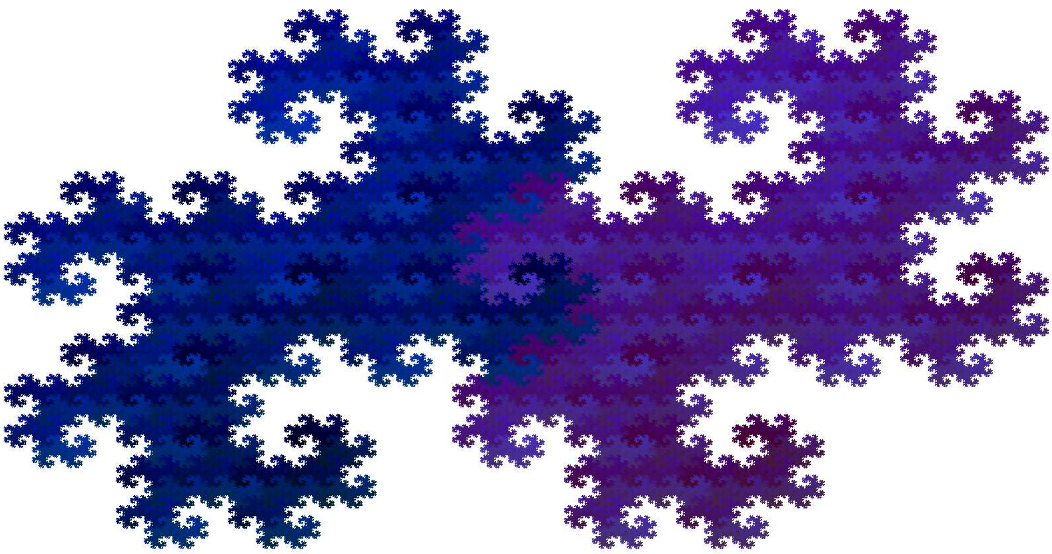
PROGRAMMES DE COLLES, DEVOIRS PCSI

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

LYCEE LA FAYETTE



8 mai 2020

Première partie

Programmes de colles

Programme de colles n°1

Du 16 au 20 septembre 2019

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Énoncer les propriétés concernant la négation des opérateurs logiques (propriété 1.5 du cours) et la négation des quantificateurs (axiome 1.19 du cours).
2) Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition. Faire de même pour les applications surjectives.
   Donner la définition d'une application bijective.
3) Donner la définition d'une composée d'application puis énoncer la proposition (1.33) concernant la composée d'injections, de surjections ou de bijections.
4) Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
5) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (ou énoncé similaire concernant la surjectivité, au choix du colleur).
6) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \in J$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
7) Définition de la divisibilité. Définition d'un nombre premier.
   Énoncer la propriété (2.7) d'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ pour un diviseur non nul.
8) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$
9) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
10) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
    Donner une factorisation pour $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$ de $x^n - y^n$.
11) Donner sans justification la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$. Simplifier la somme triangulaire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$.

Programme pour les exercices : sur 12 points

Résolutions d'équations ou de systèmes d'équations, pas trop compliqués mais éventuellement paramétrés.
Arithmétique ***élémentaire***, faisant éventuellement intervenir des démonstrations par récurrence ou par l'absurde.
Calcul de sommes ***simples***, sans coefficients binomiaux pour l'instant. Si les sommes simples sont comprises, on pourra éventuellement donner des sommes doubles/triangulaires.

Programme de colles n°2

Du 23 au 27 septembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Énoncer les propriétés concernant la négation des opérateurs logiques (propriété 1.5 du cours) et la négation des quantificateurs (axiome 1.19 du cours).
2) Donner la définition d'une application injective puis la traduction symbolique de cette définition. Faire de même pour les applications surjectives.
Donner la définition d'une application bijective.
3) Donner la définition d'une composée d'application puis énoncer la proposition (1.33) concernant la composée d'injections, de surjections ou de bijections.
4) Démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
5) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (ou énoncé similaire concernant la surjectivité, au choix du colleur).
6) Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \in J$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
7) Définition de la divisibilité. Définition d'un nombre premier.
Énoncer la propriété (2.7) d'existence d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ pour un diviseur non nul.
8) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$
9) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.
10) Énoncer la proposition concernant la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.
Donner une factorisation pour $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$ de $x^n - y^n$.
11) Donner sans justification la valeur de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$. Simplifier la somme triangulaire $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$.
12) ***Donner la définition des coefficients binomiaux.***
Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
13) ***Énoncer et démontrer la formule du binôme.***
14) ***Soient*** $n \in \mathbb{N}$ ***et*** $x \in \mathbb{R}$***. Simplifier*** $f_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i x^{i-1}$***.***
15) ***Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale compatible avec les opérations de*** $(\mathbb{C}, +, \times)$***.***

16) ***Énoncer le théorème de la bijection continue (3.25). Donner la formule permettant de dériver une composée*** $(u \circ v)' = ...$ ***et celle permettant de dériver la réciproque d'une bijection*** $(f^{-1})' = ...$

Programme pour les exercices : sur 12 points

Résolutions d'équations ou de systèmes d'équations, pas trop compliqués mais éventuellement paramétrés.
Arithmétique ***élémentaire***, faisant éventuellement intervenir des démonstrations par récurrence ou par l'absurde.
Calcul de sommes simples, doubles ou triangulaires.
Résolutions d'inéquations (notamment avec valeurs absolues). Études de fonctions réelles d'une variable réelle (notamment montrer qu'une telle fonction est bijective).

Programme de colles n°3

Du 30 septembre au 4 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Donner la définition des coefficients binomiaux.
Énoncer et démontrer la formule de Pascal.
2) Énoncer et démontrer la formule du binôme.
3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i x^{i-1}$.
4) Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale compatible avec les opérations de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
5) Énoncer le théorème de la bijection continue (3.25). Donner la formule permettant de dériver une composée $(u \circ v)' = ...$ et celle permettant de dériver la réciproque d'une bijection $(f^{-1})' = ...$
6) ***Définir bornes et extremums d'une partie de $\mathbb{R}$. Définir bornes, extremums globaux et extremums locaux d'une fonction réelle.***
7) ***Donner la définition de la dérivabilité en un point. Équation de la tangente en ce point.***
8) ***Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.***
9) ***Énoncer les deux inégalités triangulaires pour le module, démontrer la première.***
10) ***Expressions de $\mathcal{R}e\,(z)$, $\mathcal{I}m\,(z)$ et $|z|$ à l'aide de $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$.***
Étant donnés $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$, montrer que
$$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$$
11) ***Expression pour $z \in \mathbb{C}^*$ de $\frac{1}{z}$ à l'aide de $\bar{z}$ et $|z|$.***
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\bar{z}$ pour que $z \in \mathbb{R}$, ou pour que $z \in i\mathbb{R}$.

Programme pour les exercices : sur 12 points

Résolutions d'inéquations (notamment avec valeurs absolues). Études de fonctions réelles d'une variable réelle (notamment montrer qu'une telle fonction est bijective).
Calcul de sommes simples, doubles ou triangulaires.
Complexes : partie réelle, partie imaginaire, module.

Programme de colles n°4

Du 7 au 11 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Définir bornes et extremums d'une partie de $\mathbb{R}$. Définir bornes, extremums globaux et extremums locaux d'une fonction réelle.
2) Donner la définition de la dérivabilité en un point. Équation de la tangente en ce point.
3) Énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.
4) Énoncer les deux inégalités triangulaires pour le module, démontrer la première.
5) Expressions de $\mathcal{R}e\,(z)$, $\mathcal{I}m\,(z)$ et $|z|$ à l'aide de $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$.
   Étant donnés $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$, montrer que
   $$Z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$$
6) Expression pour $z \in \mathbb{C}^*$ de $\dfrac{1}{z}$ à l'aide de $\bar{z}$ et $|z|$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\bar{z}$ pour que $z \in \mathbb{R}$, ou pour que $z \in i\mathbb{R}$.
7) ***Forme trigonométrique d'un nombre complexe.***
   Définitions de $e^{i\theta}$ ***et de*** e^z ***pour*** $\theta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$.
   Propriétés de l'exponentielle d'un nombre imaginaire.
8) ***Écrire sous forme trigonométrique*** $1 + e^{i\theta}$ ***ou*** $1 - e^{i\theta}$ ***(au choix du colleur).***
9) ***Énoncer les formules d'Euler et de Moivre.***
   Au choix du colleur : développer $\cos(nx)$ ***ou*** $\sin(nx)$ ***(pour*** $n \leqslant 5$***) ou linéariser un produit de fonctions trigonométriques.***
10) ***Au choix du colleur : simplifier*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ ***ou*** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ***ou factoriser*** $\cos(p) + \cos(q)$.
11) ***Définition de*** $\ln$***, propriétés opératoires. Montrer que*** $\forall x \in]-1; +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
12) ***Définition de*** $\exp$***, propriétés opératoires. Montrer que*** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$.

Programme pour les exercices : sur 12 points

Nombres complexes : parties réelle/imaginaire, module, utilisations pour la trigonométrie et la simplification de sommes.

Programme de colles n°5

Du 14 au 18 octobre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Forme trigonométrique d'un nombre complexe.
   Définitions de $e^{i\theta}$ et de e^z pour $\theta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$.
   Propriétés de l'exponentielle d'un nombre imaginaire.
2) Écrire sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ ou $1 - e^{i\theta}$ (au choix du colleur).
3) Énoncer les formules d'Euler et de Moivre.
   Au choix du colleur : développer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ (pour $n \leqslant 5$) ou linéariser un produit de fonctions trigonométriques.
4) Au choix du colleur : simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ou factoriser $\cos(p)+\cos(q)$.
5) Définition de ln, propriétés opératoires. Montrer que $\forall x \in]-1;+\infty[, \ln(1+x) \leqslant x$.
6) Définition de exp, propriétés opératoires. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$.
7) ***Définition des fonctions puissance, propriétés opératoires, limites, représentations graphiques suivant la valeur de l'exposant.***
   Croissances comparées.
8) ***Définition de*** $\tan$***, parité, périodicité, limites, représentation graphique. Propriétés et représentation graphique de*** $\sin$ ***et*** $\cos$***.***
9) ***Définition de*** Arcsin***,*** Arccos***,*** Arctan ***(être précis). Limites, dérivées et représentations graphiques. Quelques valeurs remarquables au choix du colleur.***
10) ***Formules (avec intervalles de validité)*** $\sin(\mathrm{Arcsin}(x))$***,*** $\sin(\mathrm{Arccos}(x))$***,*** $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$***,*** $\cos(\mathrm{Arccos}(x))$***,*** $\tan(\mathrm{Arctan}(x))$***,*** $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$***,*** $\mathrm{Arccos}(\cos(x))$***,*** $\mathrm{Arctan}(\tan(x))$***.***
11) ***Fonctions hyperboliques : définition, propriétés (*** $\mathrm{ch}+\mathrm{sh}$***,*** $\mathrm{ch}-\mathrm{sh}$***,*** $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2$***), limites (notamment comparées avec*** $x \mapsto x$***), dérivées, représentations graphiques.***

Programme pour les exercices : sur 12 points

Nombres complexes : parties réelle/imaginaire, module, utilisations pour la trigonométrie et la simplification de sommes.
Études de fonctions : ln***,*** exp***,*** $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^\alpha$ ***où*** $\alpha \in \mathbb{R}$***, fonctions circulaires (dont*** $\tan$***), fonctions circulaires réciproques.***

Du 4 au 8 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Définition des fonctions puissance, propriétés opératoires, limites, représentations graphiques suivant la valeur de l'exposant.
   Croissances comparées.
2) Définition de tan, parité, périodicité, limites, représentation graphique. Propriétés et représentation graphique de sin et cos.
3) Définition de Arcsin, Arccos, Arctan (être précis). Limites, dérivées et représentations graphiques. Quelques valeurs remarquables au choix du colleur.
4) Formules (avec intervalles de validité) $\sin(\mathrm{Arcsin}(x))$, $\sin(\mathrm{Arccos}(x))$, $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$, $\cos(\mathrm{Arccos}(x))$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x))$, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x))$, $\mathrm{Arccos}(\cos(x))$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x))$.
5) Fonctions hyperboliques : définition, propriétés ($\mathrm{ch}+\mathrm{sh}$, $\mathrm{ch}-\mathrm{sh}$, $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2$), limites (notamment comparées avec $x \mapsto x$), dérivées, représentations graphiques.
6) ***Équation du second degré à coef. complexes : théorème et résolution d'une équation (au choix du colleur).***
7) ***Racine n-ième de l'unité : énoncé du théorème et résolution d'une équation du type $z^n = c$ (au choix du colleur).***
8) ***Propriétés de l'exponentielle complexe (chapitre 4 page 71+chapitre 6 page 98). Résolution d'une équation du type $e^z = c$ (au choix du colleur).***
9) ***Interprétation géométrique des nombres complexes (sans démonstration) : critères de colinéarité, d'orthogonalité de vecteurs, alignement de points, coordonnées du milieu d'un segment.***
10) ***Expressions (comme transformations du plan complexe) d'un translation de vecteur $c \in \mathbb{C}$, d'une rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, d'une homothétie de centre $a \in \mathbb{C}$ de rapport $r \in \mathbb{R}^*$.***

Programme pour les exercices : sur 12 points

Tout depuis le début d'année.

Programme de colles n°7

Du 11 au 15 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Équation du second degré à coef. complexes : théorème et résolution d'une équation (au choix du colleur).
2) Racine n-ième de l'unité : énoncé du théorème et résolution d'une équation du type $z^n = c$ (au choix du colleur).
3) Propriétés de l'exponentielle complexe (chapitre 4 page 71+chapitre 6 page 98). Résolution d'une équation du type $e^z = c$ (au choix du colleur).
4) Interprétation géométrique des nombres complexes (sans démonstration) : critères de colinéarité, d'orthogonalité de vecteurs, alignement de points, coordonnées du milieu d'un segment.
5) Expressions (comme transformations du plan complexe) d'un translation de vecteur $c \in \mathbb{C}$, d'une rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, d'une homothétie de centre $a \in \mathbb{C}$ de rapport $r \in \mathbb{R}^*$.
6) ***Rappel : énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.***
7) ***Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie dans une intégrale. Énoncer (sans démonstration) le théorème de changement de variable dans une intégrale.***
8) ***Donner (avec démonstration) l'ensemble des primitives de*** $\ln$ ***sur*** $\mathbb{R}_+^*$.
9) ***Calculer (avec démonstration)*** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$.
10) ***Donner quelques primitives usuelles (au choix du colleur).***
11) ***Calculer (au choix du colleur) une primitive d'une fonction de la forme*** $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ ***ou*** $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ***ou*** $x \mapsto \cos^a(x)\sin^b(x)$.

Programme pour les exercices : sur 12 points

Tout depuis le début d'année (notamment équations dans $\mathbb{C}$ ***et calculs de primitives et d'intégrales).***

Programme de colles n°8

Du 18 au 22 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Rappel : énoncer le théorème fondamental du calcul intégral et son corollaire.
2) Énoncer et démontrer le théorème d'intégration par partie dans une intégrale.
   Énoncer (sans démonstration) le théorème de changement de variable dans une intégrale.
3) Donner (avec démonstration) l'ensemble des primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) Calculer (avec démonstration) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(t)}$.
5) Donner quelques primitives usuelles (au choix du colleur).
6) Calculer (au choix du colleur) une primitive d'une fonction de la forme
   $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ ou $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \cos^a(x)\sin^b(x)$.
7) ***Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^0$, de classe $\mathcal{C}^1$. Donner (sans démonstration) l'ensemble des solutions de $y' + a(t)y = 0$.***
8) ***Structure des solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. Décrire la méthode de variation de la constante.***
9) ***Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme normale (au choix du colleur).***
10) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à <u>valeurs complexes</u> de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$.***
11) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à <u>valeurs réelles</u> de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$.***
12) ***Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de la forme De^{ct} (au choix du colleur).***

Programme pour les exercices

Calcul d'intégrales, de primitives (notamment de fonctions du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$), études de fonctions définies par une intégrale, résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Programme de colles n°9

Du 25 au 29 novembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^0$, de classe $\mathcal{C}^1$. Donner (sans démonstration) l'ensemble des solutions de $y' + a(t)y = 0$.
2) Structure des solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. Décrire la méthode de variation de la constante.
3) Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme normale (au choix du colleur).
4) Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs complexes de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{C}$.
5) Énoncer (sans démonstration) le théorème donnant l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $y'' + ay' + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
6) Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de la forme De^{ct} (au choix du colleur).
7) ***Définition quantifiée de : $A \subset \mathbb{R}$ possède un majorant, possède un maximum. Définition (non quantifiée) de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Énoncer la propriété de la borne supérieure.***
8) ***Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.***
   Démontrer l'une des quatre propriétés du lemme 8.12 (au choix du colleur).
9) ***Définitions, propriétés et sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique. Factorisation de $x^n - y^n$.***

Programme pour les exercices

Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
Exercices sur les suites niveau bac + révision sommes finies.
Partie entière, inéquations, démonstration d'inégalités.

Programme de colles n°10

Du 2 au 6 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Définition quantifiée de : $A \subset \mathbb{R}$ possède un majorant, possède un maximum. Définition (non quantifiée) de la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$. Énoncer la propriété de la borne supérieure.
2) Énoncer (sans démonstration) les théorèmes de densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
Démontrer l'une des quatre propriétés du lemme 8.12 (au choix du colleur).
3) Définitions, propriétés et sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique. Factorisation de $x^n - y^n$.
4) ***Définition et propriétés de la partie entière d'un réel (sans démo).***
5) ***Suites arithmético-géométriques : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démonstration).***
6) ***Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas complexe, adaptation au cas réel.***
7) ***Montrer que la suite u définie par $u_0 \in [0;1], u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ est décroissante.***
8) ***Définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle. Montrer (à l'aide de cette définition) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.***
9) ***Énoncer les trois théorèmes des gendarmes.***
En déduire que si $a > 1$, alors $a^n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et donner (sans démonstration) les autres limites possibles d'une suite géométrique.
10) ***Énoncer les trois théorèmes de convergence/divergence monotone. Montrer (au choix du colleur) l'une des quatre assertions.***
11) ***Définition des suites adjacentes. Théorème les concernant (sans démonstration).***

Programme pour les exercices

Partie entière, inéquations, démonstration d'inégalités.
Suites (notamment arithmético-géométriques et récurrentes linéaires). Sommes finies (révisions).
Démonstration par récurrence double.
Attention : pour l'instant, aucun théorème particulier n'a été vu pour l'étude des suites récurrentes.

Du 9 au 13 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Définition et propriétés de la partie entière d'un réel (sans démo).
2) Suites arithmético-géométriques : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démonstration).
3) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : définition, théorème d'obtention d'une formule explicite (sans démo) dans le cas complexe, adaptation au cas réel.
4) Montrer que la suite u définie par $u_0 \in [0;1], u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$ est décroissante.
5) Définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle. Montrer (à l'aide de cette définition) que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
6) Énoncer les trois théorèmes des gendarmes.
   En déduire que si $a > 1$, alors $a^n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ et donner (sans démonstration) les autres limites possibles d'une suite géométrique.
7) Énoncer les trois théorèmes de convergence/divergence monotone. Montrer (au choix du colleur) l'une des quatre assertions.
8) Définition des suites adjacentes. Théorème les concernant (sans démonstration).
9) ***Définition de $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, de $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, de $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$. Traduction des croissances comparées à l'aide des « petit o ».***
10) ***Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.***
11) ***Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et démontrer la formule.***
12) ***Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer la formule.***
13) ***Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ et démontrer la formule.***
14) ***Énoncer sans démonstration la formule de Taylor-Young et les théorèmes de primitivation et de dérivation (attention !) des DL.***
15) ***Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \exp(x)$ et démontrer la formule.***

Programme pour les exercices

Suites (notamment arithmético-géométriques et récurrentes linéaires). Sommes finies (révisions).
Démonstration par récurrence double.
Attention : pour l'instant, aucun théorème particulier n'a été vu pour l'étude des suites récurrentes.
Calculs très simples de $\mathrm{DL}_n(0)$ pour de petites valeurs de n et les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan, exp.

Du 16 au 20 décembre

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 8 points

1) Définition de $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, de $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, de $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$. Traduction des croissances comparées à l'aide des « petit o ».
2) Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors u et v sont de même signe à partir d'un certain rang.
3) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et démontrer la formule.
4) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et démontrer la formule.
5) Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ et démontrer la formule.
6) Énoncer sans démonstration la formule de Taylor-Young et les théorèmes de primitivation et de dérivation (attention !) des DL.
7) Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \exp(x)$ et démontrer la formule.
8) ***Calculer le*** $\mathrm{DL}_5(0)$ ***de*** $\tan(x)$ ***- par primitivation ou par quotient.***
9) ***Donner (sans démonstration) quelques*** DL ***de référence (au choix du colleur).***

Programme pour les exercices : sur 12 points

Développements limités et asymptotiques (au voisinage de 0, x_0 ***ou*** $\pm\infty$***), application aux limites, dérivabilité, équivalents, tangentes, asymptotes et position de la représentation graphique par rapport aux tangentes et asymptotes.***

Programme de colles n°13

Du 6 au 10 janvier 2020

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Calculer le $DL_5(0)$ de $\tan(x)$ - par primitivation ou par quotient.
2) Donner (sans démonstration) quelques DL de référence (au choix du colleur).
3) ***Résoudre (au choix du colleur) un système de 3 équations à 3 inconnues.***
4) ***Révisions de trigonométrie.***
5) ***Fonctions de référence : propriétés, dérivée, primitive, etc...***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Révisions : tout depuis le début de l'année !
Notamment, utilisations des DLs et systèmes de n équations à n inconnues.

Du 13 au 17 janvier 2020

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Résoudre (au choix du colleur) un système de 3 équations à 3 inconnues.
2) Fonctions de référence : propriétés, dérivée, primitive, etc...
3) ***Révisions de trigonométrie (formulaire de C.Baillaud).***
4) ***Définition (précise) du produit matriciel. Effectuer un produit matriciel (au choix du colleur).***
5) ***Énoncer sans démonstration les propriétés (11.20) du produit matriciel.***
6) ***Énoncer les propriétés (11.22 et 11.23) des matrices diagonales et triangulaires vis-à-vis des opérations matricielles.***
7) ***Donner les deux identités remarquables vérifiées par les matrices commutantes.***
   Démontrer la formule du binôme pour deux matrices commutantes.
8) ***Définition des matrices de transvection, de transposition, de dilatation. Propriétés du produit à gauche ou à droite par ces matrices.***
9) ***Montrer que si une matrice est inversible à droite et à gauche, alors les inverses à droite et à gauche sont égales.***
   Donner la définition de l'inverse d'une matrice carrée.
10) ***Propriétés (11.37) et caractérisation (11.38) - sans démonstration - des matrices inversibles.***
11) ***Inverser une matrice*** 3×3 ***(au choix du colleur).***
12) ***Donner les inverses et transposées des matrices d'opération élémentaire.***
    Énoncer (sans démonstration) les propriétés de la transposition.

Programme pour les exercices : sur 15 points

Systèmes linéaires.

Calculs matriciels : puissance n***-ième, inverse, décomposition*** ER.

Programme de colles n°15

Du 20 au 24 janvier 2020

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Révisions de trigonométrie (formulaire de C.Baillaud).
2) Définition (précise) du produit matriciel. Effectuer un produit matriciel (au choix du colleur).
3) Énoncer sans démonstration les propriétés (11.20) du produit matriciel.
4) Énoncer les propriétés (11.22 et 11.23) des matrices diagonales et triangulaires vis-à-vis des opérations matricielles.
5) Donner les deux identités remarquables vérifiées par les matrices commutantes.
   Démontrer la formule du binôme pour deux matrices commutantes.
6) Définition des matrices de transvection, de transposition, de dilatation. Propriétés du produit à gauche ou à droite par ces matrices.
7) Montrer que si une matrice est inversible à droite et à gauche, alors les inverses à droite et à gauche sont égales.
   Donner la définition de l'inverse d'une matrice carrée.
8) Propriétés (11.37) et caractérisation (11.38) - sans démonstration - des matrices inversibles.
9) Inverser une matrice 3×3 (au choix du colleur).
10) Donner les inverses et transposées des matrices d'opération élémentaire.
    Énoncer (sans démonstration) les propriétés de la transposition.
11) ***Définition du rang d'une matrice. Inégalité vérifiée par le rang d'une matrice, son nombre de lignes et son nombre de colonnes.***
12) ***Donner la définition d'un espace vectoriel*** $(E, +, .)$***.***
13) ***Définition d'un sous-espace vectoriel. Théorème fondamental (sans démonstration). Définition d'un sous-espace vectoriel engendré.***
14) ***Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.***
15) ***Donner la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.***
16) ***Définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Démontrer que la somme de deux s.e.v. est directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul.***
    Définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Programme pour les exercices : sur 15 points

Systèmes linéaires. Calculs matriciels : puissance n-ième, inverse, décomposition ER.

Espaces vectoriels : ***exercices très simples***.

Remarque : pour l'instant, les notions d'applications linéaires, de familles libres/génératrices, de bases ou de dimension n'ont pas encore été vues.

Programme de colles n°16

Du 27 au 31 janvier

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Définition du rang d'une matrice. Inégalité vérifiée par le rang d'une matrice, son nombre de lignes et son nombre de colonnes.
2) Donner la définition d'un espace vectoriel $(E, +, .)$.
3) Définition d'un sous-espace vectoriel. Théorème fondamental (sans démonstration). Définition d'un sous-espace vectoriel engendré.
4) Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
5) Donner la définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. Démontrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.
6) Définition d'une somme directe de sous-espaces vectoriels. Démontrer que la somme de deux s.e.v. est directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul.
Définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
7) ***Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Notations pour l'ensemble des applications linéaires, des endomorphismes, des automorphismes.***
8) ***Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire.***
9) ***Montrer que la bijection réciproque d'une application linéaire bijective est elle-même linéaire.***
10) ***Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Principales propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire.***
11) ***Montrer qu'une application linéaire f est injective si et seulement si*** $\operatorname{Ker} f = \{0\}$***.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Systèmes linéaires, calculs matriciels.
Espaces vectoriels et applications linéaires, PAS ENCORE d'applications linéaires PARTICULIÈRES (homothéties, projections, symétries).
Parmi les ev de référence, on a $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pas encore de familles libres/génératrices, bases ou de notion de dimension.

Programme de colles n°17

Du 3 au 7 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Notations pour l'ensemble des applications linéaires, des endomorphismes, des automorphismes.
2) Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire.
3) Montrer que la bijection réciproque d'une application linéaire bijective est elle-même linéaire.
4) Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire. Principales propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire.
5) Montrer qu'une application linéaire f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
6) ***Définition et propriétés (sans démonstration) des homothéties, projections, symétries. Notamment, caractérisation des projections et symétries.***
7) ***Définition du degré d'un polynôme. Propriétés (sans démonstration).***
8) ***Définition de la divisibilité pour les polynômes. Énoncer sans démonstration le théorème de division euclidienne dans*** $\mathbb{K}[X]$***.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Espaces vectoriels et applications linéaires, notamment applications linéaires particulières (homothéties, projections, symétries).
Parmi les ev de référence, on a $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$, $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et depuis cette semaine $\mathbb{K}[X]$.
Pas encore de familles libres/génératrices, bases ou de notion de dimension.

Programme de colles n°18

Du 10 février au 14 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Définition et propriétés (sans démonstration) des homothéties, projections, symétries. Notamment, caractérisation des projections et symétries.
2) Définition du degré d'un polynôme. Propriétés (sans démonstration).
3) Définition de la divisibilité pour les polynômes. Énoncer sans démonstration le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
4) ***Reste de la division euclidienne de*** $P \in \mathbb{K}[X]$ ***par*** $X - a$***, nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, fonctions polynomiales coïncidant sur un ensemble infini : énoncés.***
5) ***Démontrer que si deux fonctions polynomiales coïncident sur un ensemble infini, alors les polynômes associés sont égaux.***
6) ***Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor pour les polynômes et la formule de Leibnitz pour les produits de polynômes.***
7) ***Définition et caractérisation (sans démonstration) de la multiplicité d'une racine.***
8) ***Révisions : formules de trigonométrie, utilisation des nombres complexes en trigonométrie.***
9) ***Nouveau : (au choix du colleur) linéariser un produit du type*** $\mathrm{ch}^n(x)\,\mathrm{sh}^p(x)$ ***(où*** $n + p \leqslant 4$***) ou « développer »*** $\mathrm{ch}(nx)$ ***ou*** $\mathrm{sh}(px)$ ***en utilisant les parties paire/impaire.***
10) ***Révisions : factorisation de*** $x^n - y^n$***, formule du binôme, équations du second degré à coefficients complexes, racines*** n***-ièmes de l'unité.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Espaces vectoriels (sans notion de dimension, mais avec applications linéaires, homothéties, projections, symétries).

Polynômes : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$***, combinaisons linéaires, produit, composition, division euclidienne,*** $(X - a)|P \Leftrightarrow P(a) = 0$***, reste dans la division euclidienne par*** Q ***scindé à racines simples, racines multiples et caractérisation.***

Programme de colles n°19

Du 17 au 21 février

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $X - a$, nombre maximal de racines d'un polynôme non nul, fonctions polynomiales coïncidant sur un ensemble infini : énoncés.
2) Démontrer que si deux fonctions polynomiales coïncident sur un ensemble infini, alors les polynômes associés sont égaux.
3) Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor pour les polynômes et la formule de Leibnitz pour les produits de polynômes.
4) Définition et caractérisation (sans démonstration) de la multiplicité d'une racine.
5) Révisions : formules de trigonométrie, utilisation des nombres complexes en trigonométrie.
6) Nouveau : (au choix du colleur) linéariser un produit du type $\mathrm{ch}^n(x)\,\mathrm{sh}^p(x)$ (où $n + p \leqslant 4$) ou « développer » $\mathrm{ch}(nx)$ ou $\mathrm{sh}(px)$ en utilisant les parties paire/impaire.
7) Révisions : factorisation de $x^n - y^n$, formule du binôme, équations du second degré à coefficients complexes, racines n-ièmes de l'unité.
8) ***Donner la définition d'un polynôme scindé.***
Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss et son corollaire sur les polynômes scindés de $\mathbb{C}[X]$.
9) ***Donner la définition d'un polynôme irréductible. Donner les polynômes irréductibles de*** $\mathbb{R}[X]$***, de*** $\mathbb{C}[X]$.
Énoncer le théorème de factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.
10) ***Énoncer le théorème de factorisation des polynômes dans*** $\mathbb{R}[X]$.
11) ***Révisions : développements limités des fonctions de référence (quelques exemples au choix du colleur).***
12) ***Révisions : définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle. Montrer (à l'aide de cette définition) que*** $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
13) ***Énoncer le théorème (15.23) de la limite monotone.***
14) ***Étude complète de la suite définie par*** $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Programme pour les exercices : sur 15 points

Polynômes : $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, combinaisons linéaires, produit, composition, division euclidienne, $(X - a)|P \Leftrightarrow P(a) = 0$, reste dans la division euclidienne par Q scindé à racines simples, racines multiples et caractérisation.

Polynômes : factorisation dans* $\mathbb{C}[X]$ *ou dans* $\mathbb{R}[X]$*.

Études de fonctions, notamment prolongement par continuité de fonctions définies sur* $I \backslash \{a\}$*. Utilisations des DL pour le calcul de limites, l'obtention d'asymptotes, la position relative de la courbe d'une fonction et de son asymptote/tangente.

Études de suites récurrentes.

Programme de colles n°20

Du 9 au 13 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Donner la définition d'un polynôme scindé.
   Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss et son corollaire sur les polynômes scindés de $\mathbb{C}[X]$.

2) Donner la définition d'un polynôme irréductible. Donner les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, de $\mathbb{C}[X]$.
   Énoncer le théorème de factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Énoncer le théorème de factorisation des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$.

4) Révisions : développements limités des fonctions de référence (quelques exemples au choix du colleur).

5) Révisions : définitions quantifiées de la limite finie/infinie d'une suite réelle. Montrer (à l'aide de cette définition) que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

6) Énoncer le théorème (15.23) de la limite monotone.

7) Étude complète de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

8) ***Donner au choix du colleur la définition d'une ou plusieurs limites de la forme*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ***où*** $a \in \overline{\mathbb{R}}, l \in \overline{\mathbb{R}}$.

9) ***Montrer que*** $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$ ***est prolongeable par continuité en*** 0.

10) ***Énoncer le théorème de Bolzano (13.33) puis énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires en utilisant le théorème de Bolzano.***

11) ***Énoncer (sans démonstration) les théorèmes concernant l'image par une fonction continue d'un intervalle et d'un segment.***

12) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème de la bijection continue et le corollaire du TVI pour une fonction strictement monotone.***

13) ***Révisions : toutes les questions de cours du programme de colles n°16 sur les espaces vectoriels (une question au choix du colleur).***

14) ***Définition d'une famille libre, liée. Caractérisation (sans démonstration) des familles libres.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Polynômes : factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ ou dans $\mathbb{R}[X]$.
Études de fonctions, notamment prolongement par continuité de fonctions définies sur $I\backslash\{a\}$.
Utilisations des DL pour le calcul de limites, l'obtention d'asymptotes, la position relative de la courbe d'une fonction et de son asymptote/tangente.
Études de suites récurrentes. ***Continuité, limites de fonctions, image par une fonction continue d'un intervalle, d'un segment, théorèmes des valeurs intermédiaires.***

Programme de colles n°21

Du 16 au 20 mars

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

Soient E et F deux ensembles et $u \in \mathcal{F}(E, F)$.

1) Donner au choix du colleur la définition d'une ou plusieurs limites de la forme $\lim_{x \to a} f(x) = l$ où $a \in \overline{\mathbb{R}}, l \in \overline{\mathbb{R}}$.
2) Montrer que $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$ est prolongeable par continuité en 0.
3) Énoncer le théorème de Bolzano (13.33) puis énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires en utilisant le théorème de Bolzano.
4) Énoncer (sans démonstration) les théorèmes concernant l'image par une fonction continue d'un intervalle et d'un segment.
5) Énoncer (sans démonstration) le théorème de la bijection continue et le corollaire du TVI pour une fonction strictement monotone.
6) Révisions : toutes les questions de cours du programme de colles n°16 sur les espaces vectoriels (une question au choix du colleur).
7) Définition d'une famille libre, liée. Caractérisation (sans démonstration) des familles libres.
8) ***Énoncer sans démonstration le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $\phi(x) = y$.***
9) ***Définition d'une famille génératrice. Définition d'une base. Démontrer l'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.***
10) ***Énoncer le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.***
11) ***Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.***
    Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
    Donner les propriétés des familles libres/génératrices/bases en dimension finie.
12) ***Donner la définition des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.***

Programme pour les exercices : sur 15 points

Continuité, limites de fonctions, image par une fonction continue d'un intervalle, d'un segment, théorèmes des valeurs intermédiaires. ***Espaces vectoriels de dimension finie : familles, bases, dimension, pas encore de propriétés des sev et des app.lin.***

Programme de colles n°22

Du 23 au 27 mars 2020

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Énoncer sans démonstration le théorème de structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire $\phi(x) = y$.
2) Définition d'une famille génératrice. Définition d'une base. Démontrer l'existence et l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.
3) Énoncer le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.
4) Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
   Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
   Donner les propriétés des familles libres/génératrices/bases en dimension finie.
5) Donner la définition des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
6) ***Dimension d'un sous-espace vectoriel : propriété et cas d'égalité.***
   Existence d'un supplémentaire en dimension finie, dimension du supplémentaire, base adaptée à une somme directe.
7) ***Énoncer la formule de Grassmann et le théorème du rang.***
8) ***Énoncer les propriétés concernant l'image d'une famille génératrice par une application linéaire, l'image d'une famille libre par une injection linéaire, l'image d'une base par un isomorphisme.***
9) ***Rang d'une composée. Caractérisation des isomorphismes (prop. 15.45, 15.46, 15.52).***

Programme pour les exercices

EV en dimension finie.

Programme de colles n°23

Du 30 mars au 4 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Dimension d'un sous-espace vectoriel : propriété et cas d'égalité.
   Existence d'un supplémentaire en dimension finie, dimension du supplémentaire, base adaptée à une somme directe.
2) Énoncer la formule de Grassmann et le théorème du rang.
3) Énoncer les propriétés concernant l'image d'une famille génératrice par une application linéaire, l'image d'une famille libre par une injection linéaire, l'image d'une base par un isomorphisme.
4) Rang d'une composée. Caractérisation des isomorphismes (prop. 15.45, 15.46, 15.52).
5) ***Cardinal de*** $E \times F$***, de*** $\mathcal{F}(E, F)$ ***et de*** $\mathcal{P}(E)$***.***
   Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ ***pour un ensemble*** E ***au choix du colleur (de très petit cardinal).***
6) ***Nombre d'injections entre deux ensembles finis, nombre de bijections entre deux ensembles finis.***
   Liens entre les cardinaux de E, $f(E)$ ***et*** F ***(pour*** $f : E \to F$***), notamment dans le cas où*** f ***est injective/surjective/bijective.***
7) ***Soient*** E ***et*** F ***de même cardinal. Montrer que*** $f \in \mathcal{F}(E, F)$ ***est injective si et seulement si elle est bijective.***
8) ***Rappels : coefficients binomiaux (définition à l'aide de factoriels, coefficients binomiaux généralisés), formule du binôme,*** $\mathrm{DL}_n(0)$ ***de*** $(1 + x)^\alpha$ ***où*** $\alpha \in \mathbb{R}$***.***
   Lien avec le nombre de combinaisons de p ***éléments parmi*** n***.***
9) ***Théorèmes opératoires pour la dérivée en un point. Dérivée de la bijection réciproque en un point. Démontrer que*** $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$***.***
10) ***Énoncer et démontrer la formule de Leibniz.***
11) ***Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. Démontrer l'un des deux.***
12) ***Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor-Young, l'inégalité des accroissements finis et la <u>condition suffisante</u> d'existence d'un extremum local en*** $a \in \overset{\circ}{I}$***.***
13) ***Révisions : énoncer (sans démonstration) les équivalence entre existence d'un*** DL ***à l'ordre*** 0 ***ou*** 1 ***et la continuité ou dérivabilité d'une fonction en un point (théorème 9.13 du cours).***
14) ***Révisions :*** *DL* ***de référence.***
15) ***Énoncer (sans démonstration) le théorème de limite de la dérivée.***

Programme pour les exercices

EV en dimension finie. ***Dénombrement***.

Programme de colles n°24

Du 6 au 10 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Cardinal de $E \times F$, de $\mathcal{F}(E, F)$ et de $\mathcal{P}(E)$.
   Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ pour un ensemble E au choix du colleur (de très petit cardinal).
2) Nombre d'injections entre deux ensembles finis, nombre de bijections entre deux ensembles finis.
   Liens entre les cardinaux de E, $f(E)$ et F (pour $f : E \to F$), notamment dans le cas où f est injective/surjective/bijective.
3) Soient E et F de même cardinal. Montrer que $f \in \mathcal{F}(E, F)$ est injective si et seulement si elle est bijective.
4) Rappels : coefficients binomiaux (définition à l'aide de factoriels, coefficients binomiaux généralisés), formule du binôme, $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Lien avec le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.
5) Théorèmes opératoires pour la dérivée en un point. Dérivée de la bijection réciproque en un point. Démontrer que $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$.
6) Énoncer et démontrer la formule de Leibniz.
7) Énoncer le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. Démontrer l'un des deux.
8) Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor-Young, l'inégalité des accroissements finis et la condition suffisante d'existence d'un extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$.
9) Révisions : énoncer (sans démonstration) les équivalence entre existence d'un DL à l'ordre 0 ou 1 et la continuité ou dérivabilité d'une fonction en un point (théorème 9.13 du cours).
10) Révisions : DL de référence.
11) Énoncer (sans démonstration) le théorème de limite de la dérivée.
12) ***Soit*** $f : [a; b] \to [a; b]$***, continue. Montrer que*** f ***possède au moins un point fixe. (voir feuille de TD sur les suites récurrentes)***
13) ***Suites récurrentes : soit*** I ***un intervalle réel,*** $f : I \to I$***.***
    Soit u ***définie*** $u_0 \in I$ ***et*** $u_{n+1} = f(u_n)$***. Que peut-on affirmer sur la suite*** u ***?***
    On suppose f ***croissante sur*** I***. Que peut-on affirmer sur la suite*** u ***?***
    On suppose que $I = [a; b]$***,*** f ***continue et croissante. Que peut-on affirmer sur la suite*** u ***?***
14) ***Révisions : énoncer le théorème de convergence monotone.***

15) ***Révisions : toute question de cours (sans démonstration) sur les chapitres Systèmes linéaires, Calcul matriciel, Espaces vectoriels, Espaces vectoriels de dimension finie.***

Programme pour les exercices

Dénombrement. ***Suites récurrentes***.

Programme de colles n°25

Du 13 au 17 avril

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer : sur 5 points

1) Soit $f : [a; b] \to [a; b]$, continue. Montrer que f possède au moins un point fixe. (voir feuille de TD sur les suites récurrentes)
2) Suites récurrentes : soit I un intervalle réel, $f : I \to I$.
   Soit u définie $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Que peut-on affirmer sur la suite u ?
   On suppose f croissante sur I. Que peut-on affirmer sur la suite u ?
   On suppose que $I = [a; b]$, f continue et croissante. Que peut-on affirmer sur la suite u ?
3) Révisions : énoncer le théorème de convergence monotone.
4) Révisions : toute question de cours (sans démonstration) sur les chapitres Systèmes linéaires, Calcul matriciel, Espaces vectoriels, Espaces vectoriels de dimension finie.
5) ***Définitions de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base.***
   Définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases. Cas particulier des endomorphismes.
6) ***Coordonnées de l'image d'un vecteur/d'une famille de vecteurs dans une base (énoncés).***
   Matrice de la composée de deux applications linéaires : énoncé et démonstration.

Programme pour les exercices : sur 15 points

Suites récurrentes. ***Espaces vectoriels de dimension finie. Matrices et interprétations vectorielles.***

Programme de colles n°26

Du 4 au 7 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Définitions de la matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base.
   Définition de la matrice d'une application linéaire dans deux bases. Cas particulier des endomorphismes.
2) Coordonnées de l'image d'un vecteur/d'une famille de vecteurs dans une base (énoncés).
   Matrice de la composée de deux applications linéaires : énoncé et démonstration.
3) ***Matrice de la bijection réciproque d'une application linéaire (énoncé).***
   Définition d'une matrice de passage.
4) ***Produit de deux matrices de passages. Formule de changement de bases pour un vecteur.***
5) ***On donne ϕ endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (au choix du colleur) et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$ (au choix du colleur).***
   Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
6) ***Formules de changement de base pour une matrice d'application linéaire. Cas particulier des endomorphismes.***
7) ***Résumé des caractérisations des matrices inversibles. (Paragraphes IV.6 et V.5)***
8) ***Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Formule du rang matricielle. Rang et transposition.***

Programme pour les exercices

Matrices.

Programme de colles n°27

Du 11 au 14 mai

L'ensemble du cours depuis le début d'année doit être connu. Les questions de cours suivantes, portant sur les chapitres récents, sont à travailler particulièrement. ***En gras, les questions rajoutées au programme de colles de la semaine***.

Questions de cours à préparer

1) Matrice de la bijection réciproque d'une application linéaire (énoncé).
   Définition d'une matrice de passage.
2) Produit de deux matrices de passages. Formule de changement de bases pour un vecteur.
3) On donne ϕ endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (au choix du colleur) et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^2$ (au choix du colleur).
   Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
4) Formules de changement de base pour une matrice d'application linéaire. Cas particulier des endomorphismes.
5) Résumé des caractérisations des matrices inversibles. (Paragraphes IV.6 et V.5)
6) Définition du noyau et de l'image d'une matrice. Formule du rang matricielle. Rang et transposition.
7) ***Définition et propriétés d'une probabilité. Hypothèse d'équiprobabilité et conséquence.***
8) ***Probabilité conditionnelle : définition, formule des probabilités totales.***
9) ***Formule de Bayes et formule de Bayes généralisée.***
10) ***Indépendance de deux événements : définition. Montrer par un contre-exemple que l'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.***

Programme pour les exercices

Probabilités (sans variable aléatoire).
Révisions : sommes finies, développements limités, formule de Taylor, suites et limites, intégrales (en prévision du prochain chapitre sur les séries).

Programme pour le DS de lundi

Sommes finies, développements limités, formule de Taylor, suites et limites, continuité, dérivabilité.
Espaces vectoriels, applications linéaires, liens avec les matrices.
Je ne mettrai que des exercices simples concernant les théorèmes importants du cours. Les théorèmes importants ont fait l'objet d'une question de cours dans un programme de colles.