Semaine 24

Variables aléatoires

Sujet 1 : Le Blevec

.

Ex. 24.1 ***Mines PSI 2016*** On considère un jeu vidéo avec une infinité de tableaux successifs $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ La probabilité que le joueur franchisse le tableau T_n (en supposant qu'il soit arrivé jusque là) est $\dfrac{1}{n}$.
Notamment la probabilité que le joueur franchisse le premier tableau vaut 1 : il réussit au moins ce tableau.
On note par X la variable aléatoire qui donne le nombre de tableaux franchis par le joueur.

1) Donner la loi de X.
2) Calculer l'espérance de X.

Sujet 2 : Avrillon

.

Ex. 24.2 ***Centrale Python 2018*** Soient $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], P(0) = 0\}$ et $\phi_n : P \in E_n \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que la fonction ϕ_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ et est linéaire.
2) Exprimer A_n, la matrice associée à ϕ_n dans E_n rapporté à la base $\mathcal{B}_n = (X, X^2, ..., X^{n+1})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{C}_n$.
   Remarque : on ne demande pas de démontrer que $\mathcal{B}_n$ est bien une base de E_n.
3) Écrire une fonction Python `A(n)` renvoyant la matrice A_n (sous forme d'un tableau `numpy`).
4) Pour $k \in [\![1; 5]\!]$, calculer avec Python $\det(A_k)$ et afficher ces valeurs.
5) Montrer que ϕ_n est un isomorphisme.
6) Soit P_n l'unique polynôme tel que $\phi_n(P_n) = X^n$.
   Calculer avec Python pour $k \in [\![1; 5]\!]$ le coefficient dominant de P_k.
   Quelle conjecture ces calculs suggèrent-ils ?

Soient $E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$, $\phi : P \in E \mapsto P(X+1) - P(X)$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

7) Montrer que ϕ est un isomorphisme.
8) On note à nouveau P_n l'unique polynôme tel que $\phi(P_n) = X^n$.
   Montrer que $(n+1)!P_n$ est à coefficients entiers.
9) Démontrer la conjecture émise à la question 6.
10) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes $(U; V) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} Q(k)H_k = U(n)H_n + V(n)$$

Sujet 3 : Chamoux

.

Ex. 24.3 On s'intéresse à la situation suivante : on dispose d'un terrain de jeu infini constitué de cases numérotées par l'ensemble des entiers relatifs et d'un jeton posé sur la case 0.

$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$

On effectue des lancers à pile ou face : si la pièce tombe sur pile, on déplace le jeton d'une case vers la droite (sur l'entier immédiatement supérieur), sinon, on déplace le jeton d'une case vers la gauche.

On note X_n la variable aléatoire donnant la position du jeton après n lancers (autrement dit donnant le numéro de la case sur laquelle est posé le jeton).

On note A_n l'événement réalisé lorsque le jeton ***revient*** sur la case 0 ***pour la première fois après n lancers*** et A l'événement réalisé lorsque le jeton revient sur la case 0 après un nombre quelconque de lancers.

On a donc, par définition, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$, la réunion étant disjointe.

1) Quelle est la loi suivie par X_0 ? X_1 ?
2) Calculer $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right)$.
3) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\mathbb{P}\left(X_n = 0\right) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) \mathbb{P}\left(X_{n-i} = 0\right)$$
4) Soit $g : t \mapsto \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_i = 0\right) t^i$ et $h : t \mapsto \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right) t^i$.
Trouver le rayon de convergence de g et montrer que le rayon de convergence de h est supérieur à celui de g.
5) Déduire des questions précédentes que pour tout t dans un intervalle à préciser
$$g(t) = 1 + g(t)h(t)$$
6) Calculer $\mathbb{P}(A)$.

Sujet 4 : Exos supplémentaires