Semaine 21

Proba confinées :-)

Sujet 1 : Deberge

.

Ex. 21.1 Pour se rendre au travail, un automobiliste dispose de deux itinéraires A et B. Le premier jour, il prend l'itinéraire A, puis, chaque jour, il prend le même itinéraire que la veille s'il n'y a pas eu d'embouteillage, et change d'itinéraire s'il y a eu des embouteillages.
La probabilité que l'automobiliste se trouve dans un embouteillage en prenant l'itinéraire A est notée a, celle correspondant à l'itinéraire B est notée b. On suppose que les événements successifs sont indépendants. On note p_n la probabilité que l'automobiliste emprunte l'itinéraire A le n-ième jour où il se rend au travail.

1) Calculer p_1, p_2 et p_3.
2) Calculer p_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Sujet 2 : Souvignet

.

Ex. 21.2 (Cor.) Dans une urne se trouve deux boules, une noire notée N, une rouge notée R. On tire dans l'urne une boule, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne. On continue ainsi jusqu'à obtenir un mot donné sur des tirages consécutifs.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot NR en deux lancers ? en trois lancers ?
2) Soit k un entier supérieur à 2. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot NR en k lancers ?
3) Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir NR en moins de n lancers est supérieure à $3/4$?
4) Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité d'obtenir RR en moins de n lancers est supérieure à $3/4$?
   On modifie l'expérience aléatoire de la façon suivante : on arrête les tirages dès que l'un des deux mots NR ou RR est advenu sur des tirages successifs.
   On note E l'événement : « les tirages se sont arrêtés sur le mot NR ».
5) Quelle est la probabilité de E sachant que le premier tirage est un N ?
6) Quelle est la probabilité de E sachant que le premier tirage est un R ?
7) Quelle est la probabilité de E ?

Sujet 3 : Boyer

.

Ex. 21.3 (Cor.) ***Centrale 2015 Python***

1) Construire à l'aide de Python le tableau `bin` tel que pour tout $(i,j) \in [\![0;12]\!]^2$, `bin[i,j]` vaut $\left(\begin{array}{c} i \\ j \end{array}\right)$ si $i \geqslant j$ et 0 sinon.
2) On pose pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ est bien définie.
3) Donner les valeurs exactes de A_0 et A_1.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A_{n+1} en fonction de $A_0, ..., A_n$.
5) S'en servir pour calculer les valeurs exactes de A_n pour $n \in [\![2;12]\!]$.
6) On étudie la série $f_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{A_p x^p}{p!}$.

   Montrer que $A_n \leqslant n!e$ pour tout entier n. En déduire que le rayon de convergence R de la série est supérieur à 1.
7) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A_p x^p}{p!}$ la somme de la série pour $x \in]-R;R[$.

   Représenter graphiquement à l'aide de Python f sur un intervalle bien choisi.
8) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire homogène.
9) Donner une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Sujet 4 : Exos supplémentaires

Corrigés

Cor. 21.2 :

1) On note N_i l'événement « la lettre N est obtenue au tirage i » et R_i l'événement « la lettre R est obtenue au tirage i ».
On a alors de manière évidente $N_i = \overline{R_i}$. On sous-entend l'intersection des événements : autrement dit N_1R_2 signifie $N_1 \cap R_2$.
Enfin, on note X_i l'événement certain « obtenir n'importe quelle lettre au tirage i ».
On a alors $\mathbb{P}(N_1R_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(R_2) = \dfrac{1}{4}$ par indépendance des événements (tirages successifs avec remise).
De plus, obtenir le mot NR en trois tirages, c'est obtenir n'importe quelle lettre au premier tirage, puis un N puis un R.
La seconde probabilité à calculer est donc $\mathbb{P}(X_1N_2R_3) = \dfrac{1}{4}$ aussi.

2) Soit k un entier supérieur à 2. On note A_k l'événement « obtenir le mot NR en k lancers ».
$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{k-2} R_1R_2...R_iN_{i+1}...N_{k-1}R_k\right) = \sum_{i=0}^{k-2}\mathbb{P}(R_1R_2...R_iN_{i+1}...N_{k-1}R_k)$ par incompatibilité des différents événements.
Donc $\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{k-1}{2^k}$.

3) On cherche pour quelle valeur minimale de n, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} A_k\right) \geqslant \dfrac{3}{4}$.
Or $P_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{k-1}{2^k}$ (en $k=1$, le terme est nul et peut donc librement être ou non ajouté à la somme).
Posons $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{kx^{k-1}}{2^k}$ et $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{x^k}{2^k}$.
On a alors $P_n = s_n(1) - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k} = s_n(1) - \dfrac{2^n-1}{2^n}$ d'une part et $\forall x \in \mathbb{R}, s_n(x) = S_n'(x)$ d'autre part.
Or $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^k = \left(\dfrac{x}{2}\right) \times \dfrac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{x}{2}\right)}$.
Donc $S_n(x) = \dfrac{x(2^n - x^n)}{2^n(2-x)}$ après simplifications.
Donc $\forall x \neq 2, s_n(x) = S_n'(x) = \dfrac{(2-x)\left[(2^n-x^n) - nx^n\right] + x(2^n - x^n)}{2^n(2-x)^2}$
ou encore $s_n(x) = \dfrac{2^{n+1} - 2(n+1)x^n + nx^{n+1}}{2^n(2-x)^2}$ après simplification.
Finalement :
$P_n = \dfrac{2^{n+1}-n-2}{2^n} - \dfrac{2^n-1}{2^n} = \dfrac{2^n-n-1}{2^n}$.
On cherche donc n entier minimal pour lequel $P_n \geqslant \dfrac{3}{4} \Rightarrow 2^n \geqslant 4n+4$.
Les calculs successifs pour les petites valeurs de n conduisent à $n = 5$: $2^n = 32$ et $4n+4 = 24$.
Remarque : l'expression $P_n = \dfrac{2^n-n-1}{2^n} = 1 - \dfrac{n+1}{2^n}$ suggère qu'une approche par

événement contraire pourrait être une bonne idée... C'est effectivement le cas ! Je vous laisse chercher vous-même pourquoi l'événement contraire a, en l'occurrence, une probabilité qui se calcule simplement.

Cor. 21.3 :

1) Ici, le meilleur algorithme est fondé sur la formule de Pascal :

```
def bin3(n):
    """Fondé sur la formule de Pascal"""
    res = np.eye(n+1,dtype=int)
    res[:,0] = 1
    for i in range(2,n+1):
        for j in range(1,i):
            res[i,j] = res[i-1,j]+res[i-1,j-1]
    return res
bin = bin3(12)
```

2) On pose pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ $u_{n,k} = \dfrac{k^n}{k!}$ et $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}$ lorsqu'elle est définie.
A_n est ***une série à termes positifs*** (ne jamais oublier de le préciser).
Or :
$k^2 \dfrac{k^n}{k!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^k k^{n+2}}{k^k\sqrt{2\pi k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^k}{k^{k-n-2}\sqrt{2\pi k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Donc A_n est définie pour tout entier n par comparaison avec une série de Riemann convergente.

3) $A_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$
$A_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e.$

4) ***1ère méthode*** :
Celle que vous suggériez hier : on pose $\forall i \in \mathbb{N}, P_i = X(X-1)...(X-i+1) = \displaystyle\prod_{j=0}^{i-1}(X-j).$
Remarque : ces polynômes sont appelés polynômes de ***Hilbert***. Pour des notions reliées à ces polynômes, voir aussi ***symbole de Pochhammer*** et ***polynômes de Bernoulli***.
Plaçons nous dans $E_n = \mathbb{R}_n[X]$: la famille $(1; X; ...; X^{n-1}; P_n)$ est constituée de $n+1$ polynômes échelonnés en degrés, dans un espace de dimension $n+1$, c'est donc une base de E_n.
On souhaite obtenir les coordonnées $(a_0; ...; a_n)$ de X^n dans cette base.
P_n étant le seul polynôme de degré n, on identifie facilement facilement $X^n = P_n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$, c'est-à-dire $P_n = X^n - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.
Il s'agit donc en fait d'obtenir les coordonnées de P_n dans la base canonique.
Or $P_{n+1} = (X-n)P_n = XP_n - nP_n$. Donc en notant $b_{n,i}$ les coordonnées de P_n dans la base canonique, on a :

$P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} b_{n,i}X^{i+1} - \sum_{i=0}^{n} nb_{n,i}X^i = b_{n,n}X^{n+1} - nb_{n,0} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_{n,i-1} - kb_{n,i}\right)X^i.$

On en déduit $b_{n+1,n+1} = 1$, $b_{n+1,0} = 0$ et $\forall i \in [\![1;n]\!], b_{n+1,i} = b_{n,i-1} - nb_{n,i}$.

Calcul des premières valeurs :

1				
0	1			
0	-1	1		
0	2	-3	1	
0	-6	11	-6	1

Remarque : ces nombres sont appelés nombres de ***Stirling***.

Ici, il faut ***utiliser le fait que l'on fait une colle Python : on ne cherche pas à obtenir une formule explicite des $b_{n,i}$, on se contente de répondre à la question en les utilisant*** - sachant que la formule de récurrence permettra de programmer facilement l'obtention de ces nombres.

On a donc finalement $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P_{n+1}(k) - \sum_{i=0}^{n} b_{n+1,i}k^i}{k!}$

C'est-à-dire après simplifications : $A_{n+1} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k-n)!} - \sum_{i=0}^{n} b_{n+1,i}A_i$

toutes les séries étant convergentes.

$$A_{n+1} = e - \sum_{i=0}^{n} b_{n+1,i}A_i$$

2

2$^{\text{ère}}$ méthode :

Celle que je suggérais : on pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, Sn(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n x^k}{k!}$ en montrant que le rayon de convergence est infini.

On a alors : $A_n = S_n(1)$ d'une part, et d'autre part $xS_n'(x) = S_{n+1}(x)$.

On obtient immédiatement $S_0(x) = e^x$ puis $S_1(x) = xe^x, S_2(x) = \left(x^2 + x\right)e^x$, etc...

On démontre (par une récurrente immédiate) que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists Q_n \in \mathbb{R}_n[X], S_n(x) = Q_n(x)e^x$ où de plus

$$Q_{n+1} = X\left(Q_n + Q_n'\right)$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} = eQ_{n+1}(1) = eQ_n(1) + eQ_n'(1) = A_n + eQ_n'(1)$.

Sur le plan purement algorithmique, cette méthode est beaucoup plus simple que la précédente, mais on peut en fait se demander si elle est licite vue la question posée : dans un cas comme dans l'autre, on a fourni un algorithme permettant d'obtenir les valeurs exactes de A_n, une expression de A_{n+1} en fonction des précédentes valeurs, mais pas de formule explicite.

3$^{\text{ère}}$ méthode :

Je me souvenais l'avoir fait simplement... La seconde méthode m'apparaissait simple mais il y a beaucoup mieux !

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$A_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^{n+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^n}{k!}$.

Donc $A_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} A_i$ (car toutes les séries sont convergentes)...

Ça torche, et surtout ça rend la suite de l'exercice nettement plus simple. Je ne la rédige pas