dérivée seconde*** f'' ***continue sur*** I.

V.2. Équation homogène

Remarque

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. Cherchons, par analogie avec les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions de (E') du type $x \mapsto e^{rx}$ où r est une constante ***réelle ou***

complexe.
$y' = re^{rx} = ry$ et $y'' = ry' = r^2y$. Donc $(E') \Leftrightarrow y\left(r^2 + ar + b\right) = 0$.
Comme par ailleurs l'exponentielle (réelle ou complexe) ne s'annule jamais, les solutions de (E') du type $x \mapsto e^{rx}$ sont celles pour lesquelles r est solution de $r^2 + ar + b = 0$.

Définition 7.11 (Équation caractéristique)

Étant donnée $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants, on appelle ***équation caractéristique*** de (E') l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 7.12

Soit $(E') : y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes constants et $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (E') sont :

- si $\Delta \neq 0$, en notant r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A\exp(r_1t) + B\exp(r_2t),\, (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine complexe de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B)\exp(r_0t),\, (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Démonstration

D'après les relations coefficients/racines dans les équations du second degré, on peut réécrire (E') sous la forme
$(E') : y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = 0 \Leftrightarrow y'' - r_1y' = r_2\left(y' - r_1y\right) \Leftrightarrow \left(y' - r_1y\right)' = r_2\left(y' - r_1y\right)$.
Effectuons un ***changement de fonction inconnue*** : posons $Y = y' - r_1y$. On a alors : $(E') \Leftrightarrow Y' = r_2Y$. Donc $Y : t \in \mathbb{R} \mapsto B\exp(r_2t)$ avec $B \in \mathbb{K}$.
On en déduit donc que $y' - r_1y = B\exp(r_2t)$.
L'équation homogène associée à cette dernière équation a pour solution générale les fonctions du type
$t \in \mathbb{R} \mapsto A\exp(r_1t)$ avec $A \in \mathbb{K}$.
On termine alors en utilisant la méthode de variation de la constante pour obtenir une solution particulière de $y' - r_1y = B\exp(r_2t)$:
$A'\exp(r_1t) = B\exp(r_2t) \Leftrightarrow A' = B\exp\Big((r_2 - r_1)\,t\Big)$.
Deux solutions se présentent alors :

- soit $r_1 = r_2 = r_0$, c'est-à-dire que l'équation caractéristique a une racine double et un discriminant nul. Alors $A(t) = Bt$ convient et on obtient finalement pour solutions les fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto (A + Bt)\exp(r_0t)$ où A et B sont des constantes quelconques (réelles ou complexes suivant le problème posé).
- soit $r_1 \neq r_2$, c'est-à-dire que l'équation caractéristique a deux racines distinctes et un discriminant non nul. Alors $A(t) = \dfrac{B}{r_2 - r_1}\exp\Big((r_2 - r_1)\,t\Big)$ convient et on obtient

finalement pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$ où A et B sont à nouveau des constantes quelconques.

Remarque

Dans les deux cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$ où A et B sont des constantes réelles ou complexes. On dit que y est ***combinaison linéaire de*** y_1 ***et*** y_2 ou encore que y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.27 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - (1+i)y' + iy = 0$.

Cor. 7.27

L'équation caractéristique est $z^2 - (1+i)z + i = 0$ de discriminant $\Delta = (1+i)^2 - 4i = 2i - 4i = -2i = \overline{2i} = (1-i)^2$.

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $z_1 = \dfrac{1+i-1+i}{2} = i$ et $z_2 = \dfrac{1+i+1-i}{2} = 1$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{it} + Be^{t}, (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

V.3. Solutions réelles de l'équation homogène à coefficients réels

Théorème 7.13

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients ***réels*** constants.

Soit $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Alors les solutions ***à valeurs réelles*** de (E') sont :

- si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines ***réelles*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine ***réelle*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B)\exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto \exp(\alpha t)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Cette dernière solution peut aussi s'écrire $y : t \mapsto Y_0\exp(\alpha t)\cos(\omega t + \phi), (Y_0, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (voir exercice 4.14 page 86) .

Démonstration

Remarque

Là encore, dans tous les cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$. À nouveau, y est ***combinaison linéaire de*** y_1 et y_2 ou encore y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.28 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 6y' + 18y = 0$.

Cor. 7.28

L'équation caractéristique est $z^2 - 6z + 18 = 0$ de discriminant $\Delta = 36 - 72 = -36 = (6i)^2$.
Les solutions de l'équation caractéristique sont donc $z_1 = \dfrac{6-6i}{2} = 3 - 3i$ et $z_2 = 3 + 3i$.
Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{3t}\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

V.4. Équation avec second membre

Théorème 7.14

Étant donnés $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Le principe de superposition reste lui aussi valable et les démonstrations sont identiques au cas du premier ordre.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on résout tout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.
La méthode de variation de la constante est parfois encore applicable mais en pratique, seuls sont au programme de PCSI les seconds membres de la forme De^{ct} avec $(D, c) \in \mathbb{C}^2$ qui permettent aussi de traiter les seconds membres du type $De^{ut}\cos(vt)$ ou $De^{ut}\sin(vt)$ en passant à la partie réelle ou imaginaire.
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme

1) $t \mapsto Ue^{ct}$ lorsque c n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
2) $t \mapsto Ute^{ct}$ lorsque c est solution simple de l'équation caractéristique ;
3) $t \mapsto Ut^2e^{ct}$ lorsque c est solution double de l'équation caractéristique.

Ex. 7.29 Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$.

Cor. 7.29

Résolution de l'équation homogène associée (E') : $y''+2y'+2y=0$, d'équation caractéristique $z^2+2z+2=0$.

$\Delta = 4-8=-4<0$, il y a donc deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{-2+2i}{2} = -1+i$ et $z_2=-1-i$.

Les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t}\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right)$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Obtention d'une solution particulière : on écrit $e^{-t}\cos(t) = \mathcal{R}e\left(e^{(-1+i)t}\right)$. Or $-1+i$ est une des deux racines de l'équation caractéristique. On cherche donc une solution de (E_2) : $y''+2y'+2y=e^{(-1+i)t}$ sous la forme $y=Ute^{(-1+i)t}$.

$y' = \big((-1+i)Ut+U\big)e^{(-1+i)t}$.

$y'' = \big(-2iUt+2(-1+i)U\big)e^{(-1+i)t}$.

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow -2iUt+2(-1+i)U+2\big((-1+i)Ut+U\big)+2Ut=1\\ &\Leftrightarrow 2iU=1\\ &\Leftrightarrow U=-\frac{i}{2}\end{aligned}.$$

Donc $t\mapsto -\dfrac{ite^{(-1+i)t}}{2}$ est solution de (E_2) et sa partie réelle $t\mapsto \dfrac{te^{-t}\sin(t)}{2}$ est une solution particulière de (E).

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{t\mapsto \frac{te^{-t}\sin(t)}{2}+e^{-t}\left(A\cos(t)+B\sin(t)\right),(A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

V.5. Unicité des solutions

Théorème 7.15

Si $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ alors il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$(E) : ay''+by'+cy=f(t)$$

vérifiant les ***conditions initiales*** $\begin{cases} y(t_0) &= v_0\\ y'(t_0) &= v_1\end{cases}$ où $t_0\in\mathbb{R}$, $(v_0;v_1)\in\mathbb{K}^2$.

Démonstration

Explicitement hors-programme.

Correction des exercices

Cor. 7.9 : On intègre par parties : $\displaystyle\int^x t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x)+\cos(x)$.
L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto x\cos(x)$ est donc $\{x\mapsto x\sin(x)+\cos(x)+k, k\in\mathbb{R}\}$.

Cor. 7.14 : ***Analyse*** : si f vérifie la condition donnée, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x-a) = 0$, ce qui s'écrit en posant $u = x - a$, $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+2a) = f(u)$. Donc f est $2a$-périodique.
Synthèse : supposons que f est $2a$-périodique et soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y+a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(u+2a)\mathrm{d}u \qquad \texttt{en posant } u = t - 2a \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la valeur de $x \in \mathbb{R}$ ce qui achève notre démonstration.

Cor. 7.15 : Discriminant : $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, le dénominateur ne s'annule donc jamais. On calcule une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{5t^2 + 2t + 1} \\
&= \frac{1}{5}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} \\
&= \frac{5}{4}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{5t+1}{2}\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{5t+1}{2}$, $\mathrm{d}u = \frac{5}{2}\mathrm{d}t$. D'où

$$I(x) = \frac{5}{4}\int^{\frac{5x+1}{2}} \frac{\frac{2}{5}\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{5x+1}{2}\right)$$

Cor. 7.16 : Discriminant : $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$. Le dénominateur possède donc deux racines $t_1 = \dfrac{-4+2}{6} = \dfrac{-1}{3}$ et $t_2 = -1$. On calcule une primitive sur $]-\infty; -1[$ ou $\left]-1; \dfrac{-1}{3}\right[$ ou $\left]\dfrac{-1}{3}; +\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
J(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{3t^2 + 4t + 1} \\
&= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t + \frac{1}{3}\right)(t+1)}
\end{aligned}$$

On cherche à écrire $\dfrac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}$ sous la forme $\dfrac{A}{t+\frac{1}{3}} + \dfrac{B}{t+1}$.
On peut procéder ***par identification*** ou utiliser la méthode suivante :

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \quad \overset{\times\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{t+1} = A + \frac{B\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t+1} \quad \overset{t=\frac{-1}{3}}{\Longrightarrow} \quad A = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)} = \frac{A}{t+\frac{1}{3}} + \frac{B}{t+1} \quad \overset{\times(t+1)}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{t+\frac{1}{3}} = \frac{A(t+1)}{t+\frac{1}{3}} + B \quad \overset{t=-1}{\Longrightarrow} \quad B = \frac{-3}{2}$$

D'où $J(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x \frac{1}{t+\frac{1}{3}} - \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right| = \ln\sqrt{\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|}$.

Cor. 7.19 : $1 + y^2$ est une fonction strictement positive. L'équation différentielle donnée est donc équivalente à

$$\frac{y'}{1+y^2} = 1$$

En primitivant on obtient donc $\text{Arctan}(y) = x + k$ où k est une constante réelle.
On en déduit que $y = \tan(x+k)$. Or pour que y soit définie sur I, il faut que k soit un multiple entier de π.
La seule solution définie sur I de $y' = 1 + y^2$ est donc la fonction tangente.

Cor. 7.26 : La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}$. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :
$\lambda' e^{it} = -i\left(e^{it}+1\right)$ donc $\lambda' = -i\left(e^{-it}+1\right)$ et $\lambda = -it + e^{-it}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1 + (\lambda - it)e^{it}, \lambda \in \mathbb{C}\right\}$.