Équations différentielles et calcul intégral

I. Intégrales et primitives

Ex. 7.1 Déterminer les primitives suivantes en précisant le (ou les) intervalle(s) de validité de la primitive obtenue :

$$F_1(x) = \int^x t(t^2-1)^7 \mathrm{d}t \qquad F_2(x) = \int^x (t^2-1)^7 \mathrm{d}t$$

$$F_3(x) = \int^x \sqrt{5t+4}\,\mathrm{d}t \qquad F_4(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$$

$$F_5(x) = \int^x \frac{2}{\sqrt{6-6t^2}}\mathrm{d}t \qquad F_6(x) = \int^x \frac{2t+5}{(t^2+5t+8)^4}\mathrm{d}t$$

$$F_7(x) = \int^x \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \qquad F_8(x) = \int^x \frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

$$F_9(x) = \int^x \frac{2t}{(t-1)(3-t)}\mathrm{d}t \qquad F_{10}(x) = \int^x \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 7.2 Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(nx)\mathrm{d}x$.

Ex. 7.3 En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, calculer

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

et précisez les intervalles sur lesquels cette primitive est définie.
En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en précisant les intervalles sur lesquels elle est définie.

Ex. 7.4 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et $F : x \in]0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.
b. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.
c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.
d. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.
e. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$\dfrac{1+x\ln(x)-x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1+x\ln(x)-x$.
f. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ existe et donner un encadrement de cette limite.
g. Même question pour $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
h. Représenter graphiquement F.

II. Équations différentielles

Ex. 7.5 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$

$$(E) : y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$$

Ex. 7.6 Résoudre pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$(E) : y' + \tan(t)y = \sin(2t)$$

puis donner l'unique solution telle que $y(0) = 1$.

Ex. 7.7 Résoudre les équations différentielles suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

a. $(E_1) : y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0$
b. $(E_2) : y'' - 2y' + y = e^x \cos(x)$
c. $(E_3) : y'' + y' - 2y = \sin^3(x)$.

Ex. 7.8 Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le ou les intervalles de résolution choisis :

a. $ty' + y = \cos(t)$

b. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

c. $xy'\ln(x) - y = 3x^2\ln^2(x)$

d. $y'' - y = \operatorname{sh}(x)$

e. $y'' + y' = 4x^2e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.

III. Compléments

Ex. 7.9 (Cor.) [*] Trouver les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & x' + y' - y \\ y'' & = & x' + y' - x \end{array}\right.$$

Indication : poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

Ex. 7.10 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser $g(t) = f\left(e^t\right)$.

Ex. 7.11 (Cor.) [*] Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$

Corrections

Cor. 7.9 : On suit l'indication ! Posons $u = x + y$ et $v = x - y$ et cherchons des équations différentielles satisfaites par u et v.
En sommant les deux équations du système proposé : $u'' = 2u' - u$
En faisant la différence des deux équations : $v'' = v$.
La première conduit à $u = (At + B)e^t, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
La seconde conduit à $v = Ce^t + De^{-t}, (C, D) \in \mathbb{R}^2$.
Et on conclut en écrivant $x = (u + v)/2$ et $y = (u - v)/2$.

Cor. 7.11 :
1ère méthode : par dérivation de l'équation fonctionnelle.
On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - f(-x)$ et f et exp sont dérivables, donc f' est dérivable c'est-à-dire f deux fois dérivable. Dérivons l'équation fonctionnelle :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(-x) = e^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - e^{-x} + f(x) = e^x$.
On résout donc l'équation différentielle $(E) : y'' + y = e^x + e^{-x} = 2\operatorname{ch} x$.
Équation homogène : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y = A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Solution particulière de (E) : $y = \operatorname{ch} x$ est solution évidente.
Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions

$$y = \operatorname{ch} x + A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous n'avons pas raisonné par équivalence, il faut vérifier qu'elles sont bien solutions de l'équation fonctionnelle :
$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = \operatorname{sh}(x) - A\sin x + B\cos x + \operatorname{ch} x + A\cos x - B\sin x = e^x$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (A+B)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow A = -B$ en substituant par exemple $x = 0$ dans la précédente assertion.
Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \operatorname{ch} x + A\cos x - A\sin x, A \in \mathbb{R}$$

2ème méthode : en utilisant la décomposition en partie paire et partie impaire.
On décompose sur $\mathbb{R}$ f en sa partie paire g et sa partie impaire h. **La dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire**. Donc l'équation fonctionnelle s'écrit pour tout réel x :
$g'(x) + h'(x) + g(-x) + h(-x) = e^x \Leftrightarrow (h'(x) + g(x)) + (g'(x) - h(x)) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.
La décomposition en partie paire et partie impaire étant unique on a donc :
$\left\{\begin{array}{rcl} h' + g & = & \operatorname{ch} \\ g' - h & = & \operatorname{sh} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h'' + g' & = & h'' + h + \operatorname{sh} = \operatorname{sh} \\ g' - h & = & \operatorname{sh} \end{array}\right.$ On résout la première équation différentielle : $h = A\cos + B\sin$, or h impaire donc $h = B\sin, B \in \mathbb{R}$.
Donc $g = \operatorname{ch} - h' = \operatorname{ch} - B\cos$.
Finalement, on obtient les solutions de l'équation fonctionnelle :

$$f = \operatorname{ch} - B\cos + B\sin, B \in \mathbb{R}$$

qui sont identiques (évidemment) à celles trouvées par la première méthode.