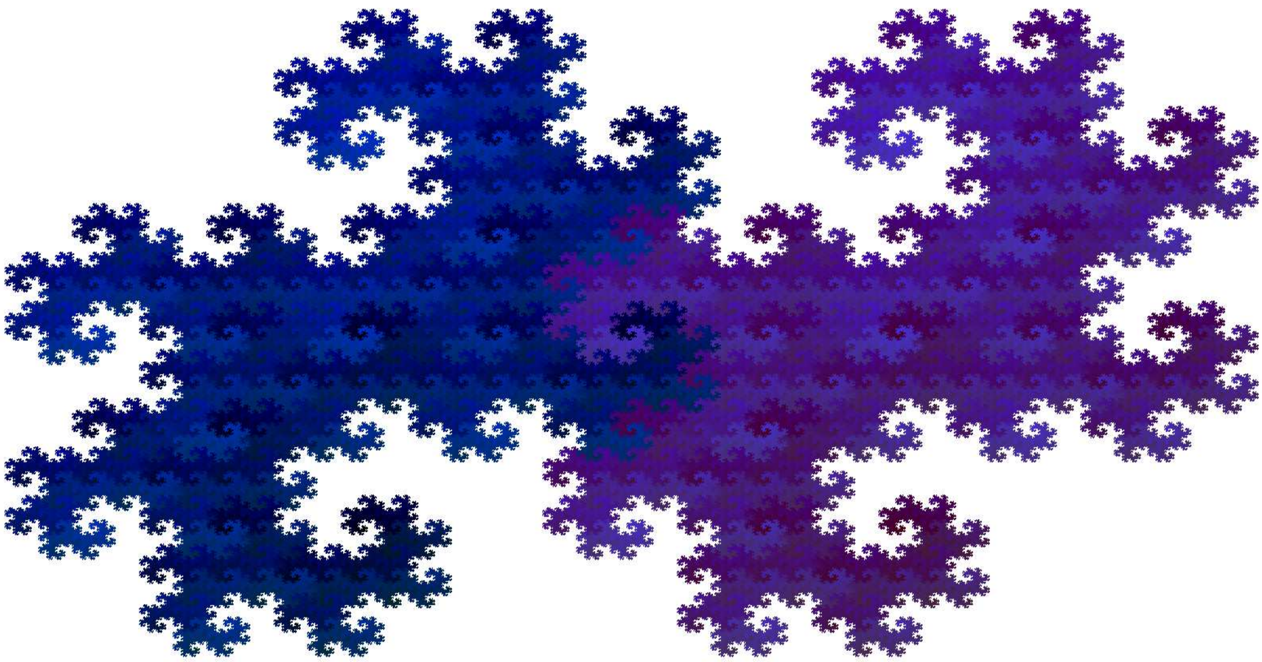
MATHS PCSI

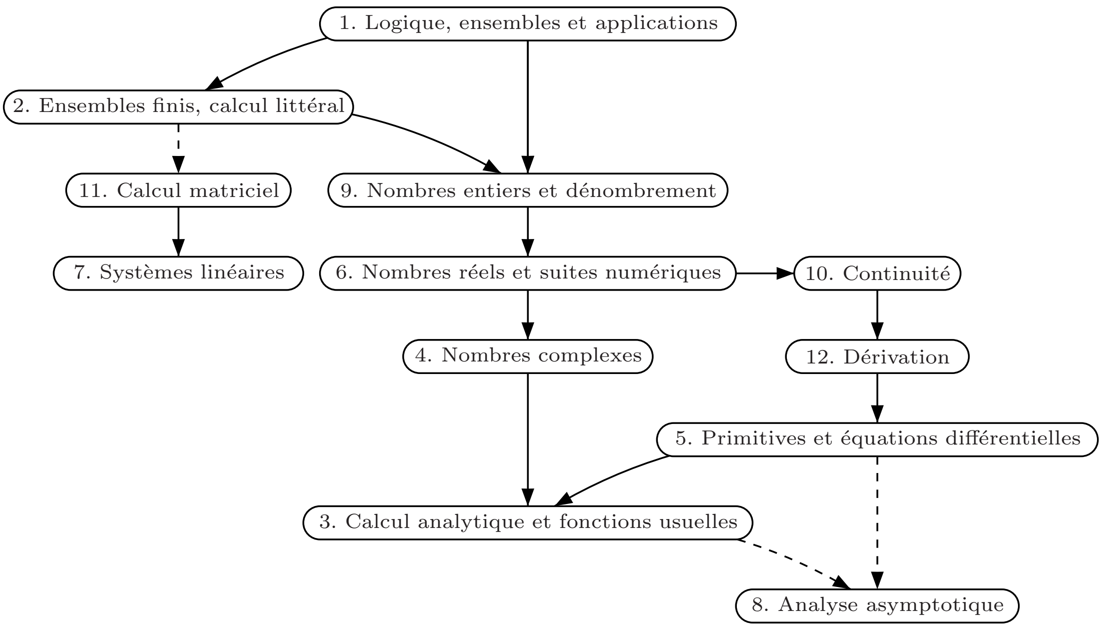
François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

LYCEE LA FAYETTE



10 juin 2019

Le programme officiel de la classe de PCSI pour la rentrée 2013 a été profondément remanié par rapport à celui des années précédentes. Il peut être trouvé en-ligne à l'adresse suivante :
http://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/special_3_ESR/45/4/programme-PCSI_252454.pdf
L'année est découpée en deux semestres de 18 semaines, chaque semestre ayant son propre programme et ses propres objectifs.
Concernant le premier semestre, les objectifs sont principalement de ***consolider la formation des étudiants dans les domaines du raisonnement et des techniques de calcul en assurant la progressivité du passage aux études supérieures***. La plupart des chapitres de début d'année seront consacrés à des notions ***directement utilisables en Physique, Chimie ou Sciences de l'Ingénieur***. Ce choix est non seulement dicté par la nécessité de voir l'enseignement scientifique comme un tout et de faire dialoguer les différentes disciplines entre elles, mais aussi justifié par l'une des facettes fondamentales des mathématiques : elles sont ***le langage à l'aide duquel les sciences décrivent le monde***.



« Les savants des temps passés et des nations révolues n'ont cessé de composer des livres. Ils l'ont fait pour léguer leur savoir à ceux qui les suivent. Ainsi demeurera vive la quête de la vérité. »
Al-Khwarizmi[1]

« Le savant n'étudie pas la nature parce que cela est utile ; il l'étudie parce qu'il y prend plaisir et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. »
Poincaré[2]

1. **Al-Khwarizmi**(∼780 ;850), mathématicien et astronome perse arabophone, fondateur de l'algèbre et dont le nom est à l'origine du mot français « algorithme ». Le terme même d'***algèbre*** est issu d'un de ses livres (*Kitab al-jabr wa'l-muqabalah*) et signifie ***réduction*** en arabe. Son influence en mathématiques a été considérable, aussi bien au travers de ses propres travaux que par sa volonté de transmettre les travaux d'autres auteurs.
2. **Poincaré**(1854 ;1912), mathématicien et physicien français ayant fondé ou contribué à la fondation de la théorie de la relativité, la théorie du chaos, l'analyse topologique, etc...

Première partie

Cours

Maths - Chapitre 1

Introduction et rappels

I. Programme officiel

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Quantificateurs	Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Implication, contraposition, équivalence. Modes de raisonnement : par contraposition, par l'absurde.	
b) Ensembles	
Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Notations $\complement_E^A$, $\bar{A}$, $E\backslash A$. Les étudiants doivent maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.	
c) Applications	
Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F ; graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F.
Restriction.	Notation $f_{\vert A}$.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	

II. Éléments de logique

Les thèmes abordés dans cette section sont aussi utiles en Automatique (SI) et en Informatique.

II.1. Vocabulaire

Définition 1.1

Une phrase mathématique bien construite est appelée ***énoncé*** ou ***assertion***.
On appelle ***définition*** un énoncé introduisant un nouveau mot.
On appelle ***axiome*** ou ***principe*** un énoncé concernant des mots déjà définis et considéré comme ***vrai*** dans le cadre d'une théorie mathématique.

Il est ***impossible de tout définir***. Par exemple, dans la définition précédente, nous n'avons pas défini ce qu'est « une phrase mathématique bien construite ». Cette notion repose essentiellement sur notre propre intuition.
Les axiomes complètent les définitions en donnant les propriétés fondamentales vérifiées par les mots définis. Ainsi le principe fondamental de la logique est le suivant :

Axiome 1.2 (Principe du tiers exclus)

Un énoncé est soit ***vrai***, soit ***faux***. Il n'y a pas de troisième possibilité.

Définition 1.3

On dit qu'un énoncé est ***démontré*** lorsqu'on l'a déduit au moyen de ***modes de raisonnements*** à partir de définitions, d'axiomes ou d'autres énoncés déjà démontrés.
Nous préciserons plus loin quels modes de raisonnements peuvent être utilisés dans une démonstration. Un énoncé démontré est appelé :

- ***proposition*** ou ***propriété*** ;
- ***théorème*** (lorsqu'il est particulièrement important) ;
- ***lemme*** (lorsqu'il est utilisé pour la démonstration d'un autre énoncé) ;
- ***corollaire*** (lorsque c'est une conséquence simple d'une proposition plus importante).

On appelle ***conjecture*** un énoncé que l'on pense être vrai mais qui n'est pas encore démontré.

II.2. Valeurs de vérité

D'après le principe du tiers exclus, un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. C'est ce qu'on appelle la ***valeur de vérité*** de cet énoncé. En dehors des mathématiques, les valeurs de vérité pourront être notées différemment. Le tableau suivant regroupe les différentes traductions possibles de ces valeurs :

Notation

Notation mathématique	Notation électronique	Notation Python
Faux	0	`False`
Vrai	1	`True`

Ex. 1.1 ***En Python,*** `False` ***et*** `0` ***sont deux objets différents ayant la même valeur. De même pour*** `True` ***et*** `1`***.***

```
>>> False is 0
False
>>> False==0
True
```

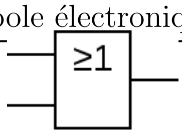
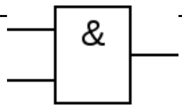
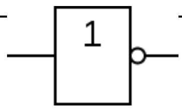
II.3. Opérateurs et fonctions logiques

Définition 1.4

Étant donnés deux énoncés A, B, on définit les nouveaux énoncés suivants :

- A **ou** B qui est vrai lorsque l'***un au moins*** des deux énoncés A,B est vrai, et qui est faux sinon ;
- A **et** B qui est vrai lorsque ***les deux*** énoncés A,B sont vrais, et qui est faux sinon ;
- **non** A qui est vrai lorsque A est faux, et qui est faux lorsque A est vrai.
  non A est aussi appelé ***négation*** de A.

Notation

Opérateur	Symbole électronique	Opération booléenne	Syntaxe Python
A **ou** B		$A+B$	`A or B`
A **et** B		$A.B$	`A and B`
non A		$\bar{A}=1-A$	`not A`

Ex. 1.2 ***Comment traduire simplement le test logique suivant ?***

```
>>> (a==b)or(a==-b)
True
```

II.4. Tables de vérité

Une façon de définir un opérateur ou une fonction logique est de donner sa table de vérité.
Remplir les tables ci-dessous :

A	**non** A
Vrai	Faux
Faux	Vrai

A	B	A **ou** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

A	B	A **et** B
Faux	Faux	......
Faux	Vrai	......
Vrai	Faux	......
Vrai	Vrai	......

Ex. 1.3 ***Écrire la négation des énoncés suivants***

- A : $6 < 2 \times 3$
- B : Je suis grand et fort.
- C : $x \leqslant 2$ **ou** $x > 3$.

Cor. 1.3

Propriété 1.5

Étant donnés deux énoncés A, B

- **non** (A **ou** B) s'écrit aussi ....
- **non** (A **et** B) s'écrit aussi ....

Démonstration

A	B	A **et** B	A **ou** B	**non** (A **et** B)	**non** (A **ou** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

A	B	**non** A	**non** B	(**non** A) **et** (**non** B)	(**non** A) **ou** (**non** B)
Faux	*Faux*	......	......	......	......
Faux	*Vrai*	......	......	......	......
Vrai	*Faux*	......	......	......	......
Vrai	*Vrai*	......	......	......	......

Méthode

Comme nous venons de le voir, une méthode pour démontrer une ***équivalence*** logique est d'écrire des tables de vérité.

Méthode

Étant donnés deux énoncés A, B, pour démontrer A **ou** B, on rédige ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit faux et démontrons qu'alors*** B ***est vraie.*** »
En effet, dire que A **ou** B est vrai revient à dire :

- ou bien A est vrai et alors A **ou** B est aussi vrai ;
- ou bien A est faux et pour démontrer que A **ou** B est vrai, il faut démontrer que B est

vrai.

Ex. 1.4 Soit I un intervalle (non vide) réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que f s'annule ou ne change pas de signe.

Cor. 1.4

II.5. Implication logique

Définition 1.6

Étant donnés deux énoncés A, B, le nouvel énoncé « A implique B » signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi. En revanche, ***si* A *est faux,* $A \Rightarrow B$ *reste vraie que* B *soit vrai ou faux***.

Notation

« A implique B » est noté $A \Rightarrow B$

Méthode

Pour démontrer que $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on rédige donc ainsi :
« ***Supposons que* A *soit vrai. Démontrons alors que* B *est vrai...*** »

Méthode

De même, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***fausse***, on peut rédiger comme suit :
« ***Trouvons un contre-exemple où* A *est vrai et* B *faux.*** »

Propriété 1.7 (propriété de transitivité)

$((A \Rightarrow B)\,\textbf{et}\,(B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Démonstration

II.6. Conditions nécessaires, conditions suffisantes

L'implication $A \Rightarrow B$ signifie que si A est vrai, alors B l'est aussi.
Autrement dit, lorsque $A \Rightarrow B$ ***il suffit*** que A soit vrai pour que B le soit.
De même, si B est faux, alors A ne peut pas être vrai : ***il faut*** que B soit vrai pour que A le soit.

Définition 1.8

Lorsque $A \Rightarrow B$ on dit que
- A est une ***condition suffisante*** à B ;
- B est une ***condition nécessaire*** à A.

Démontrer que A est une condition suffisante à B, démontrer que B est une condition nécessaire à A et démontrer que $A \Rightarrow B$ ont exactement la même signification.

Ex. 1.5 On dit qu'un entier p divise un entier n et on note $p|n$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $n = p \times k$. Sinon, on dit que p ne divise pas n ce que l'on note $p \nmid n$.

1) n étant un entier, montrer que $(6|n) \Rightarrow (2|n)$.
2) $6|n$ est-elle une condition nécessaire à ce que n soit pair ?
3) $6|n$ est-elle une condition suffisante à ce que n soit pair ?

Cor. 1.5

II.7. Réciproque

Définition 1.9 (Réciproque)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication réciproque*** l'énoncé $B \Rightarrow A$.

Remarque

Une implication peut être vraie et sa réciproque fausse !

En fait, tous les cas sont possibles !

Ex. 1.6

1) Écrire $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ en toutes lettres puis donner leurs valeurs de vérité.
   A : (il pleut) B : (il y a des nuages)
2) Trouver des énoncés A et B tels que :
   - $A \Rightarrow B$ est vrai et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est vrai.
   - $A \Rightarrow B$ est faux et $B \Rightarrow A$ est faux.

Cor. 1.6

II.8. Équivalence

Définition 1.10 (Équivalence)

Lorsqu'une implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ sont ***toutes les deux vraies***, on dit que A et B sont ***équivalents***. On dit aussi

A ***équivaut à*** B ou encore

A ***si et seulement si*** B ou enfin
A est ***une condition nécessaire et suffisante*** à B.

Notation

A équivaut à B est noté $A \Leftrightarrow B$

Méthode

D'une manière générale, pour montrer une équivalence, ***on doit donc montrer deux implications***! On peut donc rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***soit vrai. Démontrons alors que*** B ***est vrai...*** »
« ***Réciproquement, supposons que*** B ***soit vrai, démontrons que*** A ***est vrai...*** »
Une autre méthode consiste à utiliser des tables de vérité.

Ex. 1.7 Démontrer que $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\textbf{non}\, B) \Rightarrow (\textbf{non}\, A))$

Cor. 1.7

II.9. Contraposée

Définition 1.11 (Contraposée)

Étant donnée une implication $A \Rightarrow B$, on appelle ***implication contraposée*** l'énoncé $(\textbf{non}\, B) \Rightarrow (\textbf{non}\, A)$.

Une implication et sa contraposée sont équivalentes d'après l'exercice 1.7. Autrement dit, ***il revient au même de démontrer qu'une implication est vraie ou que sa contraposée l'est***.

Méthode

Ainsi, pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est ***vraie***, on peut rédiger comme suit :
« ***Démontrons la contraposée. Supposons que*** B ***est faux, et montrons alors que*** A ***est faux aussi.*** »

Ex. 1.8 ***Quelle est la contraposée de*** $(6|n) \Rightarrow (2|n)$ ***?***

Cor. 1.8

Ex. 1.9 Démontrer que le produit de deux entiers est pair si et seulement si l'un ou l'autre des deux entiers est pair.

Cor. 1.9

Ex. 1.10 ***Étant donnés deux entiers*** a ***et*** b***, démontrer que***
ab est impair si et seulement si a et b sont impairs.

Cor. 1.10

II.10. Démonstration par l'absurde

Habituellement, pour démontrer un énoncé A, on part d'axiomes ou d'hypothèses que l'on sait être vrais, puis on déduit par des implications que A est lui aussi vrai. Autrement dit, une démonstration de A est en général du type

$$\text{Énoncés vrais} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A$$

Or d'après le paragraphe précédent, on peut démontrer cette implication en démontrant sa contraposée, c'est-à-dire qu'une démonstration possible de l'énoncé A est

$$(\textbf{non}\, A) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \text{Énoncé faux}$$

Définition 1.12 (Démonstration par l'absurde)

On appelle ***démonstration par l'absurde*** de l'énoncé A une suite d'implications partant de **non** A et aboutissant à un énoncé faux.

Méthode

Pour démontrer l'énoncé A, on peut rédiger ainsi :
« ***Supposons que*** A ***est faux et montrons que c'est absurde.*** »

Ex. 1.11 ***Démontrer que*** $\sqrt{2}$ ***est irrationnel*** (c'est-à-dire qu'il ne peut pas s'écrire comme quotient d'entiers).

Cor. 1.11

III. Ensembles et quantificateurs

III.1. Définitions

Définition 1.13

Un ***ensemble*** est une « collection » d'objets mathématiques, sans répétition possible d'un même objet.
Ces objets sont appelés ***éléments*** de l'ensemble.
Un ensemble est dit ***fini*** s'il possède un nombre fini d'éléments, sinon il est dit ***infini***.
L'ensemble qui n'a aucun élément est appelé ***ensemble vide***.
Un ensemble possédant un unique élément est appelé ***singleton***.
Lorsque tous les éléments d'un ensemble A appartiennent aussi à un ensemble B, on dit que

A ***est inclus dans*** B ou que A ***est une partie de*** B.
Si A et B ont exactement les mêmes éléments, on dit qu'ils sont ***égaux***.

Notation

L'assertion « x est un élément de l'ensemble E » est notée $x \in E$.
Elle se lit « x appartient à E ».
L'assertion « x n'est pas un élément de l'ensemble E » est notée $x \notin E$.
Elle se lit « x n'appartient pas à E ».
L'ensemble vide est noté $\emptyset$.
L'assertion « A est inclus dans B » est notée $A \subset B$ et l'assertion « A est égal à B » notée $A = B$.
Les ensembles et inclusions suivants sont supposés connus :
$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\emptyset \subset \mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Q}^* \subset \mathbb{R}^* \subset \mathbb{C}^*$.

Ex. 1.12 Dans les cas suivants, dire si l'on a $A \subset B$, $B \subset A$, $A \in B$ ou $B \in A$.

$A = [-1; 5[$, $B =]3; 5[$	$A = -2$, $B = \mathbb{Z}$	$A = [-1; 5[$, $B = \mathbb{Z}$
$A = \mathbb{C}$, $B =]-1; 1[$	$A = \{-5; 3; \pi\}$, $B = 3$	$A = \mathbb{D}$, $B = \emptyset$

III.2. Prédicats

Définition 1.14

On appelle ***prédicat*** un énoncé qui fait intervenir une ou plusieurs ***variable(s)***.

Ex. 1.13 Nous avons déjà vu des prédicats dans ce chapitre :

- $(6|n) \Rightarrow (2|n)$ est un prédicat faisant intervenir une variable n qui est un entier ;
- $\overline{A\,\textbf{ou}\,B} \Leftrightarrow \left(\bar{A}\,\textbf{et}\,\bar{B}\right)$ est un prédicat ....
....

Remarque

Pour qu'un prédicat ait un sens, il faut toujours préciser ce que représentent ses variables ! C'est ce que l'on fait lorsqu'on écrit :

- Étant donné un entier n, $(6|n) \Rightarrow (2|n)$;
- ....

III.3. Quantificateurs

Définition 1.15

Un ***quantificateur*** précise les valeurs prises par une variable dans un prédicat.

On utilise deux quantificateurs.

Définition 1.16 (Quel que soit)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\forall x \in E, A(x)$ se lit « Quel que soit l'élément x de l'ensemble E, l'assertion $A(x)$ est vraie ». On peut aussi le lire « Soit $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie » ou encore « Étant donné $x \in E$ (sous-entendu quelconque), l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$. ***Montrons que*** $A(x)$ ***est vrai.*** »

Ex. 1.14

1) Quelle est la signification de $\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{N}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 1.14

Définition 1.17 (Il existe)

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E, l'énoncé $\exists x \in E, A(x)$ se lit « Il existe un élément x de l'ensemble E tel que l'assertion $A(x)$ est vraie ».

Méthode

Pour démontrer une propriété de ce type, ***il suffit de donner un exemple*** d'un élément de E vérifiant le prédicat $A(x)$.

Ex. 1.15

1) Quelle est la signification de $\exists x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}$?
2) Cet énoncé est-il vrai ou faux ?

Cor. 1.15

III.4. Enchainement de quantificateurs

Axiome 1.18

Lorsque plusieurs quantificateurs se suivent,

- leur ordre ***n'a pas d'importance si les quantificateurs sont identiques*** ;
- leur ordre ***est important si les quantificateurs sont différents***.

Ex. 1.16 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants, puis dire s'ils sont vrais ou faux.***

1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y$.
2) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

Cor. 1.16

III.5. Négation des quantificateurs

Axiome 1.19

Étant donnés un ensemble E et un prédicat A faisant intervenir une variable de E

non $(\forall x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,$ **non** $A(x))$

non $(\exists x \in E, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,$ **non** $A(x))$

Dans le cas où des quantificateurs sont enchainés, on fait de même ***sans changer l'ordre des quantificateurs***.

Ex. 1.17 ***Écrire en toutes lettres les énoncés suivants. Dire, si possible, s'ils sont vrais ou faux.***

1) **non** $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y)$
2) La négation de « Tout homme est mortel ».
3) La négation de « Il existe un homme plus grand que toutes les femmes ».

Cor. 1.17

Remarque

À l'aide des quantificateurs, pour deux ensembles E et F, la définition de l'inclusion $E \subset F$ s'écrit :

$(E \subset F) \Leftrightarrow$ ....

De même, la définition de l'égalité $E = F$ s'écrit :

$(E = F) \Leftrightarrow$ ....

Cette remarque conduit aux méthodes suivantes :

Méthode

Étant donnés deux ensembles E et F, pour démontrer que $E \subset F$, on rédige ainsi :
« ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »

Méthode

Le plus souvent, pour démontrer l'égalité $E = F$ on démontre que $E \subset F$ puis que $F \subset E$.
On rédige donc ainsi :

- « ***Soit*** $x \in E$***. Montrons que*** $x \in F$***.*** »
- « ***Soit*** $x \in F$***. Montrons que*** $x \in E$***.*** »

III.6. Opérations sur les ensembles

Définition 1.20

Étant donnés deux ensembles E,F, on définit les nouveaux ensembles suivants :

- l'***intersection de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***et*** à F.
- la ***réunion de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***ou*** à F.
- la ***différence de*** E ***et de*** F qui est formée des éléments appartenant à E ***mais pas*** à F ;
- ***si de plus*** $F \subset E$, la différence de E et de F est appelée ***complémentaire de*** F ***dans*** E.

Notation

- l'intersection de E et F est notée $E \cap F$ et se lit E ***inter*** F ;
- la réunion de E et F est notée $E \cup F$ et se lit E ***union*** F ;
- la différence de E et F est notée $E \backslash F$ et se lit E ***privé de*** F ;
- le complémentaire de F dans E est noté $\complement_E^F$ ou $\overline{F}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E.

Ex. 1.18 ***Compléter en utilisant les opérateurs logique* et *,* ou *,* non *.***

1) $x \in E \cap F \Leftrightarrow$ ....
2) $x \in E \cup F \Leftrightarrow$ ....
3) $x \in E \backslash F \Leftrightarrow$ ....

Propriété 1.21

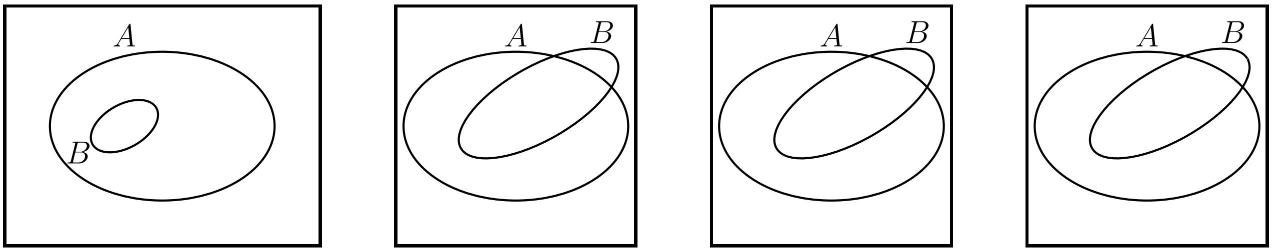
Les opérateurs d'intersection et de réunion vérifient :
•Commutativité : étant donnés deux ensembles A et B
$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
•Associativité : étant donnés trois ensembles A, B et C
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Démonstration

Ex. 1.19 Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
et que
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
Comment s'appellent ces propriétés vérifiées par la réunion et l'intersection ?

III.7. Diagrammes de Venn

On représente graphiquement les ensembles généralement grâce à des ***diagrammes de Venn*** :



(a) Inclusion, appartenance (b) Intersection (c) Réunion (d) Différence

FIGURE 1.1 – Diagrammes de Venn

III.8. Produit cartésien d'ensembles

Définition 1.22

Étant donnés deux ensembles E, F, on définit le ***produit cartésien de** E **par** F* comme l'ensemble des ***couples*** d'éléments $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$.
Cette définition se généralise à un ***nombre fini d'ensembles***.

Notation

Le produit cartésien de E par F est noté $E \times F$ et se lit E ***croix*** F.

Remarque

La définition précédente se généralise à un nombre fini d'ensembles : pour trois ensembles E, F et G, $E \times F \times G$ est l'ensemble des ***triplets*** $(x; y; z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$. $E \times E$ est noté E^2, $E \times E \times E$ est noté E^3...
En particulier, dans le plan ou l'espace rapportés à un repère, l'ensemble des coordonnées des points du plan est noté ... et l'ensemble des coordonnées des points de l'espace est noté ....

III.9. Modes de définition d'ensembles

a) Définition en extension

Définition 1.23

On dit qu'un ensemble est défini ***en extension*** lorsqu'on donne explicitement tous ses éléments.

Notation

On note alors les éléments entre accolades, séparés par des (points-)virgules : $E = \{e_1; e_2; \dots\}$.

b) Définition en compréhension

Définition 1.24

Étant donné un ensemble E et un prédicat A sur une variable de E, ***l'ensemble des éléments de*** E ***pour lesquels le prédicat*** A ***est vrai*** est un sous-ensemble de E noté $F = \{x \in E, A(x)\}$.

On dit alors que F est défini ***en compréhension***.

Notation

Étant donné un réel r et un sous-ensemble $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$ on note $r\mathbb{K} = \{x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{K}, x = rk\}$.

Par exemple, $3\mathbb{N}$ est ....

Étant deux entiers relatifs p et q et deux réels a et b, on appelle ***intervalles*** et on note :

- $[\![p;q]\!] = \{n \in \mathbb{Z}, p \leq n \leq q\}$ ....
- $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$, $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, etc...
  En particulier $[\![p;q]\!] = \emptyset$ si $p > q$ et $[a;b] = \emptyset$ si $a > b$.

Ex. 1.20 ***Expliciter les ensembles suivants*** $A = \{n \in \mathbb{N}, 2|n\}$, $B = 2\mathbb{R}$, $C = \{x \in \mathbb{R}, x \notin \mathbb{Q}\}$, $D = \{p \in \mathbb{N}, p > 1 \,\mathbf{et}\, \forall n \in [\![2;p-1]\!], n \not| p\}$, $E = \pi\mathbb{Z}$.

Cor. 1.20

c) Définition comme image directe

En anticipant sur la section IV., on peut aussi donner un troisième mode de définition d'ensembles :

Définition 1.25

Étant donné deux ensembles E, F et une application $f : E \to F$, ***l'ensemble des éléments de*** F ***qui peuvent s'écrire*** $f(x)$ ***pour*** $x \in E$ est un sous-ensemble de F noté

$$A = \{f(x), x \in E\}$$

On dit alors que A est défini ***comme image directe***.

Notation

$A = \{f(x), x \in E\}$ est aussi noté $f(E)$.

Remarque

Un ensemble défini comme image directe peut aussi être défini en compréhension puisque $A = \{f(x), x \in E\}$ ....

Ex. 1.21 ***Expliciter (sans justification) les ensembles suivants*** $A = \exp(\mathbb{R})$, $B = \sin(\mathbb{R})$, $C = \cos^2(\mathbb{R})$, $D = \ln(\mathbb{R}_+^*)$.

Cor. 1.21

IV. Applications et fonctions

IV.1. Définitions et notations

Définition 1.26

On appelle ***application*** ou ***fonction*** f d'un ensemble E ***dans*** un ensemble F (ou ***vers*** F) une correspondance qui à tout élément de E associe un ***unique*** élément de F.
E est appelé ***ensemble de départ*** de la fonction f et F est appelé ***ensemble d'arrivée*** de la fonction f.
Étant donné $x \in E$, $f(x)$ est appelé ***l'image de*** x ***par*** f
et x ***un antécédent de*** $f(x)$ ***par*** f.

Important !

Pour définir une fonction il faut donc donner ***deux ensembles*** E et F, et un procédé permettant d'associer à ***tout*** élément de E ***un unique*** élément de F. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, il peut cependant arriver que l'on omette de donner E ou F.
On retiendra par ailleurs que l'image d'un élément $x \in E$ par f ***existe et est unique*** tandis qu'il ***est possible qu'un élément*** $y \in F$ ***ne possède aucun ou plusieurs antécédents***.

Notation

Les éléments nécessaires à la définition d'une fonction sont résumés dans les notations
$f : \begin{cases} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ ou plus simplement $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$.
L'ensemble de toutes les applications d'un ensemble E donné vers un ensemble F donné est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou encore F^E. On note $\mathcal{F}(E) = E^E$ l'ensemble de toutes les applications de E vers lui-même.

Définition 1.27

On appelle fonction ***réelle*** d'une variable ***réelle*** toute application d'une partie $I \subset \mathbb{R}$ vers une partie $J \subset \mathbb{R}$.

IV.2. Restriction d'une application

Définition 1.28 (Restriction d'une application)

Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et $P \subset E$ une partie de E. On appelle ***restriction*** de f à P l'application $\tilde{f} : \begin{cases} P & \to & F \\ x \in P \subset E & \mapsto & f(x) \end{cases}$.

Notation

On note souvent $f_{|P}$ la restriction de f à $P \subset E$. Il peut aussi arriver qu'on note par abus f la restriction de f à P en précisant simplement une fois à quelle partie P on se restreint par la suite.

IV.3. Composition d'applications

Définition 1.29 (Composée)

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
On appelle ***composée de** g **et de** f* l'application notée $g \circ f$ et définie par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$

Important ! La composition n'est pas commutative

La définition que nous venons de donner de la composée de deux fonctions $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est cohérente puisque dans l'expression de $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$, l'image de x par f est un élément de F qui possède à son tour une image par g :

$$\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & f(x) \in F \arrow[r, "g"] & g\big(f(x)\big) \in G \end{tikzcd}$$

En revanche, $\cancel{f \circ g}$ n'a à priori ***aucune signification***.

IV.4. Injections, surjections, bijections

Définition 1.30 (Injections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***injection***, ou encore qu'elle est ***injective***, si tout élément de F a ***au plus un*** antécédent par f.
Traduction symbolique : f est injective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 1.31 (Surjections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***surjection***, ou encore qu'elle est ***surjective***, si tout élément de F a ***au moins un*** antécédent par f. Traduction symbolique : f est surjective $\Leftrightarrow$ ....

Définition 1.32 (Bijections)

On dit qu'une application f de E dans F est une ***bijection***, ou encore qu'elle est ***bijective***, si elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si tout élément de F a ***exactement un*** antécédent par f.

Méthode

- Pour démontrer qu'une ***fonction continue d'un intervalle*** $I \subset \mathbb{R}$ ***à valeurs dans un intervalle*** $J \subset \mathbb{R}$ est injective, surjective ou bijective, une simple étude de fonction peut suffire :
  - $\star$ on étudie la monotonie de la fonction : si elle est strictement monotone, alors elle est injective ;
  - $\star$ on étudie ses extremums ou ses limites : si ils correspondent aux bornes de l'ensemble d'arrivée ***et que la fonction est continue***, alors elle est surjective ;
  - $\star$ si la fonction est injective et surjective, ...

  Le tout peut être résumé dans un tableau de variations.
- Sinon :
  - $\star$ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est injective on rédige ainsi :
    « ***Soient*** x ***et*** x' ***deux éléments de*** E ***tels que*** $f(x) = f(x')$***. Montrons que*** $x = x'$***.*** »
  - $\star$ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est surjective on rédige ainsi :
    « ***Soit*** $y \in F$***. Montrons qu'il existe*** $x \in E$ ***tel que*** $y = f(x)$***.*** »
  - $\star$ Pour démontrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on montre qu'elle est ***injective et surjective***.

Ex. 1.22 (Cor.) ***Les applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?***

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$ $\qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + x^2 \end{cases}$

$h : \begin{cases} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{cases}$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Ex. 1.23 Étudier la fonction $k : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 2x^2 + x \end{array}\right.$.
Montrer que $k_{|[1;+\infty[}$ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

Proposition 1.33 (Composée d'injections, de surjections, de bijections)

Soit E, F, G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Les réciproques des implications précédentes sont fausses.

Démonstration

Ex. 1.24 Soit E, F et G trois ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3) Montrer que les réciproques des deux implications précédentes sont fausses.
4) Que peut-on conclure si $g \circ f$ est bijective ?

IV.5. Bijection réciproque

Définition 1.34

Étant donnée une bijection $f : E \to F$, on appelle ***bijection réciproque*** de f l'application $F \to E$ qui à tout $y \in F$ associe l'unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

Notation

On note $f^{-1} : F \to E$ la bijection réciproque de $f : E \to F$.

Propriété 1.35 (Propriétés des bijections réciproques)

Si $f : E \to F$ est bijective :

1) $\forall x \in E, f^{-1}\left(f(x)\right) = x$;
2) $\forall y \in F, f\left(f^{-1}(y)\right) = y$;
3) on a l'équivalence suivante : $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration

Définition 1.36 (Application identité)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***application identité de*** E et on note id_E l'application de E dans E qui à tout élément x de E associe x lui-même :

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \to & E \\ x & \mapsto & \mathrm{id}_E(x) = x \end{cases}$$

Remarque

La propriété 1.35 s'écrit donc, pour $f : E \to F$ bijective :

1) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$;
2) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

La troisième propriété - $\forall x \in E, \forall y \in F, (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$ - est utile pour ***obtenir l'expression de la bijection réciproque d'une application*** f ***bijective*** : en effet, étant donnée une application $f : E \to F$ bijective, obtenir l'expression de sa bijection réciproque revient à ***résoudre l'équation*** $y = f(x)$ ***d'inconnue*** $x \in E$ ***où*** $y \in F$ ***est donné***.

Ex. 1.25 ***Compléter***

- Pour une bijection $f : E \to F$, on a $f^{-1} : F \to E$ bijective et $(f^{-1})^{-1}$ ....
- $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ sont ....
- La fonction carré $c : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}_+$ .... mais sa restriction à $\mathbb{R}_+$ ... . et la fonction racine carrée $r : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ est ....
- La fonction $h : \begin{cases} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{cases}$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ de l'exercice 1.22 est une bijection dont la bijection réciproque est h^{-1} : ....

Ex. 1.26 Soit E et F deux ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, E)$.

1) Montrer que f et g sont deux bijections réciproques l'une de l'autre si et seulement si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ **et** $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
2) Que peut-on affirmer si $g \circ f = \mathrm{id}_E$?

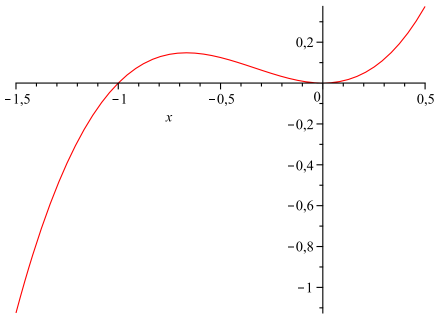
IV.6. Graphe, représentations graphiques

Définition 1.37

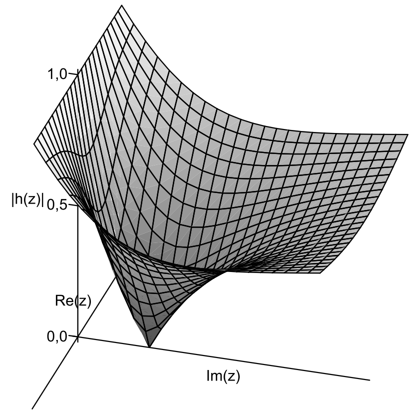
On appelle ***graphe*** d'une application $f : E \to F$ l'ensemble $\{(x; f(x)), x \in E, f(x) \in F\}$. Dans le cas où ce graphe est une partie de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle aussi ***représentation graphique de*** f (souvent notée $\mathcal{C}_f$) et il s'interprète comme un ensemble de points du plan ou de l'espace rapporté à un repère.

Propriété 1.38 (Représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque)

On rapporte le plan à un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ orthonormé. Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est



(a) Fonction g de l'exercice 1.22



(b) Fonction $|h|$ de l'exercice 1.22

FIGURE 1.2 – Représentations graphiques

déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

Ex. 1.27 Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} \in J$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. Donner une expression de f^{-1}. Représenter graphiquement f et sa bijection réciproque.

Cor. 1.27

V. Équations

V.1. Définitions

Définition 1.39

On appelle ***équation*** une égalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
On appelle ***inéquation*** une inégalité faisant intervenir une ou plusieurs variables ***inconnues***.
Les parties gauche et droite sont appelées ***membres*** de l'équation ou de l'inéquation.
On appelle ***système*** un ensemble d'équations ou d'inéquations.
L'ensemble des valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système ont une signification est appelé ***ensemble ou domaine de définition***.
Les valeurs des inconnues pour lesquelles l'équation, l'inéquation ou le système sont vrais sont appelées ***solutions***. Trouver ces valeurs, c'est ***résoudre*** l'équation, l'inéquation ou le système.

Méthode

Pour résoudre une équation, une inéquation ou un système, il faut ***toujours commencer***

par obtenir leur domaine de définition.

V.2. Résolution d'une équation

Méthode : Pour résoudre une équation

- il faut ***autant que possible raisonner par équivalences***. La propriété 1.35 garantit qu'on obtient une équation équivalente en appliquant une même bijection aux deux membres d'une équation ;
- si on utilise des implications, ***il faut vérifier que les valeurs obtenues sont solution de l'équation de départ*** ;
- dans le cas d'équations de degré 2 ou plus, factoriser puis utiliser le fait ***qu'un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul***. On dispose aussi de la méthode du discriminant pour les équations polynomiales du second degré ;
- si l'équation dépend d'un paramètre, il est parfois nécessaire de distinguer (le plus tard possible) différents cas permettant de conclure.

Ex. 1.28 (Cor.) Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes
1) $\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}$ 2) $m(m+5)x=6x$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre

V.3. Résolution d'un système d'équations

Méthode : Pour résoudre un système d'équations

- à nouveau ***autant que possible raisonner par équivalences***. Notamment, ***on prendra soin de toujours conserver le même nombre de lignes pour les systèmes***, sauf dans le cas où plusieurs lignes sont identiques.
- utiliser ***soit la méthode par combinaisons des lignes***, ***soit la méthode de substitutions des inconnues*** (voir exemple).
  D'une manière générale, la méthode par combinaisons des lignes est préférable car plus efficace.

Remarque

On retiendra par ailleurs qu'un système linéaire de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à n inconnues peut avoir :

- soit un unique n-uplet solution ;
- soit aucune solution ;
- soit une infinité de solutions.

Ex. 1.29 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant par les méthodes de combinaison et de substitution :

$$\begin{cases} 3x-5y & = & -9 \\ x-y & = & 1 \end{cases}$$

Cor. 1.29

Ex. 1.30 Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants par la méthode de combinaison des lignes :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+5 & = & y+z \\ y & = & 1+3x-z \\ x+2y+2z & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ x+2y+3z & = & 0 \\ x+4y+9z & = & -1 \end{array} \right.$$

Cor. 1.30

VI. Exercices corrigés

Cor. 1.22 :

- f est bijective. En effet f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
  - ⋆ $f'(x) = 3x^2 > 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$. Donc f est strictement croissante, donc injective.
  - ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, comme par ailleurs f est continue, pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, il existe un réel x tel que $y = f(x)$, donc f est surjective.
- g est surjective ce qui se démontre comme dans l'exemple précédent. Par ailleurs, $g(-1) = -1+1 = 0 = g(0)$. 0 possède au moins deux antécédents par g qui n'est donc pas injective.
- h est bijective. En effet :
  - ⋆ h est injective : soient $z, z' \in H$ tels que $h(z) = h(z')$. Montrons que $z = z'$.

$$\begin{array}{rcl} h(z) = h(z') & \Rightarrow & \dfrac{z-i}{z+i} = \dfrac{z'-i}{z'+i} \Rightarrow \overbrace{(z-i)(z'+i) - (z+i)(z'-i) = 0}^{\text{car } \mathcal{I}m(z+i)>0, \mathcal{I}m(z'+i)>0 \text{ donc } z+i\neq 0, z'+i\neq 0} \\ & \Rightarrow & zz' + iz - iz' + 1 - zz' + iz - iz' - 1 = 0 \Rightarrow 2i(z-z') = 0 \Rightarrow z = z' \end{array}$$

  - ⋆ h est surjective : soit $Z \in D$. Montrons qu'il existe $z \in H$ tel que $Z = h(z)$.

$$\begin{array}{rcl} Z = h(z) & \Leftrightarrow & Z = \dfrac{z-i}{z+i} \text{ avec } z+i \neq 0 \text{ si } z \in H \\ & \Leftrightarrow & (z+i)Z = z-i \text{ car } z+i \neq 0 \\ & \Leftrightarrow & z(Z-1) = -iZ - i \\ & \Leftrightarrow & z = \dfrac{i(Z+1)}{1-Z} \text{ car } |Z| < 1 \text{ donc } Z-1 \neq 0 \end{array}$$

Montrons que $z = \dfrac{i(Z+1)}{1-Z} \in H$. On a $\dfrac{i(Z+1)}{1-Z} = a+ib$ et $\overline{a+ib} = a-ib = \dfrac{-i(\bar{Z}+1)}{1-\bar{Z}}$.

Donc $\mathcal{I}m\left(\dfrac{i(Z+1)}{1-Z}\right) = b = \dfrac{\dfrac{i(Z+1)}{1-Z} - \dfrac{-i(\bar{Z}+1)}{1-\bar{Z}}}{2i}$. Puis en simplifiant :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}m\left(\dfrac{i(Z+1)}{1-Z}\right) & = & \dfrac{i(Z+1)(1-\bar{Z}) + i(\bar{Z}+1)(1-Z)}{2i\,|1-Z|^2} \\ & = & \dfrac{Z - |Z|^2 + 1 - \bar{Z} + \bar{Z} - |Z|^2 + 1 - Z}{2\,|1-Z|^2} = \dfrac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} > 0 \text{ car } |Z| < 1 \end{array}$$

Graphiquement, voici ce que ça donne :

Espace de départ.

Espace d'arrivée.

Animation de la transformation.

Cor. 1.28 : 1) Ensemble de définition : pour que cette équation ait un sens il faut que :
• $6-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 6$
• $3-x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 3$
• $x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$
• $4-3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$
On résout donc l'équation sur $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$. Les deux membres étant positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, l'équation équivaut à $\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{3-x}\right)^2 = \left(\sqrt{x+5}+\sqrt{4-3x}\right)^2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 9-2x+2\sqrt{6-x}\sqrt{3-x} = 9-2x+2\sqrt{x+5}\sqrt{4-3x}\\
&\Leftrightarrow \quad (6-x)(3-x) = (x+5)(4-3x)\\
&\Leftrightarrow \quad 18-9x+x^2 = 20-11x-3x^2\\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2+x-1=0
\end{aligned}$$

La méthode du discriminant ou l'utilisation de la racine évidente -1 permettent de conclure que cette équation possède deux solutions $\left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$ - qui appartiennent toutes les deux à l'ensemble de définition $\left[-5; \frac{4}{3}\right]$.
2) $m(m+5)x = 6x \Leftrightarrow \left(m^2+5m-6\right)x = 0$.
Si $m^2+5m-6 \neq 0$, alors il existe une unique solution $x=0$.
Si $m^2+5m-6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{-6; 1\}$, alors tout réel x est solution.

Maths - Chapitre 2

Ensembles finis, calcul littéral

I. Programme officiel

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Modes de raisonnement : raisonnement par récurrence.	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.
c) Applications	
Famille d'éléments d'un ensemble E indexée par un ensemble fini.	

Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.	
PGCD de deux entiers naturels non nuls. PPCM	$\leftrightarrows$ Informatique : algorithme d'Euclide.
Définition d'un nombre premier. Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.	Les démonstrations de l'existence et de l'unicité sont hors programme. $\leftrightarrows$ Informatique : crible d'Eratosthène.

Calculs algébriques

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie de nombres complexes. Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Sommes triangulaires.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Coefficients binomiaux et formule du binôme	
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notations $\binom{n}{p}$.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.	
Formule et triangle de Pascal.	Lien avec la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en classe de Première.
Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	

II. Les entiers

II.1. Relation d'ordre totale

Définition 2.1 (Relation d'ordre totale)

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont munis d'une relation d'ordre $\leqslant$, c'est-à-dire d'une relation binaire vérifiant

- Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leqslant x$.
- Antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow y = x$.
- Transitivité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3, (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$.

Cette relation d'ordre est totale, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Remarque

- Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $x \leqslant y$ équivaut à $y \geqslant x$.
- Le fait d'exiger qu'une relation d'ordre soit totale garantit qu'elle est réflexive.
- La relation binaire $<$ n'est pas une relation d'ordre.

II.2. Bornes et extremums d'une partie

Définition 2.2 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{Z}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si pour tout $x \in E$, $x \leqslant M$.
On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{Z}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si pour tout $x \in E$, $m \leqslant x$.
Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Définition 2.3 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus grand élément*** $M \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***maximum de*** E si ....

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{Z}$ possède ***un plus petit élément*** $m \in \mathbb{Z}$ aussi appelé ***minimum de*** E si ....

Proposition 2.4 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Démonstration

Notation

On note $\max E$ le maximum de E s'il existe et $\min E$ le minimum de E s'il existe.

Axiome 2.5 (Propriété fondamentale des entiers)

Toute partie ***non vide minorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Toute partie ***non vide majorée*** de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

Comme $\mathbb{N}$ est lui-même minoré par 0, toute partie ***non vide*** de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

II.3. Démonstration par récurrence

Méthode : Démonstration par récurrence faible

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence faible, que l'on présentera toujours ainsi*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***est vrai***. On peut ***éventuellement*** vérifier que $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$ sont aussi vrais pour avoir une idée de la façon dont on va effectuer la prochaine étape de la démonstration.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie, ***en énonçant clairement cette propriété appelée hypothèse de récurrence***. On démontre alors, sous cette hypothèse, que $P(n+1)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : on termine par une simple phrase résumant les deux étapes de la démonstration :
  « ***La propriété est initialisée au rang*** $n = n_0$ ***et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout entier*** $n \geqslant n_0$. »

En résumé, on démontre : $\overbrace{P(n_0)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+1) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$

II.4. Division euclidienne

Propriété 2.6 (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un couple $(q,r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.

Démonstration

Corollaire 2.7 (Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, b-1]\!]$ tel que $a = bq + r$.
q est appelé ***quotient*** et r est appelé ***reste*** de la ***division euclidienne*** de a par b.

Définition 2.8 (Multiple, diviseur)

Étant donnés $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, on dit :
- que b ***divise*** a ou que b est ***un diviseur de*** a ;
- que a est ***un multiple de*** b.

Notation

Si $b \in \mathbb{N}^*$ divise $a \in \mathbb{Z}$, on note $b|a$ ou encore $a \equiv 0\,[b]$.
Sinon, on note $b \nmid a$.

Ex. 2.1 Soit $x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x < 100$.
Montrer que le nombre obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Cor. 2.1

II.5. Plus grand diviseur commun, plus petit multiple commun

Proposition 2.9 (PGCD,PPCM)

Étant donnés $a, b \in \mathbb{N}^*$, les deux entiers suivants sont toujours définis
- on appelle ***plus grand diviseur commun*** à a et b le maximum de l'ensemble

$$\mathcal{D} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, (n|a \textbf{ et } n|b) \right\}$$

- on appelle ***plus petit multiple commun*** à a et b le minimum de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, (a|n \textbf{ et } b|n) \right\}$$

Démonstration

Notation

On note PGCD$(a;b)$ le plus grand diviseur commun à a et b et PPCM$(a;b)$ le plus petit multiple commun à a et b.

II.6. Nombres premiers

Définition 2.10

On dit qu'un entier $n > 1$ est ***premier*** s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Théorème 2.11 (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose de façon unique (à l'ordre près) en produit de facteurs premiers.

Démonstration hors programme

Ex. 2.2 Donner l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 30.

Cor. 2.2

Ex. 2.3 Décomposer les nombres $a = 105$, $b = 170$ et $c = 231$ en produit de facteurs premiers puis calculer $\mathrm{PGCD}(a,b), \mathrm{PGCD}(a,c), \mathrm{PGCD}(b,c), \mathrm{PPCM}(a,b), \mathrm{PPCM}(a,c), \mathrm{PPCM}(b,c)$.

Cor. 2.3

II.7. Ensembles finis, infinis

Définition 2.12

On dit qu'un ensemble E est ***fini*** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $e : E \to [\![1;n]\!]$.
Sinon, on dit que E est ***infini***.

Remarque

- Par convention, $\emptyset$ est considéré comme un ensemble fini : on choisit $n = 0$ et $e : \emptyset \to [\![1;n]\!] = \emptyset$.
- L'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 2.12 s'interprète simplement comme ***le nombre d'éléments*** d'un ensemble fini E et la bijection $e : E \to [\![1;n]\!]$ comme ***une numérotation de ses éléments***.

Proposition 2.13 (Cardinal d'un ensemble fini)

Si E est un ensemble fini alors l'entier $n \in \mathbb{N}$ intervenant dans la définition 2.12 est unique.

On appelle ***cardinal*** de E cet entier.

Démonstration hors programme

Notation

Le cardinal d'un ensemble E fini est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.

III. Sommes et produits finis

III.1. Famille finie d'éléments d'un ensemble

Définition 2.14 (Famille finie)

Étant donné un ensemble E, on appelle ***famille de*** $n \in \mathbb{N}$ ***éléments de*** E toute application $a : [\![1; n]\!] \to E$. Si $n = 0$, la famille est dite ***vide***.

$a(1)$, $a(2)$, etc... sont appelés ***éléments de la famille*** a.

Un même élément de E peut apparaître plusieurs fois dans une même famille.

Notation

On préfère généralement la notation a_1, a_2, etc... pour les éléments de la famille a.

III.2. Sommes et produits finis de nombres complexes

Notation

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{C}$, on note

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ (somme vide)} \\ a_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \prod_{1 \leq i \leq n} a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \text{ (produit vide)} \\ a_n \times \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} a_i & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

$$\text{et} \quad n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n \text{ prononcé } \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{avec} \quad 0! = 1.$$

Remarque

De façon plus simple, on pourrait écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

Cependant, la définition précédente, ***donnée par récurrence***, montre qu'un des outils principaux pour le calcul des sommes et des produits finis est ....

Par ailleurs, les écritures du type $\sum_{i=m}^{n} a_i$ sont valides et la section III.5. les généralisera plus encore.

Ex. 2.4 (Cor.) [$*$] Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

Propriété 2.15

Étant donnés $n, p \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}$ et une famille a de n éléments de $\mathbb{C}$,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (\lambda a_i) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i)^p = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^p$$

La démonstration rigoureuse se fait par récurrence. Plus simplement, la première formule consiste à factoriser le facteur commun λ, la seconde à regrouper les n facteurs λ en début de produit, la dernière à utiliser la formule $(ab)^p = a^p b^p$ sur un nombre fini de facteurs.

III.3. Techniques de calcul de sommes et de produits

Ex. 2.5 Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{i(i+1)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1}$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i(i+1)}$.

Cor. 2.5

Méthode : Regroupement de termes, changement d'indice, télescopage

Pour simplifier l'expression d'une somme ou d'un produit fini, on peut utiliser les principes suivants :

- ***Regroupement de termes*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $\sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i+1}$.
- ***Changement d'indice*** : pour $m, n, k \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i$ et $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} a_{m+n-i}$

  Dans l'exemple précédent, on a écrit $-\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i+1} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \cdots - \dfrac{1}{n+1} = -\sum_{i=2}^{n+1} \dfrac{1}{i}$.
- ***Télescopage*** : pour $m, n \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=m}^{n} a_i - \sum_{i=m}^{n} a_{i+1} = a_m - a_{n+1}$ car les termes s'annulent deux à deux sauf le premier terme de la première somme et le dernier terme de la seconde somme.

Dans l'exemple précédent :

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$	1	$\cancel{\frac{1}{2}}$	$\cancel{\cdots}$	$\cancel{\frac{1}{n}}$	
$\displaystyle-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1}$		$\cancel{-\frac{1}{2}}$	$\cancel{\cdots}$	$\cancel{-\frac{1}{n}}$	$-\frac{1}{n+1}$

- Des principes similaires sont applicables aux produits.

Ex. 2.6 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

Cor. 2.6

Ex. 2.7 (Cor.) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

III.4. Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie

Proposition 2.16 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite arithmétique complexe vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n\frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au ***produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier*** de ces termes.

Démonstration

Proposition 2.17 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de $n \in \mathbb{N}$ termes consécutifs d'une suite géométrique complexe de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1}\frac{1-q^n}{1-q}$$

Autrement dit, la somme de n ***termes*** consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale au ***produit du premier terme par*** $\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

Démonstration

Corollaire 2.18

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$, $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$.

Démonstration

Remarque

Pour $n = 0$, le corollaire précédent s'écrit $x^0 - y^0 = 1 - 1 = 0$ d'une part, $(x-y)\sum_{k=0}^{-1} x^{-1-k}y^k = 0$ d'autre part, car la somme est vide.

Ex. 2.8 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} ix^{i-1}$.

Cor. 2.8

Ex. 2.9 Pour quelle(s) valeur(s) de $n \in \mathbb{N}$ le nombre $4^n - 1$ est-il premier ?

Cor. 2.9

III.5. Généralisations des sommes finies

Définition 2.19 (Famille finie (bis))

Étant donnés un ensemble E et un ensemble I ***fini***, on appelle ***famille d'éléments de*** E ***indexée par*** I toute application $a : I \to E$.
Si $I = \emptyset$, la famille est dite ***vide***.

Notation

Un cas fréquent de généralisation de la notion de famille finie est celui où $I = [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$ avec $n, p \in \mathbb{N}$. Les éléments de la famille $a : [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!] \to E$ sont alors le plus souvent notés $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$.

Définition 2.20 (Somme double)

Étant donnés deux entiers $n, p \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres complexes indexée par $I = [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on appelle ***somme double*** des éléments de a la somme

$$\sum_{(i,j)\in I} a_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

Remarque

En principe, dans la définition précédente, il faudrait démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectue les ***sommes finies*** n'a pas d'incidence sur le résultat.

Méthode : Somme double

Pour le calcul d'une somme double $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, il est ***souvent plus facile***

- de commencer par calculer $T_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_i$
- ou de commencer par calculer $U_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ puis de calculer $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} U_j$.

Ex. 2.10 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} i - j$.

Cor. 2.10

Ex. 2.11 (Cor.) Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} (i-j)^2$.

Proposition 2.21 (Produit de deux sommes finies)

Étant donnés une famille a de $n \in \mathbb{N}$ nombres complexes et une famille b de $p \in \mathbb{N}$ nombres complexes, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} (a_i b_j)$$

Démonstration

Ex. 2.12 Simplifier pour $n, p \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} ij$.

Cor. 2.12

Définition 2.22 (Sommes triangulaires)

Étant donnés un entier $n \in \mathbb{N}$ et une famille a de nombres complexes indexée par $I = [\![1;n]\!]^2$, on appelle ***somme triangulaire*** des éléments de a les sommes du type

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}\right) \qquad \text{(triangulaire large)}$$

$$\sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}\right) \qquad \text{(triangulaire stricte)}$$

Méthode : Sommes triangulaires

Pour le calcul d'une somme triangulaire, on peut utiliser la même méthode que pour le calcul des sommes doubles.
Par ailleurs, il existe un lien entre les sommes triangulaires et les sommes doubles explicité ci-dessous :

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & j & & \\ \hline & a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ & a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ i & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce lien peut permettre de calculer
- des sommes doubles à l'aide de sommes triangulaires, ou réciproquement
- des sommes triangulaires à l'aide de sommes doubles.

Ex. 2.13 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$.

Cor. 2.13

Ex. 2.14 (Cor.) Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i-j)^2$.

IV. Coefficients binomiaux et formule du binôme

IV.1. Coefficients binomiaux

Définition 2.23

On appelle ***coefficients binomiaux*** les nombres définis par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times p}$$

$\binom{n}{p}$ se lit « p ***parmi*** n ».

Propriété 2.24

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0, n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \text{ et } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Démonstration

Ex. 2.15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} =$ ...., $\binom{n}{3} =$ ....
De même, $\binom{n+1}{2} =$ ...., $\binom{n+2}{3} =$ ...., etc.Que valent $\binom{7}{2}$, $\binom{8}{6}$, $\binom{10}{7}$? ....

Propriété 2.25 (Formule de Pascal [1])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![0; n-1]\!], \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

Démonstration

Méthode : Triangle de Pascal

Les propriétés des coefficients binomiaux permettent de les calculer en remplissant le triangle ci-dessous appelé ***triangle de Pascal***. Cette méthode est ***beaucoup plus efficace que le recours aux factoriels.***

1. **Blaise Pascal**(1623;1662), mathématicien, physicien et philosophe français, il a notamment contribué à fonder la théorie des probabilités et la théorie statique des gaz.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	1	1	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	1		1	↓	↓	↓	↓	↓
3	1			1	↓	↓	↓	↓
4	1				1	↓	↓	↓
5	1					1	↓	↓
6	1						1	↓
7	1							1

IV.2. Formule du binôme de Newton[2]

Théorème 2.26 (Formule du binôme de Newton)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Démonstration

Corollaire 2.27

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration

Ex. 2.16 Développer les expressions suivantes en utilisant la formule du binôme et le triangle de Pascal :

$(a+b)^3 =$ .... $(a-b)^3 =$ ....
$(a+b)^4 =$ .... $(a-b)^4 =$ ....
$(x+1)^3 =$ .... $(x-2)^4 =$ ....

Ex. 2.17 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} 2^i \binom{n}{i}$.

Cor. 2.17

2. **Newton**(1643 ;1727), mathématicien et physicien anglais ayant fondé la mécanique des solides, la théorie de la gravitation et le calcul différentiel (en même temps et indépendamment de Leibniz).

Ex. 2.18 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i} - \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

En déduire $T = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i}$ et $U = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}$.

Cor. 2.18

IV.3. Utilisation des coefficients binomiaux et de la formule du binôme

Méthode : Simplification de sommes finies

La section IV. fournit des outils pour la simplification des sommes finies :

- ***Télescopage*** : pour utiliser la méthode du télescopage page 33 dans la simplification d'une somme $\displaystyle\sum_i a_i$, il faut réussir à écrire $a_i = b_{i+1} - b_i$. La formule de Pascal peut permettre d'y parvenir. En effet, elle peut se réécrire en posant $n = N + i$ et $p = N$
$\forall N \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\binom{N+i}{N} = \binom{N+i+1}{N+1} - \binom{N+i}{N+1}$ (deuxième formule de Pascal)
- ***Dérivation ou primitivation*** : nous avons déjà utilisé cette méthode sur l'exemple 2.8. Il s'agit, lorsque la somme $S(x)$ dépend d'une ***variable*** x ***réelle***, de dériver ou de primitiver $S(x)$ pour retomber sur une somme connue.

Ex. 2.19 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \frac{\binom{n}{i}}{i+1}$.

Cor. 2.19

Ex. 2.20 Écrire pour $n \in \{0; 1; 2; 3\}$ la somme $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant n} \binom{n+i}{i}$ puis la simplifier pour $n \in \mathbb{N}$.

Cor. 2.20

V. Exercices corrigés

Cor. 2.4 : On le démontre par l'absurde. Supposons qu'il est fini non vide (2 est premier) et numérotons ses éléments : $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Considérons alors le nombre $N = 1 + \displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i$.
Par définition, le reste de la division de N par chacun des nombres p_1, p_2, …, p_n est 1 donc aucun des éléments de $\mathcal{P}$ ne divise N.
Or $N > 1$ se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers ce qui est absurde puisque

qu'aucun des éléments de $\mathcal{P}$ ne divise N.
Donc $\mathcal{P}$ est infini.

Cor. 2.7 : Comme on donne l'expression simplifiée de la somme, le plus simple est de faire un démonstration par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- ***Initialisation*** : pour $n = 0$, la somme est vide donc nulle et le membre droit est nul aussi. Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.
- ***Hérédité*** : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et calculons $S_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2$.
  $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc
  $S_{n+1} = (n+1)\left(\dfrac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right) = (n+1)\left(\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$.
- ***Conclusion*** : la propriété est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Une autre méthode consisterait à écrire :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2+i\right) - \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) - \frac{n(n+1)}{2}$
puis d'écrire $i(i+1) = \dfrac{i(i+1)(i+2)-(i-1)i(i+1)}{3}$ pour obtenir la première somme par télescopage.
Une question se pose cependant concernant cette seconde méthode : comment peut-on avoir l'idée d'écrire $i(i+1) = \dfrac{i(i+1)(i+2)-(i-1)i(i+1)}{3}$? C'est tout l'intérêt de la formule de Pascal sous sa seconde forme (voir IV.3.).

Cor. 2.11 : On a $T_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}(i-j)^2 = \sum_{j=1}^{p}\left(i^2-2ij+j^2\right) = pi^2 - 2i\frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ d'après l'exercice 2.7. D'où :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\left(pi^2 - ip(p+1) + \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right)\\
&= p\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - p(p+1)\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\\
&= pn\frac{2n^2+2n+n+1-3pn-3p-3n-3+2p^2+2p+p+1}{6}\\
&= \frac{np\left(2n^2+2p^2-1-3np\right)}{6}
\end{aligned}$$

Cor. 2.14 : On a $S' = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}(i-j)^2 = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{6}$ d'après l'exercice 2.11.

Or $S' = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i-j)^2 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(i-i)^2 + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)^2 = 2S$. Donc $S = \dfrac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$.

Maths - Chapitre 3

Techniques de calcul différentiel

I. Programme officiel

Techniques fondamentales de calcul en analyse

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations. Intervalles de $\mathbb{R}$.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum.	
B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto af(x)$, $x \mapsto f(ax)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ ou $f(x) \leqslant \lambda$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme, produit, composée.	
Monotonie.	
Bijectivité, réciproque d'une bijection.	Graphe d'une réciproque.
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont admis à ce stade. ⇆SI : étude cinématique. ⇆PC : exemples de calculs de dérivées partielles. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Tableau de variation.	
Dérivée d'une réciproque.	Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.
Dérivées d'ordre supérieur.	
c) Étude d'une fonction	
Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

II. Inégalités dans $\mathbb{R}$

II.1. Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est, comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Cette relation est ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$:

Définition 3.1 (Compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations)

La relation d'ordre $\leqslant$ vérifie les propriétés suivantes, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

- compatibilité avec l'addition : $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$;
- compatibilité avec la multiplication : $(x \leqslant y$ et $0 \leqslant z) \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z$.

Elle est dite ***compatible avec les opérations du corps*** $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Ex. 3.1 Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Cor. 3.1

Remarque

- L'exemple précédent montre que des notions comme celle de croissance d'une fonction ne sont pas définies pour les fonctions à valeurs complexes. Il s'ensuit que certains théorèmes se généralisent mal - ou pas du tout - à de telles fonctions.
  Il convient donc de bien comprendre d'emblée qu'il existe une différence fondamentale entre $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, même si comme nous le verrons au chapitre 5 certaines généralisations sont possibles.
- La relation binaire $<$ n'est ni réflexive, ni antisymétrique. Elle est transitive et la compatibilité avec les opérations se généralise :
  - ⋆ compatibilité avec l'addition : $x < y \Rightarrow x + z < y + z$;
  - ⋆ compatibilité avec la multiplication : $(x < y$ et $0 < z) \Rightarrow x \times z < y \times z$.

Propriété 3.2

Si x et y sont deux réels, alors

$$x \leqslant y \Leftrightarrow -x \geqslant -y \qquad xy \geq 0 \Leftrightarrow (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \qquad x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \text{ ont même signe}$$

$$0 < x \leqslant y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \qquad 0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant y^2$$

Démonstration

II.2. Bornes et extremums d'une partie

Les notions de majorants, minorants, bornes, maxima, minima et extremums vues pour les entiers au chapitre 2 se généralisent à $\mathbb{R}$ puisqu'il est totalement ordonné. Notamment :

Proposition 3.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

Ex. 3.2 Quels sont les majorants et les minorants de $\mathbb{R}_+$? de $\mathbb{R}_-$?

Cor. 3.2

Ex. 3.3 $[0; 1[$ admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Mêmes questions pour $\mathbb{R}_+$.

Cor. 3.3

Ex. 3.4 Soit $E = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, y = x + \frac{1}{x} \right\}$.
E est-il minoré ? Possède-t-il un minimum ?

Cor. 3.4

Proposition 3.4

Si une partie E de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément M (respectivement un plus petit élément m), alors c'est aussi le plus petit de ses majorants (respectivement le plus grand de ses minorants).

Démonstration

Remarque

- Si une partie E de $\mathbb{R}$ est majorée par M, alors tout réel $M' \geqslant M$ est aussi un majorant de E.
- La remarque précédente et la proposition 3.4 permettent d'affirmer que l'ensemble des majorants d'une partie E de $\mathbb{R}$ est :
  - ⋆ l'ensemble vide si E n'est pas majorée ;
  - ⋆ un intervalle non majoré dans le cas général ;
  - ⋆ un intervalle de la forme $[\max E; +\infty[$ si E possède un plus grand élément.
- Des propriétés similaires sont vérifées par l'ensemble des minorants d'une partie E de $\mathbb{R}$. Ces remarques seront précisées dans le chapitre sur les suites réelles.

Proposition 3.5 (Extremums d'une partie finie de $\mathbb{R}$)

Toute partie A ***finie*** non vide de nombres réels possède un plus petit élément et un plus grand élément.

Démonstration

Notation

La proposition précédente autorise à définir les notations suivantes pour une famille a finie de $n \in \mathbb{N}^*$ éléments de $\mathbb{R}$: on note

$$\min_{i=1}^{n} a_i = \min_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \min_{1 \leq i \leq n} a_i \text{ le plus petit élément de la famille}$$

et

$$\max_{i=1}^{n} a_i = \max_{i \in [\![1;n]\!]} a_i = \max_{1 \leq i \leq n} a_i \text{ le plus grand élément de la famille}$$

II.3. Valeur absolue

Définition 3.6

Pour tout réel x, on appelle ***valeur absolue de*** x le maximum de x et de $-x$.

Notation

On note $|x| = \max\{x; -x\}$ la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$.

Les propriétés de la proposition suivante sont laissées à titre d'exercice.

Proposition 3.7 (Propriétés élémentaires de la valeur absolue)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
- $|x - y| = r \Leftrightarrow (x = y - r \text{ ou } x = y + r)$
- $|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- si $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$
- $|x| \leqslant r \Leftrightarrow (-r \leqslant x \leqslant r)$
- $|x| < r \Leftrightarrow (-r < x < r)$
- $|x| = r \Leftrightarrow (x = r \text{ ou } x = -r)$
- $|x - y| \leqslant r \Leftrightarrow (y - r \leqslant x \leqslant y + r)$
- $|x| = -x \Leftrightarrow x \leqslant 0$
- si $x \neq 0$, $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$

Proposition 3.8 (Inégalités triangulaires)

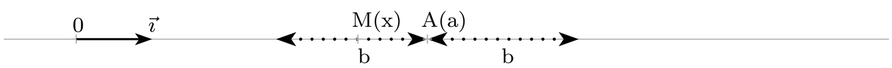
Soit x et y des réels. Alors

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \qquad \text{et} \qquad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

Démonstration

Remarque

- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$. De plus, si $r \geq 0$, alors $|x| \leqslant r \Leftrightarrow x^2 \leqslant r^2$ et $|x| \geqslant r \Leftrightarrow x^2 \geqslant r^2$.
- On rapporte la droite réelle à un repère $(O; \vec{\imath})$. Pour deux réels x et y, la valeur absolue $|y - x|$ s'interprète géométriquement comme la distance entre les points $M(x)$ et $N(y)$: $MN = |y - x|$. Étant donnés deux réels a et b, l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leqslant b$ d'inconnue x s'interprète donc géométriquement comme l'ensemble des points $M(x)$ dont la distance au point $A(a)$ est inférieure à b.



Ex. 3.5 Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $(x + 5)(2x - 1) \leq (3x - 7)(2x - 1)$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x + 1}} > \dfrac{\sqrt{x}}{x - 1}$

Cor. 3.5

Ex. 3.6 Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$.

Cor. 3.6

Ex. 3.7 Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|>3$.

Cor. 3.7

Ex. 3.8 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inégalité $|x+1|+|x-3|<6$.

Ex. 3.9 (Cor.) [$*$] Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $g(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$. Montrer que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$$

III. Fonctions réelles d'une variable réelle

Dans ce qui suit, on rapporte le plan à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ orthonormé.

III.1. Représentations graphiques

Définition 3.9

Une fonction f réelle d'une variable réelle n'est bien définie que lorsqu'on explicite à la fois ses ensembles de départ D et d'arrivée A et une manière d'obtenir l'image $f(x)\in A$ de tout élément $x\in D$. Lorsque l'ensemble de départ est omis, on appelle ***ensemble de définition*** de la fonction f, souvent noté $\mathcal{D}_f$, l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ donnée peut être calculée. Par exemple, l'ensemble de définition de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^*$.

Proposition 3.10 (Représentations graphiques et opérations sur les fonctions)

Soit $a,b,k\in\mathbb{R}$ et $f:x\in[a;b]\mapsto f(x)\in\mathbb{R}$ une fonction. Alors la représentation graphique :

1) de la fonction $x\in[a,b]\mapsto f(x)+k\in\mathbb{R}$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $k\vec{\jmath}$;
2) de la fonction $x\in[a-k,b-k]\mapsto f(x+k)\in\mathbb{R}$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $-k\vec{\imath}$;
3) de la fonction $x\in[k-b,k-a]\mapsto f(k-x)\in\mathbb{R}$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $x=\frac{k}{2}$;
4) de la fonction $x\in[a,b]\mapsto kf(x)\in\mathbb{R}, k\neq 0$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale autour de l'axe des abscisses de rapport k ;
5) de la fonction $x\in\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]\mapsto f(kx)\in\mathbb{R}, k>0$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par l'affinité orthogonale autour de l'axe des ordonnées de rapport $\frac{1}{k}$;

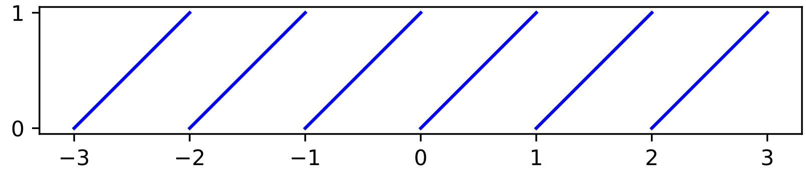
6) de la fonction $x \in [ka, kb] \mapsto kf\left(\frac{x}{k}\right) \in \mathbb{R}, k > 0$ est déduite de $\mathcal{C}_f$ par l'homothétie de centre O de rapport k.

Démonstration

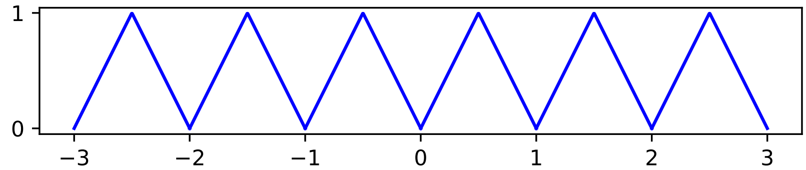
Remarque

On peut étendre la proposition aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et pour les deux derniers points la proposition reste valable en adaptant les ensembles de départ si $k < 0$.

Ex. 3.10 On appelle ***partie entière d'un réel*** x le plus grand entier inférieur à x. La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$.
La représentation graphique de la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est donnée ci-dessous.



À l'aide des transformations de la propriété 3.10 et de la fonction ***valeur absolue***, donner une expression de la fonction g dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



Proposition 3.11 (Rappel)

Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une bijection. Alors la représentation graphique de la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f est déduite de $\mathcal{C}_f$ par la symétrie orthogonale autour de la droite d'équation $y = x$.

Démonstration

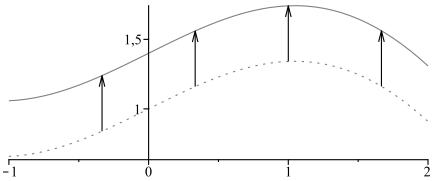
C'est la propriété 1.38 démontrée page 22. Elle est illustrée par la figure 3.2 page 50.

III.2. Symétries des représentations graphiques

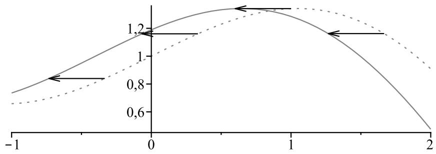
Définition 3.12 (Parité d'une fonction)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $-x \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.

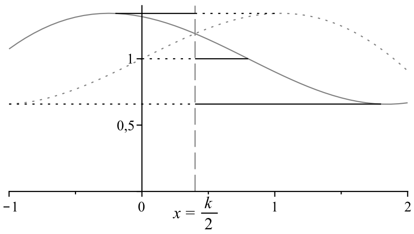
- On dit que f est ***paire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est ***impaire*** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.



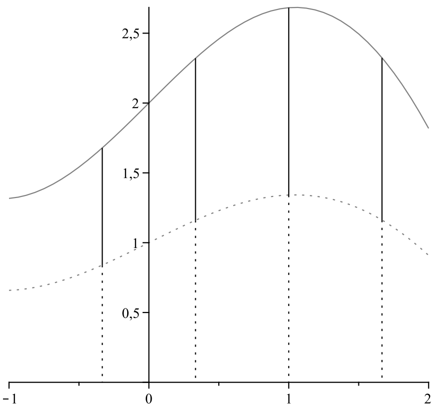
(a) $u \mapsto f(u) + k$



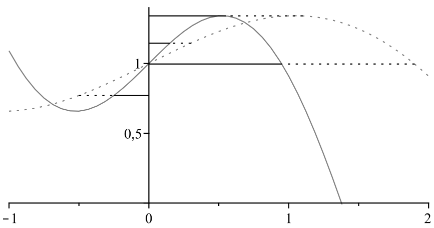
(b) $u \mapsto f(u + k)$



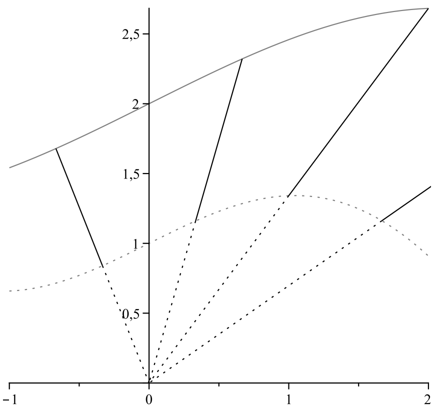
(c) $u \mapsto f(k - u)$



(d) $u \mapsto kf(u)$



(e) $u \mapsto f(ku)$



(f) $u \mapsto kf\left(\frac{u}{k}\right)$

FIGURE 3.1 – Représentations graphiques et opérations sur les fonctions

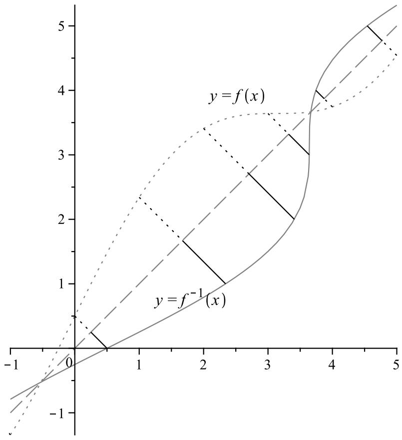


FIGURE 3.2 – Représentations graphiques de f et f^{-1}

Définition 3.13 (Périodicité d'une fonction)

Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$, D une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in D$, $x + p \in D$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f est ***périodique de période*** p si pour tout $x \in D$, $f(x + p) = f(x)$. On dit alors que p est ***une période*** de f.

Remarque

- Dans la définition précédente, on peut aussi admettre sans modification de signification les périodes strictement négatives.
- Si p est une période, alors tout multiple entier (positif) non nul de p en est aussi une.

Proposition 3.14 (Symétrie de la représentation graphique d'une fonction)

- Si f est une fonction paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est une fonction impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
- Si f est une fonction périodique de période p, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $p\vec{\imath}$.

Démonstration

Ex. 3.11 Quelles sont les symétries de la représentation graphique de la fonction cos ?

Cor. 3.11

III.3. Bornes et extremums d'une fonction

Définition 3.15 (Majorant, minorant)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on appelle M ***majorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \leqslant M$.
On dit que f est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on appelle m ***minorant de*** f, si pour tout $x \in D$, $f(x) \geqslant m$.
Une fonction qui est minorée par m et majorée par M est dite ***bornée*** par m et M.

Remarque

Dire qu'une fonction est majorée (respectivement minorée, bornée) équivaut à dire que son image $f(D)$ est majorée (respectivement minorée, bornée). Les propriétés des parties de $\mathbb{R}$ bornées s'adaptent donc immédiatement aux fonctions réelles bornées.

Proposition 3.16 (Caractérisation des fonctions bornées)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$. La fonction $f : D \to A$ est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration

Définition 3.17 (Maximum global, minimum global)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : D \to A$ une fonction.
On dit que f admet un ***maximum global*** $M \in A$ ***en*** $x_0 \in D$ si $M = f(x_0)$ est le plus grand élément de $f(D)$.
On dit que f admet un ***minimum global*** $m \in A$ ***en*** $x_0 \in D$ si $m = f(x_0)$ est le plus petit élément de $f(D)$.

Important ! Unicité des extremums globaux

La proposition 3.3 permet d'affirmer que si une fonction admet un maximum global (ou un minimum global), alors celui-ci est unique. Cependant, ce maximum (ou ce minimum) possède alors un ***ou plusieurs*** antécédent(s).

Notation

On note $\max\limits_{x \in D} f(x)$ le maximum global de f s'il existe et $\min\limits_{x \in D} f(x)$ le minimum global de f s'il existe.

Ex. 3.12 La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 3.12

Ex. 3.13 La fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est-elle majorée ? minorée ? Si oui, possède-t-elle un maximum global ? un minimum global ?

Cor. 3.13

III.4. Monotonie

Définition 3.18 (Croissance, décroissance, monotonie)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction et I une partie de D.

- On dit que f est ***croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement croissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- On dit que f est ***décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- On dit que f est ***strictement décroissante sur*** I si $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- On dit que f est ***monotone sur*** I si elle est croissante ou décroissante sur I et ***strictement monotone sur*** I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Important ! Intervalles et monotonie

On a défini la croissance, la décroissance ou la monotonie de f sur une partie I quelconque de l'ensemble de départ D. Mais il vaut mieux penser à cette partie comme à un ***intervalle***. En effet, les propriétés caractérisant la monotonie d'une fonction dérivable par exemple (voir proposition 3.28) sont valables sur un intervalle. Ainsi, la fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$ puisque $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.

Proposition 3.19 (Stricte monotonie et injectivité)

Soit D et A deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to A$ une fonction strictement monotone. Alors f est injective.
La réciproque est fausse.

Démonstration

Ex. 3.14 Démontrer que si $f : I \subset \mathbb{R} \to J \subset \mathbb{R}$ est une bijection strictement monotone, alors sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que f.

Cor. 3.14

Méthode : Montrer qu'une fonction n'est pas monotone

Pour montrer qu'une fonction f n'est pas monotone sur un intervalle I, il suffit de trouver un triplet $(a; b; c) \in I^3$ tels que

$$(a < b < c) \textbf{ et } \Big(\big(f(a) \leqslant f(b) \textbf{ et } f(c) \leqslant f(b) \big) \textbf{ ou } \big(f(a) \geqslant f(b) \textbf{ et } f(c) \geqslant f(b) \big) \Big)$$

Ex. 3.15 Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cor. 3.15

IV. Éléments de calcul différentiel

La plupart des résultats donnés dans cette section sont admis et ne seront démontrés que dans le cadre du chapitre consacré à la dérivabilité.
Dans toute la section, I et J sont deux ***intervalles*** réels ***contenant une infinité de points***.

IV.1. Définition

Définition 3.20 (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I. On dit que f est ***dérivable en*** a si l'application $x \in I \setminus \{a\} \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$ admet une limite finie en a. Cette limite s'appelle alors le ***nombre dérivé de*** f ***en*** a et se note $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque

- Si f est dérivable en a, on peut aussi écrire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.
- Pour $x \neq a$, le quotient $\tau_f(x, a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ s'appelle le ***taux d'accroissement de la fonction*** f ***entre*** a ***et*** x ; il représente la pente de la droite passant par les points $A(a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ du plan rapporté à un repère.
- Le nombre dérivé représente donc la pente de la droite limite obtenue lorsque M tend vers A : cette droite est la tangente à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$.

Définition 3.21 (Tangente en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point a de I. Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la droite d'équation cartésienne

$$y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$$

est la ***tangente à la courbe représentative*** $\mathcal{C}_f$ ***de*** f ***au point*** $A(a, f(a))$.
Cette définition est illustrée par la figure 3.3.

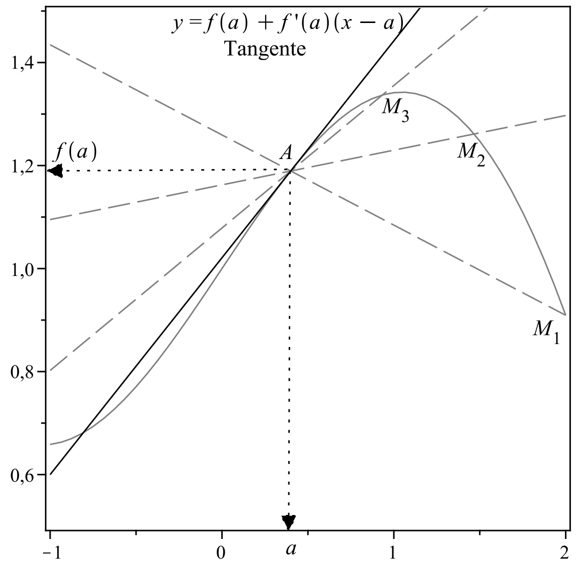


FIGURE 3.3 – Nombre dérivé et tangente en un point

Définition 3.22 (Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée)

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas, $f' : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}\right.$ s'appelle la ***fonction dérivée*** de f.

On note f'' la dérivée de f' si elle existe, etc. et pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ la dérivée n^{e} de f.

IV.2. Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3.23 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la ***combinaison linéaire*** $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Proposition 3.24 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.

Théorème 3.25 (Bijection continue)

Soit f une fonction continue sur I.

f est une bijection de I sur $f(I)$ si et seulement si f est strictement monotone.

De plus, sa bijection réciproque f^{-1} est alors continue sur $f(I)$, strictement monotone, de même monotonie que f.

Théorème 3.26 (Dérivée de la bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable en tout $y \in J$ pour lequel $f' \circ f^{-1}(y) \neq 0$ et alors $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$.
Cette proposition est illustrée par la figure 3.4 page 55.

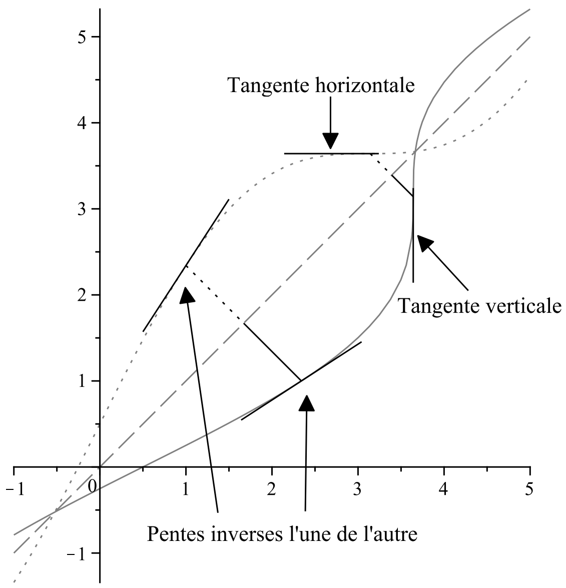


FIGURE 3.4 – Dérivées d'une bijection et de sa réciproque

Remarque

La formule $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$ donnant la dérivée de la réciproque d'une bijection s'interprète graphiquement (voir figure 3.4). En effet, la proposition 1.38 démontre que les représentations graphiques d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite (d) d'équation $y = x$. Notamment, la tangente au point $A(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$ et la tangente au point $B(f(a), a)$ de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à (d). Si aucune des deux n'est horizontale (c'est-à-dire si les dérivées de f ou de f^{-1} ne s'annulent pas), alors ces deux tangentes sont les représentations graphiques de deux fonctions affines bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ réciproques l'une de l'autre.
Or, pour une fonction affine $g(x) = mx + p$, $g^{-1}(x) = \dfrac{x - p}{m}$: les pentes des deux tangentes sont inverses l'une de l'autre.

À propos des notations et de l'interprétation physique

En physique, le symbole Δ est utilisé pour désigner la différence entre deux valeurs prises par une même quantité en des valeurs distinctes de la variable. En utilisant cette notation, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et x serait ainsi noté

$$\tau_f(x,a) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Cette notation est ambiguë puisqu'on ne précise généralement pas entre quels points doivent être calculées les différences entrant en jeu. Le sens à lui donner variera suivant le contexte. Cependant, elle revêt un grand intérêt intuitif. Notamment, elle justifie que l'on note $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = f'(a)$ le nombre dérivé de f au point a : remplacer Δ par d signifie implicitement que l'on opère des « différences infinitésimales » c'est-à-dire que l'on calcule une ***limite***. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{(au point } a\text{)}$$

Ce type d'interprétation et de notations permet de retenir facilement certaines des formules données ci-dessus. Par exemple, si la trajectoire d'un objet est donnée par une certaine fonction $y(x)$, comme par ailleurs x et y dépendent tous deux du temps, la composante de la vitesse de l'objet suivant l'axe des ordonnées à l'instant t_0 est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x(t_0))$$

qui est une autre façon d'écrire la formule $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$.
En mathématiques, on évite généralement ces notations à cause de leur ambiguïté et ***elles ne peuvent en aucun cas constituer une démonstration***. Il n'est cependant pas interdit de comprendre leur intérêt, d'abord parce qu'elles sont très utilisées en physique, ensuite parce qu'elles permettent, comme on vient de le voir, de parvenir à un point de vue simple et synthétique sur la notion de dérivée, enfin parce qu'elles sont parfois utilisées dans certains domaines des mathématiques elles-mêmes.
C'est le cas des ***fonctions de plusieurs variables***. En physique, par exemple, l'énergie potentielle d'un objet dans un champ de force dépend de sa position : on écrira donc dans le cas général l'énergie potentielle sous la forme $E(x,y,z)$. Lorsque l'on souhaite dériver une telle fonction, il devient important de préciser ***par rapport à quelle variable*** on effectue la dérivation. La notation adoptée (en mathématiques comme en physique) est alors la suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial x}(a,b,c) &= \lim_{h \to 0} \frac{E(a+h,b,c) - E(a,b,c)}{h} \\
\frac{\partial E}{\partial y}(a,b,c) &= \lim_{h \to 0} \frac{E(a,b+h,c) - E(a,b,c)}{h} \\
\frac{\partial E}{\partial z}(a,b,c) &= \lim_{h \to 0} \frac{E(a,b,c+h) - E(a,b,c)}{h}
\end{aligned}$$

On parle alors de ***dérivée partielle par rapport à*** x (respectivement par rapport à y ou par rapport à z). Le symbole ∂ remplace le d des « différences infinitésimales » afin de bien insister sur le fait que la fonction que l'on dérive dépend de plusieurs variables et que l'on dérive partiellement par rapport à l'une d'entre elles.

Pour finir, précisons qu'en physique il existe une notion de ***dérivation totale*** des fonctions de plusieurs variables que nous n'aborderons pas ici et que dans le cas particulier où l'on dérive par rapport au temps la dérivée se note souvent $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}\ldots$

Ex. 3.16 Calculer la dérivée de $g : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

Cor. 3.16

Ex. 3.17 Calculer les dérivées partielles de $h : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + xy - \dfrac{y}{x}$ pour $x \neq 0$.

Cor. 3.17

Ex. 3.18 Calculer les dérivées partielles de $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

Cor. 3.18

IV.3. Propriétés des fonctions dérivables

On rappelle que I est un intervalle réel contenant une infinité de points.

Proposition 3.27 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée f' est nulle sur I.

Proposition 3.28 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur I.

- Si $f' \geqslant 0$ sur I, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur I, alors f est décroissante sur I.

Définition 3.29 (Zéro isolé d'une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que $x_0 \in I$ est un ***zéro isolé de*** f si

- $f(x_0) = 0$;
- il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $x_0 \in J$ et tel que f ne s'annule pas sur $J \backslash \{x_0\}$.

Proposition 3.30 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ ***continue et dérivable*** sur I. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' est de signe constant sur I et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Remarque

La condition donnée dans la proposition 3.30 s'interprète (et s'utilise) de la façon suivante :

- la dérivée f' est de signe constant, donc la fonction est monotone ;
- si de plus f' ne s'annule qu'en des ***zéros isolés*** alors la fonction est strictement monotone.

Définition 3.31 (Extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I.

- On dit que m est un ***minimum local*** de f s'il existe $\alpha > 0$ tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$.
- On dit que M est un ***maximum local*** de f s'il existe $\alpha > 0$ tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$.

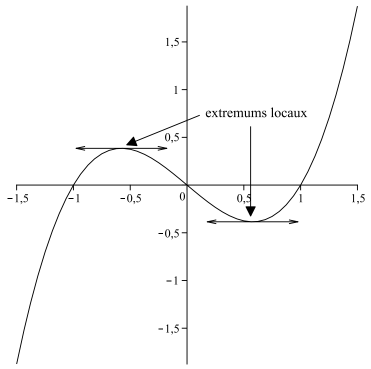


FIGURE 3.5 – Des extremums locaux mais non globaux

Proposition 3.32 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

Soit a un point de I qui n'est pas une de ses extrémités et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Remarque

- La proposition 3.32 donne une condition ***suffisante*** mais ***non nécessaire***. ....
- Un maximum global (respectivement minimum global) est ***par définition*** un maximum local (respectivement minimum local). La réciproque est fausse comme le montre la figure 3.5.

IV.4. Étude pratique des fonctions

Définition 3.33 (Asymptotes à une représentation graphique)

- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée ***asymptote verticale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée ***asymptote horizontale*** $\mathcal{C}_f$.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et s'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est appelée ***asymptote oblique*** $\mathcal{C}_f$.

Méthode : Étude et représentation graphique d'une fonction f

1) On commence, s'il n'est pas donné, par obtenir l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2) On cherche les symétries (parité, périodicité...), on réduit l'intervalle d'étude.
3) On cherche l'***ensemble de dérivabilité*** c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels le nombre dérivé $f'(x)$ est défini.
4) On calculer f', éventuellement on cherche à prolonger cette dérivée aux points où elle n'était pas ***à priori*** définie.
5) On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le ***tableau de variations de*** f : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes ; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f.
6) On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f.
7) On construit la représentation graphique et on y place :
   - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale ;
   - les asymptotes ;
   - éventuellement quelques tangentes, notamment lorsqu'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de sa dérivée.

Ex. 3.19 (Cor.) Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$.

Ex. 3.20 (Cor.) Étudier et représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}$.

Ex. 3.21 (Cor.) Étudier et représenter graphiquement la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ex. 3.22 (Cor.) Étudier et représenter graphiquement la fonction $k : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.

Méthode : Obtention des extremums globaux d'une fonction

D'après la proposition 3.32, pour une fonction f continue sur un intervalle I dont on a construit le tableau de variation, on cherche les extremums globaux parmi les images :

- des extrémités de l'intervalle I si ce sont des réels ;
- des points de I où la dérivée s'annule en changeant de signe ;
- des points où la fonction n'est pas dérivable.

La comparaison des valeurs de f en ces points et de ses limites éventuelles permet de conclure quant à l'existence et à la valeur éventuelle des extremums globaux de f.

Ex. 3.23 Les fonctions f, g, h et k des exercices 3.19 à 3.22 sont-elles bornées ? possèdent-t-elles des extremums sur $\mathbb{R}$?

Cor. 3.23

Méthode : Montrer qu'une fonction $f : I \to J$ dérivable est bijective

D'après la proposition 3.25, on vérifie que

- la dérivée f' est de signe constant sur I et ne s'annule qu'en des points isolés ;
- les limites ou les valeurs de f aux bornes de I donnent bien les bornes de J : $f(I) = J$.

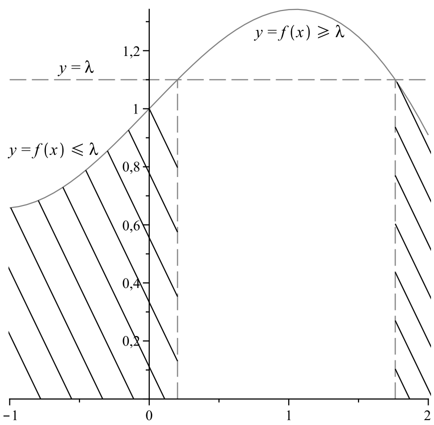
Ex. 3.24 Les fonctions f, g, h et k des exercices 3.19 à 3.22 sont-elles bijectives ? Si oui, leur bijection réciproque est-elle dérivable ? Si non, peut-on restreindre l'ensemble de définition de la fonction de sorte à en faire une bijection ?

Cor. 3.24

Résoudre une inéquation

Pour résoudre une inéquation :

- on peut utiliser les propriétés de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ en partant d'inégalités satisfaites par hypothèses ou déjà démontrées ;
- il est souvent fructueux d'utiliser la règle selon laquelle « le signe d'un produit est le produit des signes » en ramenant l'inégalité à la factorisation de la différence de ses deux membres ;
- étudier le signe des expressions entre valeurs absolues puis faire un tableau de signes permettant d'envisager tous les cas possibles se révèle souvent synthétique et efficace ;
- si elle est du type $f(x) \leqslant \lambda$, l'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ « se trouvant sous la droite d'équation $y = \lambda$ » donne l'ensemble des solutions de l'inéquation. Si c'est une équation du type $f(x) = \lambda$, cela revient à trouver tous les antécédents de λ ;



- il peut être intéressant d'étudier la fonction f puis de résoudre séparément l'inéquation sur des intervalles sur lesquels f est strictement monotone donc injective.

Ex. 3.25 Résoudre l'inéquation $x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} \geqslant 1$ en réutilisant les résultats de l'exemple 3.20 page 59.

Cor. 3.25

IV.5. Primitives d'une fonction continue

Définition 3.34

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que F est une ***primitive*** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Proposition 3.35 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction $F : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Corollaire 3.36

Si f est continue sur $[a; b]$, alors elle admet une infinité de primitives sur $[a; b]$ et quelle que soit la primitive F choisie, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ noté $[F(t)]_a^b$.

V. Correction des exercices

Cor. 3.8 : On a $|x+1| = x+1 \Leftrightarrow x \geqslant -1$ et $|x-3| = x-3 \Leftrightarrow x \geqslant 3$. On en déduit que l'inégalité à résoudre est donnée suivant la valeur de x par le tableau suivant :

Valeur de x	-1		3
Inégalité à résoudre	$-x-1-x+3<6$	$x+1-x+3<6$	$x+1+x-3<6$

Sur $]-\infty;-1]$, l'inégalité équivaut donc à $-2x+2<6$ d'où un premier ensemble de solutions $S_1 =]-2;-1]$. De même, sur $[-1;3]$, l'inégalité devient $4<6$ qui est trivialement vraie d'où $S_2=[-1;3]$. Enfin, sur $[3;+\infty[$, on résout $2x<8$ qui conduit à $S_3=[3;4[$. Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est $]-2;4[$.

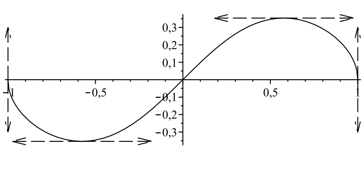
Cor. 3.9 : On distingue plusieurs cas :

- si x et y sont positifs, alors l'inégalité à démontrer est $\dfrac{x+y}{1+x+y} \leqslant \dfrac{x}{1+x}+\dfrac{y}{1+y}$ qui est équivalente à $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x+y)+y(1+x)(1+x+y)$. En développant partiellement le membre de droite, cette inégalité devient $(x+y)(1+x)(1+y) \leqslant x(1+y)(1+x)+xy(1+y)+y(1+x)(1+y)+xy(1+x)$ c'est-à-dire après simplification $xy(2+x+y) \geqslant 0$. Or cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x,y\in\mathbb{R}_+$.
- si $-x \leqslant y \leqslant 0$, alors $0 \leqslant x+y \leqslant x$.
  Donc $g(x+y) = \dfrac{x+y}{1+x+y} = \dfrac{x+y+1-1}{1+x+y} = 1-\dfrac{1}{1+x+y} \leqslant 1-\dfrac{1}{1+x} = g(x)$.
  La fonction g étant positive, on a a fortiori $g(x+y) \leqslant g(x)+g(y)$.
- les autres cas se ramènent aux précédents en échangeant le rôle de x et y et en utilisant la parité de g. Par exemple, pour $y \leqslant -x \leqslant 0$, on a $g(x+y)=g(-x-y) \leqslant g(-y)$ d'après le cas précédent, etc.

Cor. 3.19 : $f(x)$ est définie si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$, donc f est définie sur $[-1,1]$. La fonction est impaire puisque pour $x\in[-1,1]$, $f(-x) = -x\dfrac{\sqrt{1-(-x)^2}}{1+(-x)^2} = -f(x)$. On réduit l'intervalle d'étude à $I=[0,1]$. La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, donc, à moins de simplification, f n'est pas dérivable si $1-x^2=0$: f est dérivable sur $J=I\backslash\{1\}=[0,1[$.
Sur J, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} + x\dfrac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}(1+x^2)-\sqrt{1-x^2}\times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-3x^2}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x^2)^2}$ après simplifications, qui est du signe de $1-3x^2$.
Or, $1-3x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
Signe de $f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
Variations de $f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0

En $x=0$, $y=f(0)=0$ et $f'(0)=1$, donc la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y=x$. En $x=1$, $f(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=-\infty$, donc la tangente au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $x=1$. On obtient finalement la représentation graphique suivante :



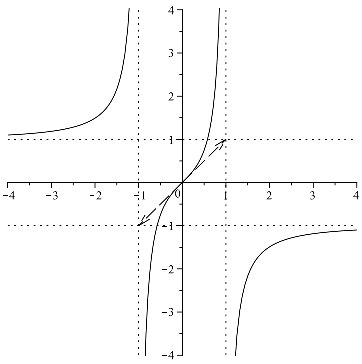
Cor. 3.20 : $g(x)$ est définie si et seulement si $1-x^2\neq 0$. Donc g est définie sur $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. La fonction est impaire. On réduit le domaine d'étude à $D=[0,1[\cup]1;+\infty[$. La fonction g est dérivable sur D.

Sur D, $g'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} + x\dfrac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}(1-x^2) - \sqrt{1+x^2}\times(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{1+x^2}\,(1-x^2)^2}$ après simplifications. $g'(x)$ est donc positive pour tout $x \in D$. On en déduit le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	0		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	1 $+$		‖	$+$	
Variations de $g(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	-1

En $x=0$, $y=g(0)=0$ et $g'(0)=1$, donc la tangente au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y=x$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2} > 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x^2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = -\infty$.

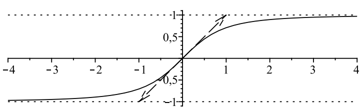
Enfin, pour $x>1$, $g(x) = x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} = \dfrac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$. En utilisant l'imparité de g, on en déduit que les droites d'équation $x=-1$, $x=1$, $y=-1$ et $y=1$ sont asymptotes à $\mathcal{C}_g$. On obtient finalement la représentation graphique suivante :



Cor. 3.21 : La fonction est définie, dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, on l'étudie sur $\mathbb{R}_+$. $h'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ après simplification. La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, pour $x>0$, $h(x) = \dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$. On en déduit le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	0	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	1 $+$	
Variations de $h(x)$	0 $\nearrow$	1

avec une tangente d'équation $y=x$ en 0 et deux asymptotes d'équation $y=\pm 1$.



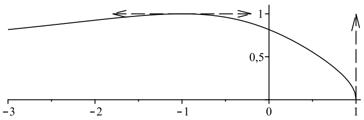
Cor. 3.22 : La fonction est définie si et seulement si $2-2x \geqslant 0$ c'est-à-dire sur $I =]-\infty;1]$ et dérivable sur $\overset{o}{I} =]-\infty;1[$. Sur $\overset{o}{I}$, $k'(x) = \dfrac{\dfrac{-2(3+x^2)-2x(2-2x)}{(3+x^2)^2}}{2\sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}} = \dfrac{x^2-2x-3}{(3+x^2)^2\sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}}$

après simplifications. $k'(x)$ est donc du signe de $x^2 - 2x - 3$, trinôme du second degré pour lequel $\Delta = 4 + 12 = 16$ et dont les racines sont $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x_2 = 3 > 1$. k' est donc positive sur $]-\infty, -1]$ et négative sur $[-1, 1[$, tendant vers $-\infty$ en 1.

Enfin, pour $x < 0$, $k(x) = \sqrt{\dfrac{\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{3}{x^2} + 1}} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. On obtient le tableau de variations suivant :

Valeurs de x	$-\infty$		-1		1
Signe de $k'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
Variations de $k(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En $x = 1$, $k(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} k'(x) = -\infty$, donc la tangente au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $x = 1$. De plus, la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale, d'équation $y = 1$ et la courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.



Maths - Chapitre 4

Nombres complexes

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Partie réelle et partie imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct.
b) Module d'un nombre complexe	
Module.	Interprétation géométrique de $\|z-z'\|$, cercles et disques.
Relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1, trigonométrie	
Cercle trigonométrique, paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver des formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de e^{it} pour t réel. Si t et t' sont deux réels, alors $e^{i(t+t')} = e^{it}e^{it'}$.	Factorisation de $1 \pm e^{it}$. Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.	
Formules d'Euler : $\cos(t) = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$	Linéarisation, calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kt)$, de $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
d) Argument d'un nombre complexe non nul	
Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Arguments d'un nombre complexe non nul. Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$. Argument d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t-\phi)$.	$\leftrightarrows$ PC et SI : amplitude et phase.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{\mathcal{I}m(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. $\leftrightarrows$ PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.
Exponentielle d'une somme.	

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Rudiments de logique	
Modes de raisonnement : par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

II. Résumé du cours

II.1. Définitions

Notation

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble $i\mathbb{R} = \{ib, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres imaginaires.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$ des nombres complexes.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $a = a + 0i$ (réel pur), $ib = 0 + ib$ (imaginaire pur) et $0 = 0 + 0i$.
On peut donc écrire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Définition 4.1

Étant donné un nombre complexe $z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ on appelle

- ***conjugué*** de z le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$;
- ***module*** de z le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$;
- ***partie réelle*** de z le nombre réel $\mathcal{R}e\,(z) = a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$;
- ***partie imaginaire*** de z le nombre **réel** $\mathcal{I}m\,(z) = b = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.

Méthode : Parties réelles et imaginaires

Pour obtenir la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe, les formules $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ peuvent s'avérer ***extrêmement efficaces***.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, on montre que $\mathcal{I}m\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = z$.
Pour montrer qu'un nombre complexe z est imaginaire, on montre que $\mathcal{R}e\,(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2} = 0$ c'est-à-dire que $\bar{z} = -z$.

Ex. 4.1 On considère deux nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Cor. 4.1

Propriété 4.2

Quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$ on a :

1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2) $\overline{-z} = -\bar{z}$
3) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
4) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
5) $\bar{\bar{z}} = z$
6) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$
7) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$
8) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
9) $z\bar{z} = |z|^2$
10) Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
11) $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
12) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
13) Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Théorème 4.3 (Première inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, |z+z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}_+$.

Théorème 4.4 (Seconde inégalité triangulaire)

$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2, ||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

Définition 4.5

On appelle ***affixe*** du point $M(a; b)$ ou du vecteur $\vec{u}(a; b)$ le nombre complexe $z = a + ib$.

Notation

Étant donnés $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note :
$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$ le ***disque ouvert de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\overline{\mathcal{D}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leqslant r\}$ le ***disque fermé de centre*** z_0 ***et de rayon*** r ***;***
$\mathcal{C}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = r\}$ le ***cercle de centre*** z_0 ***et de rayon*** r***.***

Notamment, $|z - z_0|^2 = r^2$ est ***une équation cartésienne du cercle de centre*** $C(z_0)$ ***et de rayon*** r.

Ex. 4.2 Donner une équation cartésienne du cercle de centre $A(3;-1)$ et de rayon 3.

Cor. 4.2

Propriété 4.6 ($\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire)

Les fonctions $\mathcal{R}e : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I}m : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$-***linéaires*** c'est-à-dire

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{R}e\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{R}e\,(z_1) + \mu \mathcal{R}e\,(z_2) \\ \mathcal{I}m\,(\lambda z_1 + \mu z_2) & = & \lambda \mathcal{I}m\,(z_1) + \mu \mathcal{I}m\,(z_2) \end{array} \right.$$

« ***Essentiellement, les calculs avec les nombres complexes suivent les mêmes règles que ceux avec les nombres réels*** ».

- $0 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour l'addition*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \exists z' \in \mathbb{C}, z + z' = 0$: tout complexe possède un ***symétrique*** pour l'addition
  z' est noté $-z$ et appelé ***opposé*** de z
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z + z' = z' + z$: l'addition complexe est ***commutative***
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') + z'' = z + (z' + z'') = z + z' + z''$: l'addition complexe est ***associative***
- $1 \in \mathbb{C}$: il existe un ***élément neutre pour la multiplication*** vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
- $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists z' \in \mathbb{C}^*, z \times z' = 1$: tout complexe non nul possède un ***symétrique*** pour la multiplication
  z' est noté $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ et appelé ***inverse*** de z
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, z \times z' = z' \times z$: la multiplication complexe est ***commutative***
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'') = zz'z''$: la multiplication complexe est ***associative***
- $\forall (z, z', z'') \in \mathbb{C}^3, (z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$: la multiplication complexe est ***distributive*** sur l'addition complexe

Définition 4.7 (Structure de corps)

Pour résumer l'ensemble de ces propriétés, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un ***corps*** : cela signifie très exactement que ***l'ensemble des nombres complexes possède une addition et une multiplication internes*** qui vérifient les propriétés que nous venons de donner.

II.2. Nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, autrement dit
$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
$\mathbb{U}$ a notamment pour éléments 1, i, -1 et $-i$.

Propriété 4.8

L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 vérifie les propriétés :

- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}$ est un élément de $\mathbb{U}$;
- il existe dans $\mathbb{U}$ un élément neutre pour la multiplication (c'est 1) ;
- tout élément de $\mathbb{U}$ possède un inverse dans $\mathbb{U}$;
- la multiplication est commutative et associative.

Définition 4.9

On résume les propriétés précédentes en disant que $(\mathbb{U}, \times)$ est un ***groupe commutatif***.

Proposition 4.10

Tout nombre complexe non nul s'écrit de façon unique comme produit d'un réel strictement positif et d'un nombre complexe de module 1 :
$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists!(r, u) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}, z = ru.$

Important ! Quantificateur $\exists!$

Le quantificateur $\exists!$ qui se lit ***« Il existe un unique »*** signifie qu'un prédicat est vérifié pour ***une et une seule valeur*** de la variable quantifiée.
Il convient de faire ***très attention avec ce quantificateur*** : presque tout ce que nous avons dit pour les deux autres quantificateurs ($\forall$ et $\exists$) est ***faux*** pour « Il existe un unique ».

Méthode : « Il existe un unique »...

Pour démontrer une propriété faisant intervenir le quantificateur $\exists!$, on démontre :

- ***l'existence*** : il suffit de trouver une valeur de la variable quantifiée qui convient ;
- ***l'unicité*** : on montre que si le prédicat est vérifié pour deux valeurs, alors elles sont égales.

Il peut parfois être intéressant de démontrer ***d'abord l'unicité, puis l'existence***. Dans ce cas, on procède à un raisonnement par ***analyse-synthèse*** (voir ci-dessous).

Méthode : Raisonnement par analyse-synthèse

Il s'agit d'un raisonnement permettant d'obtenir l'ensemble des solutions à un problème donné :

- ***Analyse*** : ***on suppose l'existence de solutions*** au problème que l'on se pose, on tente d'obtenir une caractérisation aussi contraignante que possible de ces solutions. Ceci revient à obtenir une (ou plusieurs) ***condition(s) nécessaire(s)*** à l'existence d'une solution.

Dans le cas où la caractérisation est suffisamment contraignante, elle permet de montrer l'unicité de la solution.

- ***Synthèse*** : on vérifie que ***la ou les conditions nécessaires précédentes*** sont aussi ***suffisantes***.

Ex. 4.3 On reprend l'exercice 1.22 du chapitre 1 : soit $h : \left\{ \begin{array}{l} H \to D \\ z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \right.$ où $H = \{z \in \mathbb{C}, \mathcal{I}m\,(z) > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

1) Montrer que h est bien définie sur H et que $\forall z \in H, h(z) \in D$.
2) Montrer que $\forall Z \in D, \exists! z \in H, h(z) = Z$.
3) Que peut-on déduire de la question précédente sur la nature de h ?

Graphiquement, voici ce que ça donne :
Espace de départ.
Espace d'arrivée.
Animation de la transformation.

Ex. 4.4 Soit $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} = \mathcal{D}(0,1)$. On définit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \to & D \\ z & \mapsto & -z\dfrac{1-\bar{z}}{1-z} \end{array} \right.$.

1) Montrer que f est bien définie.
2) Montrer que $\forall Z \in D, \exists! z \in D, Z = f(z)$.
3) Que peut-on en déduire pour f ?
   Vidéo pour s'en convaincre

Cor. 4.4

Proposition 4.11 (Existence des arguments)

Pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe une infinité de valeurs $\theta \in \mathbb{R}$ telles que $u = \cos\theta + i\sin\theta$. De plus, deux quelconques de ces valeurs diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Définition 4.12 (Arguments d'un nombre complexe non nul)

Les deux propositions précédentes nous permettent d'affirmer que
$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! \rho \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \rho\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Cette écriture est appelée ***forme trigonométrique de*** z dans laquelle ρ est le module de z et θ est ***un argument*** de z.

Définition 4.13 (Argument principal)

Pour un nombre complexe non nul, la proposition 4.11 affirme l'existence d'une infinité d'arguments, différant entre eux d'un multiple entier de 2π.
On dit que l'argument est défini ***à*** 2π ***près*** ou encore ***modulo*** 2π.
On appelle ***argument principal*** l'unique argument compris dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Notation

On note $\arg(z)$ tout argument d'un nombre complexe non nul et $\mathrm{Arg}(z)$ l'argument principal de z. Pour signifier que $\arg(z)$ est défini à 2π près, on écrira $\arg(z) \equiv \mathrm{Arg}(z)\,[2\pi]$ qui se lit « tout argument de z est **congru** à son argument principal modulo 2π » ***ce qui équivaut à*** $\exists k \in \mathbb{Z}, \arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi$.

Notation

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \in \mathbb{U}$.
$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}$, on note e^z le nombre complexe $e^z = e^a e^{ib} \in \mathbb{C}^*$.

Propriété 4.14 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

$\forall(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$, $\forall(z;z') \in \mathbb{C}^2$:

- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi] \end{aligned}$
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\,[2\pi]$
- $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $\begin{aligned} e^z = 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = 2ik\pi \\ &\Leftrightarrow z \equiv 0\,[2i\pi] \end{aligned}$
- $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z \equiv z'\,[2i\pi]$

Important !

Même si nous verrons plus tard dans l'année que $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ est plus qu'une simple notation, l'exponentielle de nombres imaginaires ***ne possède pas toutes les propriétés de l'exponentielle des nombres réels***. En particulier :

- elle ***n'est pas injective*** : l'équation $e^{i\theta} = -1$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ possède une infinité de solutions $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$;
- pour cette raison, ***il n'existe pas de logarithme complexe*** !

Corollaire 4.15

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\,[2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\,[2\pi]$

Méthode : Obtention de la forme trigonométrique d'un complexe non nul

La démonstration de la proposition 4.11 fournit une méthode pour l'obtention de la forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul :

1) on commence par calculer $|z|$ puis $u = \dfrac{z}{|z|}$ qui est de module 1 ;
2) on cherche ensuite $\phi \in [0;\pi]$ tel que $\mathcal{R}e\,(u) = \cos(\phi)$; on verra au chapitre 5 comment obtenir cette valeur dans le cas général.
3) enfin, si $\mathcal{I}m\,(u) \geqslant 0$ alors $\theta = \mathrm{Arg}(z) = \phi$,
sinon $\mathcal{I}m\,(u) < 0$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z) = -\phi$.

On en conclut que $z = |z|e^{i\theta}$.
Il est fréquent que l'on utilise en physique une méthode similaire faisant intervenir la fonction Arctan et le signe de $\mathcal{R}e\,(z)$ (voir chapitre 5).

Ex. 4.5 On pose $z = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Calculer z^2 et en déduire la valeur de $\Theta = \mathrm{Arg}(z)$.

Cor. 4.5

Ex. 4.6 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$(E)\ :\ \bar{z} = z^3$$

Cor. 4.6

II.3. Utilisations en trigonométrie

Proposition 4.16 (Formules d'Euler)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ qui s'écrit aussi $e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Proposition 4.17 (Formule de Moivre)

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ qui s'écrit aussi $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Ex. 4.7 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{-1+i}\right)^{50}$.

Cor. 4.7

```
>>> ((1-(3**0.5)*1j)/(-1+1j))**50
(29058990.52155743-16777215.999999903j)
```

Méthode : Somme de deux complexes de même module

Pour écrire sous forme trigonométrique la somme de deux complexes de même module, on « ***factorise par l'angle moitié*** » :
$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, e^{i\theta} + e^{i\theta'} = e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}\left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{i\frac{-\theta+\theta'}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
Il s'agit de la forme trigonométrique si $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) > 0$. Sinon, on obtient la forme trigonomé-

trique en écrivant $\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\pi}$ avec $-\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) \geqslant 0$.

Ex. 4.8 Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $z = 1 + e^{i\theta}$ et $Z = 1 - e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi;\pi]$.

Cor. 4.8

Ex. 4.9 ***CCP MP 2019 - n°89*** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1) On suppose $k \in [\![1; n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S_n = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

Méthode : Développement de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en polynômes trigonométriques

Pour obtenir pour tout entier n et tout réel x les expressions de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ on utilise la formule 4.17 de Moivre et la formule du binôme de Newton.

Ex. 4.10 Écrire pour x réel $\cos(3x), \sin(3x), \cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Cor. 4.10

Méthode : Linéarisation des polynômes trigonométriques

Réciproquement, pour transformer, pour $x \in \mathbb{R}$, des produits de $\cos x$ et $\sin x$ en sommes de cosinus et de sinus d'un multiple entier de x, on utilise les formules 4.16 d'Euler et la formule du binôme de Newton.

Ex. 4.11 Linéariser $\cos^2(x)$, $\cos(x)\sin(x)$, $\sin^2(x)$, $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\cos(a)\sin(b)$.

Cor. 4.11

Méthode : Factorisation de certaines sommes trigonométriques

Une expression faisant intervenir une somme de fonctions trigonométriques peut parfois être simplifiée en écrivant $\cos x$ et $\sin x$ comme parties réelle et imaginaire de e^{ix} puis en factorisant l'expression obtenue.

Ex. 4.12 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$

et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.

Cor. 4.12

Ex. 4.13 Factoriser pour $p, q \in \mathbb{R}$, $A = \cos(p) + \cos(q)$ et $B = \sin(p) - \sin(q)$.

Cor. 4.13

Ex. 4.14 $[SI]$ ***et*** $[PC]$ ***: amplitude et phase***
Soient $a, b, t \in \mathbb{R}$ où $a^2 + b^2 \neq 0$. Soient r et θ le module et un argument du nombre complexe $z = a + ib$.
Montrer que $a\cos(t) + b\sin(t) = r\cos(t - \theta)$.

Cor. 4.14

Maths - Chapitre 5

Fonctions de référence

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
c) Complexes de module 1 et trigonométrie	
Fonction tangente. Formule $\tan(a \pm b)$	Notation tan.

Techniques fondamentales de calcul en analyse

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes d) Fonctions usuelles	
Étude des fonctions exponentielle, cosinus et sinus hyperboliques, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Logarithme décimal	Notation log ou $\log_{10}$. ⇄ PC : pH. ⇄ PC et SI : diagrammes de Bode.
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	⇄ PC et SI.
Fonctions circulaires réciproques.	Notations Arcsin, Arccos, Arctan. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.
e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp \circ \phi$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	⇄ PC et SI : électrocinétique.

II. Fonctions usuelles

II.1. Logarithmes, exponentielle

a) Logarithmes

Définition 5.1 (Logarithme népérien)

D'après la proposition 3.35, la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ admet une unique primitive qui s'annule en 1. Elle se note ln et s'appelle la fonction ***logarithme népérien***.

Remarque

- La fonction $F : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \ln|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x}$. C'est évident sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, $F'(x) = -\dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.
- On utilise souvent en physique, chimie et sciences de l'ingénieur la fonction ***logarithme décimal*** notée $\log_{10}$ ou plus simplement log et définie par $\log_{10} : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10} \in \mathbb{R}$.

Propriété 5.2 (Propriétés opératoires)

- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- Pour $a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Démonstration

Propriété 5.3 (Variation, limites)

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration

Corollaire 5.4

La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Notation

On note e l'unique réel tel que $\ln(e) = 1$. Approximativement, $e \simeq 2,7$.

Ex. 5.1 Établir, pour $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Cor. 5.1

Ex. 5.2 Montrer que, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \dfrac{1}{x}$.

En déduire que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < S_n < 1 + \ln(n)$.

Cor. 5.2

b) Exponentielle

Définition 5.5 (Exponentielle)

La fonction exponentielle, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction ln.

Remarque

Pour tout entier relatif n, on a $\ln(e^n) = n\ln(e) = n = \ln(\exp(n))$. On en déduit, ln étant injective, que $\exp(n) = e^n$. On généralise en notant, pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

Propriété 5.6 (Dérivée de l'exponentielle)

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Démonstration

Propriété 5.7 (Propriétés opératoires)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $e^{x+y} = e^x e^y$ (équation fonctionnelle).
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
- $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

Démonstration

Ex. 5.3 (Cor.) Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.

Ex. 5.4 Établir, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Cor. 5.4

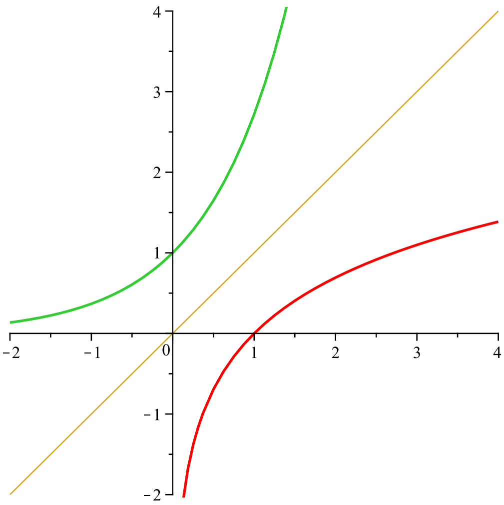
Ex. 5.5 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{k/n}}{n} \geqslant \frac{3}{2} - \frac{1}{2n}$

puis que $e \geqslant \dfrac{5}{2}$.

c) Synthèse et représentations graphiques

Exponentielle et logarithme



Valeur de x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
Signe de $\exp(x)$	
Variations de exp	

Valeur de x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	
Variations de $\ln \lvert x \rvert$	

II.2. Puissances

Définition 5.8 (Fonctions puissances)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α, notée p_α, est définie par $p_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$.

Remarque

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}$ et pour $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour toute autre valeur de α, la fonction p_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge pour $\alpha > 0$ par continuité par 0 en 0.
- ***Il est très important de retenir que, par définition,***

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, a^b = e^{b \ln a}.$$

Dans la plupart des problèmes faisant intervenir des puissances d'exposant non entier, c'est la seconde expression qui permet de parvenir au résultat.

Propriété 5.9 (Dérivée)

L'application p_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $p'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

Propriété 5.10 (Propriétés opératoires, variations, limites)

- Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.
- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

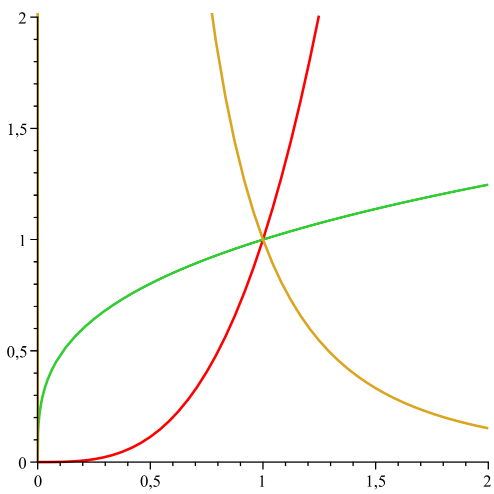
- Si $\alpha < 0$, p_α est strictement décroissante, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha > 0$, p_α est strictement croissante, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
- Si $\alpha = 0$, p_0 est la fonction constante à 1.

Démonstration

Remarque

La fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{2}}$ prolongée par 0 en 0 vérifie, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$. C'est donc la bijection réciproque de la fonction carrée restreinte à $\mathbb{R}_+$: c'est la fonction racine carrée.

Fonctions puissance



$\alpha \geqslant 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$0 \leqslant \alpha < 1$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

$\alpha < 0$:

Valeur de x	0 1 $+\infty$
Signe de $\alpha x^{\alpha-1}$	
Variations de x^α	

II.3. Croissances comparées

Lemme 5.11 (Lemme fondamental)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Démonstration

Proposition 5.12 (Croissances comparées)

- Pour tous réels strictement positifs α et β, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

- Pour tout réel a strictement supérieur à 1 et tout réel α, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x|x|^\alpha = 0$$

Démonstration

Méthode : Fonction du type u^v

Soit $u : D \to \mathbb{R}_+^*$ et $v : D \to \mathbb{R}$. Pour étudier $f : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x)^{v(x)}$, on écrira,

$$\forall x \in D, f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Ex. 5.6 (Cor.) [**] Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x^y + y^x > 1$.

Ex. 5.7 Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

II.4. Fonctions circulaires

a) Rappels

On suppose connue la définition des fonctions trigonométriques à l'aide du cercle trigonométrique dont on déduit immédiatement :

Propriété 5.13

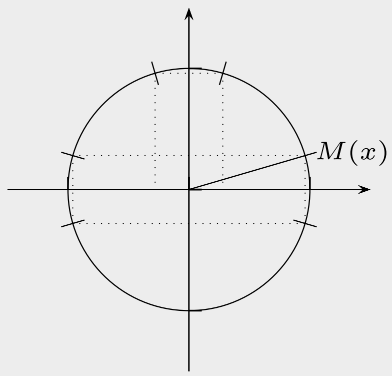
$\forall x \in \mathbb{R}$,

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$	$-1 \leq \sin(x) \leq 1$
$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$	$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$
$\cos(\pi-x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi-x) = \sin(x)$
$\cos(\pi+x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi+x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = \cos(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\sin(x) = \sin(x_0) \Leftrightarrow$ ....

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ par le théorème de Pythagore.



Définition 5.14 (Fonction tangente)

La fonction tangente est définie par $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$.
Son domaine de définition est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.
L'application tan est impaire, π-périodique.

b) Formules d'addition

Propriété 5.15 (Formules d'addition)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$
$$\begin{array}{rclrcl} \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \cos(\alpha-\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \sin(\alpha-\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{array}$$

Corollaire 5.16 (Formules d'addition de la fonction tan)

Lorsque ces expressions sont définies,
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Démonstration

Corollaire 5.17 (Formules de duplication)

Lorsque ces expressions sont définies,
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \qquad \tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Démonstration

c) Dérivées des fonctions trigonométriques

Lemme 5.18 (Nombre dérivé de sin en 0)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Propriété 5.19 (Fonctions dérivées de cos, sin et tan)

Les fonctions cos, sin et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition et sur ces ensembles
$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$
On a de plus $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

Démonstration

II.5. Fonctions circulaires réciproques

La restriction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ de la fonction sinus est strictement croissante, donc injective (d'après la proposition 3.19) ; de plus, $\sin(\frac{-\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ est donc une bijection continue de $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.
De même, $\cos_{|[0,\pi]}$ est une bijection continue strictement décroissante de $[0,\pi] \to [-1,1]$ et $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

une bijection continue strictement croissante de $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

Définition 5.20 (Arcsinus, arccosinus, arctangente)

- Arcsinus, notée Arcsin, est la bijection réciproque de la fonction $\sin_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$:

$$\text{Arcsin} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \sin^{-1}_{|[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x) \end{cases}$$

- Arccosinus, notée Arccos, est la bijection réciproque de la fonction $\cos_{|[0,\pi]}$:

$$\text{Arccos} : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \cos^{-1}_{|[0,\pi]}(x) \end{cases}$$

- Arctangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la fonction $\tan_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$:

$$\text{Arctan} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \tan^{-1}_{|]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x) \end{cases}$$

Propriété 5.21 (Équations trigonométriques)

- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}x) = x$ et $\cos(\text{Arccos}x) = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\text{Arctan}x) = x$.
- Pour tout $y \in [-1,1]$, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ de
  $\sin(x) = y$ est $S_1 = \{\text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \text{Arcsin}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  $\cos(x) = y$ est $S_2 = \{\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\text{Arccos}\, y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $\tan(x) = y$ a pour ensemble de solutions $\{\text{Arctan}\, y + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Propriété 5.22

- Arcsin est impaire, strictement croissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arccos est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
- Arctan est impaire, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
  De plus $\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration

Important ! Bijections réciproques de restrictions

Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan ***ne sont pas*** les réciproques de sin, cos ou tan, mais celles de restrictions bien choisies. Ceci engendre quelques difficultés. Par exemple :

- $\text{Arcsin}(\sin x) = x$ si et seulement si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

- $\text{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{6}\right) =$ ....

On fera également attention pour $\text{Arccos}(\cos x)$ et $\text{Arctan}(\tan x)$.

Ex. 5.8 Simplifier $\text{Arccos}(\cos x)$, $\text{Arcsin}(\sin x)$ et $\text{Arctan}(\tan x)$ si $x \in [\pi, 2\pi]$.

Cor. 5.8

Lemme 5.23

Pour $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ et $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

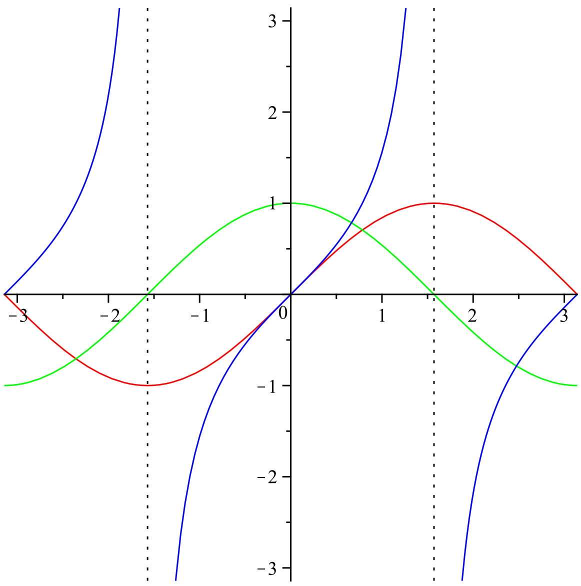
Démonstration

Propriété 5.24 (Dérivabilité)

- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, $\text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration

Fonctions trigonométriques

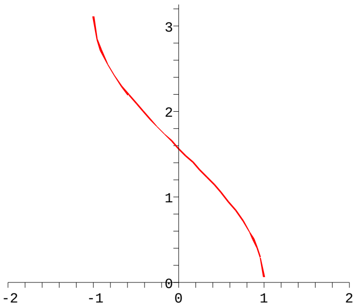


Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $-\sin(x)$					
Variations de cos					

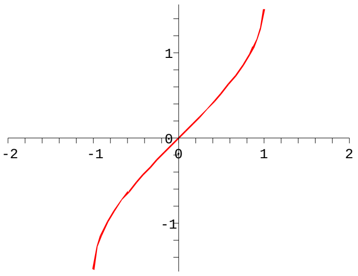
Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(x)$					
Variations de sin					

Valeur de x	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\frac{1}{\cos^2(x)}$					
Variations de tan					

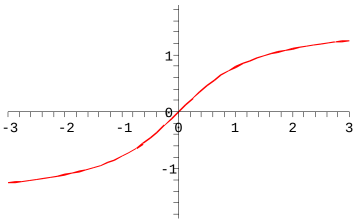
Fonctions trigonométriques réciproques



Valeur de x	$-1 \quad 0 \quad +1$
Signe de $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arccos	



Valeur de x	$-1 \quad 0 \quad +1$
Signe de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
Variation de Arcsin	



Valeur de x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
Signe de $\dfrac{1}{1+x^2}$	
Variation de Arctan	

Ex. 5.9 Montrer que $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{4}{3}$.

Cor. 5.9

Ex. 5.10 Simplifier les expressions $\sin(2 \operatorname{Arcsin}(x))$, $\cos^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} x\right)$ et $\cos(\operatorname{Arctan} x)$.

Cor. 5.10

Ex. 5.11 Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Cor. 5.11

Ex. 5.12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Qu'en est-il si $x \in \mathbb{R}_-^*$?

Cor. 5.12

Ex. 5.13 (Cor.) Simplifier lorsque c'est possible $\operatorname{Arccos}(1 - 2x^2)$.

II.6. Valeurs particulières des fonctions circulaires et de leurs réciproques

Remplir les deux tableaux suivants :

Valeur de x	Valeur de $\cos(x)$
0	
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\pi}{2}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{5\pi}{6}$	
π	
Valeur de	Valeur de u

Valeur de x	Valeur de $\sin(x)$	Valeur de $\tan(x)$
$\frac{-\pi}{2}$		
$\frac{-\pi}{3}$		
$\frac{-\pi}{4}$		
$\frac{-\pi}{6}$		
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{3}$		
$\frac{\pi}{2}$		
Valeur de	Valeur de u	//////////
Valeur de	//////////	Valeur de u

II.7. Résumé des formules de composition à connaître

Méthode : Simplification des composées de fonctions circulaires et réciproques

- $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \sin(\text{Arcsin}(x)) = x \\ \cos(\text{Arccos}(x)) = x \end{array} \right.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$
- $\text{Arccos}(\cos(x)) = x \Leftrightarrow x \in [0;\pi]$: autrement dit, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $[0;\pi]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et cos périodique de période 2π.
- $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$: autrement dit, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. En dehors de cet intervalle, on utilise les propriétés $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi + x) = \sin(-x) = -\sin(x)$ et sin périodique de période 2π.
- $\text{Arctan}(\tan(x)) = x \Leftrightarrow x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$: autrement dit, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$ si et seulement si x est dans l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. En dehors de cet intervalle, on utilise la propriété tan périodique de période π.
- Enfin, on a démontré les propriétés suivantes :
  $\forall x \in [-1;1], \left| \begin{array}{l} \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{array} \right.$

Ex. 5.14

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin(x)$.
2) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left[\frac{-\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$.
   Simplifier $\text{Arcsin}(\sin(x))$.
3) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in [k\pi; \pi + k\pi]$.

Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$.

4) Soit $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \left]\frac{-\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.
Simplifier $\operatorname{Arctan}(\tan(x))$.

II.8. Fonctions hyperboliques

Définition 5.25 (Fonctions hyperboliques)

- La fonction cosinus hyperbolique, notée ch, est définie par ch : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{cases}$
- La fonction sinus hyperbolique, notée sh, est définie par sh : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{cases}$

Propriété 5.26

Pour tout réel x, on a $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x}$ et $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

Démonstration

Remarque

De la même façon que $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$, la troisième formule montre que $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$.
Cet ensemble est ***une hyperbole***, ce qui justifie l'adjectif hyperbolique.

Ex. 5.15 Obtenir pour $x \in \mathbb{R}$ des formules de duplication de $\operatorname{ch}(2x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Cor. 5.15

Ex. 5.16 (Cor.) Obtenir pour $a, b \in \mathbb{R}$ des formules d'addition de $\operatorname{ch}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a+b)$ similaires à celles des fonctions trigonométriques.

Propriété 5.27 (Dérivées)

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$.

Démonstration

Propriété 5.28 (Variations, limites)

- L'application ch est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et continue. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{ch}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).

- L'application sh est impaire, strictement croissante et continue. De plus, $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique).

Démonstration

Ex. 5.17 Calculer les dérivées secondes des fonctions $f : x \mapsto \sin x \,\mathrm{sh}\, x$ et $g : x \mapsto \cos x \,\mathrm{ch}\, x$.

Cor. 5.17

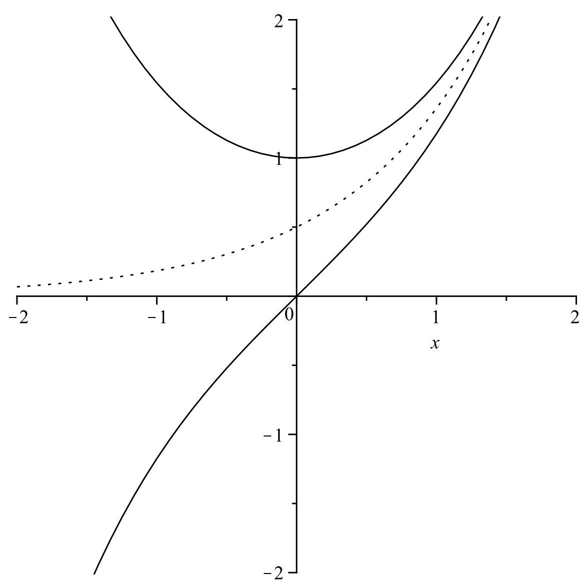
Ex. 5.18 Étudier les variations de $h : x \mapsto \mathrm{sh} x + \cos x$.

Cor. 5.18

Remarque

- On rapporte le plan à un repère orthonormé. Soit $m : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^x}{2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le point $E(x, m(x))$ est le milieu du segment vertical $[S(x, \mathrm{sh}\, x), C(x, \mathrm{ch}\, x)]$.
- On montre en mécanique que la courbe représentative de ch épouse la forme d'un fil pesant et homogène suspendu par ses deux extrémités. Pour cette raison, on l'appelle la chaînette.

Fonctions hyperboliques



Valeur de x	$-\infty$ 0 $+\infty$
Signe de $\mathrm{sh}(x)$	
Variations de ch	
Variations de sh	
Signe de $\mathrm{ch}(x)$	

III. Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Dans ce qui suit, I est à nouveau un intervalle réel contenant une infinité de points.

III.1. Parties réelle et imaginaire d'une fonction à valeurs complexes

Définition 5.29 (Parties réelle et imaginaire, module)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle et à valeurs complexes.
Il existe un unique couple de fonctions $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $f = f_1 + if_2$.
L'application f_1 s'appelle la ***partie réelle*** de f et f_2 s'appelle la ***partie imaginaire*** de f.
L'application $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ s'appelle ***module*** de f.

Notation

On note $f_1 = \mathcal{R}e\,(f)$, $f_2 = \mathcal{I}m\,(f)$ et $|f|$ le module de f.

Définition 5.30 (Fonctions à valeurs complexes bornées)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction.
On dit que f est bornée si $|f|$ est majorée.

Remarque

Cette définition généralise la notion de fonction à valeurs réelles bornée. Cependant, les notions de fonction majorée et de fonction minorée ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

Ex. 5.19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie pour tout x réel par $f(x) = \dfrac{\sin x}{ix + x + 1}$. Calculer l'expression pour $x \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{R}e\,(f)\,(x)$ et de $\mathcal{I}m\,(f)\,(x)$.

Cor. 5.19

III.2. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes

Définition 5.31

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont continues. De même, on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable si $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ sont dérivables. On pose alors pour tout $x \in I$, $f'(x) = \mathcal{R}e\,(f)'\,(x) + i\mathcal{I}m\,(f)'\,(x)$.
Enfin, on dit que $F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$ si $F' = f$. On étend de même la notion d'intégrale, en posant pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \mathcal{R}e\,(f)\,(t)\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathcal{I}m\,(f)\,(t)\mathrm{d}t$.

Les formules portant sur la dérivée (ou la continuité) d'une somme, d'un produit ou d'un quotient sont aussi valables pour les fonctions à valeurs complexes.

III.3. Dérivée de $\exp \circ \phi$

Proposition 5.32

Si $\phi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dérivable alors $f : \begin{cases} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\phi(t)} \end{cases}$ est aussi dérivable et $\left(e^{\phi}\right)' = \phi' e^{\phi}$.

Démonstration

IV. Compléments

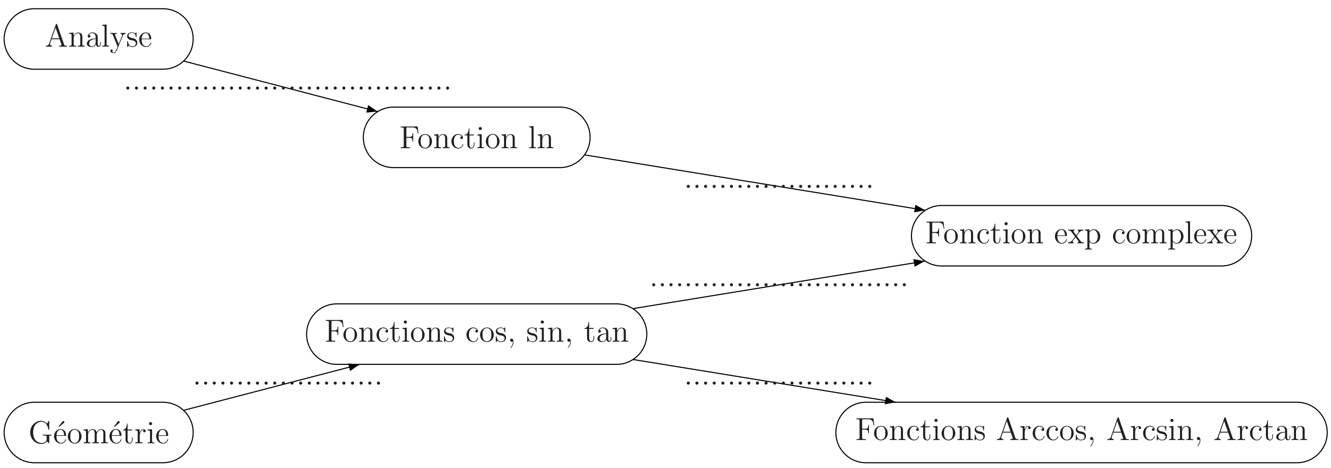
IV.1. Technique d'élimination des racines carrées

Méthode : Élimination des racines carrées

Pour les expressions du type $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1+x^2}$ et $\sqrt{x^2-1}$, à l'aide d'un changement de variable judicieux, on fait apparaître un carré sous la racine.

- Pour $\sqrt{1-x^2}$, définie si $x \in [-1,1]$, on pose $x = \sin t$.
  Ainsi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$. Si l'on impose $t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on peut se passer des valeurs absolues. Ici, on peut aussi poser $x = \cos t$.
- Pour $\sqrt{1+x^2}$, définie pour tout x réel, on pose $x = \operatorname{sh} t$.
  Alors $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{ch} t$.
- Pour $\sqrt{x^2-1}$, définie pour tout $x \geqslant 1$, on pose $x = \operatorname{ch} t$.
  Par suite $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t} = |\operatorname{sh} t|$. On peut se passer de la valeur absolue en imposant $t \geqslant 0$. La quantité $\sqrt{x^2-1}$ est aussi définie pour tout $x \leqslant -1$; dans ce cas, on pose $x = -\operatorname{ch} t$.

IV.2. Résumé de l'ordre logique de définition des fonctions usuelles



IV.3. Tableau des dérivées/primitives usuelles

Fonction $\xrightarrow{\text{Dérivation}}$	Dérivée	Intervalle(s) de validité
$\ln \lvert x \rvert$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
exp	exp	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$	$]0; +\infty[$ prolongeable en 0 si $\alpha \geqslant 1$ valable aussi sur $]-\infty; 0[$ si $\alpha \in \mathbb{Z}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
cos	$-\sin$	$\mathbb{R}$
tan	$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$
Arcsin	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
Arccos	$x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1; 1[$
Arctan	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
ch	sh	$\mathbb{R}$
sh	ch	$\mathbb{R}$
Primitive $\xleftarrow{\text{Primitivation}}$	Fonction	Intervalle(s) de définition

Remarque

- Une fonction continue possède une primitive sur ***tout intervalle inclus dans son ensemble de définition*** d'après le théorème 3.35 (théorème fondamental du calcul intégral).
- Pour cette raison, l'***ensemble de dérivabilité d'une fonction de référence*** est l'***intersection de son ensemble de définition avec l'ensemble de définition de sa dérivée***.
- Le théorème de dérivation d'une composée (3.24) s'écrit, dans le cas particulier des fonctions de référence, de la façon suivante :
  $(\exp \circ \phi)' = \phi' \times \exp \circ \phi$
  $(\ln \circ \phi)' = \phi' \times \frac{1}{\phi}$
  etc...
  à condition que ϕ prenne ses valeurs dans l'ensemble de dérivabilité de exp***,*** ln***, etc...***

IV.4. Exercice : fonctions trigonométriques et hyperboliques

Ex. 5.20 Simplifier les expressions suivantes en donnant leur domaine de validité :

$A = \dfrac{\operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(\ln x)}{x}$
$B = \operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y$

Cor. 5.20

Ex. 5.21 Soit $f, g : I \to \mathbb{C}$ dérivables. Établir que le produit fg est dérivable sur I et que $(fg)' = f'g + fg'$.

Cor. 5.21

V. Correction des exercices

Cor. 5.3 : On le démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- **Initialisation** : $\forall a_1 \in \mathbb{R}, \exp(a_1) = \exp(a_1)$.
- **Hérédité** :

  Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné et quels que soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$.

  $\forall a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \exp(a_{n+1})$.

  On utilise alors la propriété de récurrence :

  $\forall a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i) \exp(a_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} \exp(a_i)$.
- **Conclusion** : la propriété est initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp(a_i)$$

Cor. 5.6 : Pour $x \geqslant 1$, comme $y > 0$, $x^y \geqslant 1$ et $y^x > 0$, donc $x^y + y^x > 1$. De même, l'inégalité est vérifiée pour $y \geqslant 1$. On suppose donc $0 < y < 1$ et on pose $f : x \in]0, 1] \mapsto x^y + y^x = x^y + e^{x \ln(y)}$
f est dérivable sur $]0, 1]$ comme somme et composée de fonctions dérivables et
$f'(x) = yx^{y-1} + \ln(y) y^x = y\left(x^{y-1} + \ln(y) y^{x-1}\right)$ qui est du signe de $x^{y-1} + \ln(y) y^{x-1}$.
En posant $g : x \in]0, 1] \mapsto \dfrac{x^{y-1}}{y^{x-1}} + \ln(y)$, étudier le signe de f' revient à étudier celui de g. C'est une fonction dérivable, de dérivée

$$g'(x) = \frac{(y-1)x^{y-2}y^{x-1} - \ln(y)x^{y-1}y^{x-1}}{y^{2x-2}} = (y - 1 - x\ln(y))\frac{x^{y-2}}{y^{x-1}}$$

qui est du signe de $y - 1 - x\ln(y)$.
Or $y - 1 - x\ln(y) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{y-1}{\ln(y)} \geqslant x$ car $\ln(y) < 0$. De plus, pour tout $y \in]0, 1[, \ln(y) < y - 1$ donc $0 < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$. Donc g est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{y-1}{\ln(y)}\right]$ de limite $+\infty$ en 0^+ et strictement croissante sur $\left[\frac{y-1}{\ln(y)}, 1\right]$ avec $g(1) = 1 + \ln(y)$.

Valeurs de x	0	$\frac{y-1}{\ln(y)}$	1
Variations de $g(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$g\left(\frac{y-1}{\ln(y)}\right)$	$\nearrow$ $1+\ln(y)$

Or, $g(y) = 1 + \ln(y) = g(1)$***, donc, pour tout*** $y \in]0,1[$***, on a*** $y < \frac{y-1}{\ln(y)} < 1$ ***et*** g ***est strictement décroissante sur*** $]0,y]$***. On en déduit, en notant*** $\alpha \in]0,y]$ ***l'unique solution de*** $f'(\alpha) = 0$ ***si elle existe, que le tableau de variations de*** f ***sur*** $]0,y]$ ***est de la forme :***

Si $y \geqslant \frac{1}{e}$		
Valeurs de x	0	y
Signe $f'(x)$	$+$	
Variations de $f(x)$	1 $\nearrow$	$2y^y$

Si $y < \frac{1}{e}$			
Valeurs de x	0	α	y
Signe $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de $f(x)$	1 $\nearrow$		$\searrow$ $2y^y$

Ces tableaux de variations permettent de conclure dans tous les cas puisque :

- si $y \in]0,1[$ et $x \in]0,y]$, $y \in]0,1[\mapsto 2y^y$ passe par un minimum $2e^{-\frac{1}{e}} > 1$ en $y = \frac{1}{e}$ donc $f(x)$ est minorée par sa limite 1 lorsque $x \to 0$;
- si $y \in]0,1[$ et $x \in [y,1[$, on arrive à la même conclusion en échangeant x et y.

Cor. 5.13 : Arccos $(1-2x^2)$ a un sens si $-1 \leqslant 1-2x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire si $-1 \leqslant x \leqslant 1$. On peut se limiter à $0 \leqslant x \leqslant 1$ grâce à la parité.

Voici deux méthodes.

- (Changement de variable) On pose $x = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $1-2x^2 = 1-2\sin^2(t) = \cos(2t)$ et, comme $0 \leqslant 2t \leqslant \pi$, on en déduit $\text{Arccos}(\cos(2t)) = 2t$.
  Ainsi, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\text{Arccos}\,(1-2x^2) = 2\,\text{Arcsin}\, x$.
  On conclut grâce à la parité que, pour tout $x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}\,(1-2x^2) = 2|\,\text{Arcsin}\, x|$.
- (En dérivant) La fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}\,(1-2x^2)$ est dérivable sur $]0,1[$ et pour $x \in]0,1[$,
  $f'(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
  Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = 2\,\text{Arcsin}(x) + k$.
  Les deux membres de cette identité étant continus sur $[0;1]$, on obtient $k = 0$ en calculant leur valeur par exemple pour $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ldots$
  Ainsi pour tout $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\text{Arccos}\,(1-2x^2) = 2|\text{Arcsin} x|$.

Cor. 5.16 :

1) $\text{ch}\, a\, \text{ch}\, b + \text{sh}\, a\, \text{sh}\, b = \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b+e^{-a}e^{-b}}{2} = \text{ch}(a+b)$.
2) $\text{sh}\, a\, \text{ch}\, b + \text{ch}\, a\, \text{sh}\, b = \frac{e^a-e^{-a}}{2}\frac{e^b+e^{-b}}{2} + \frac{e^a+e^{-a}}{2}\frac{e^b-e^{-b}}{2} = \frac{e^ae^b-e^{-a}e^{-b}}{2} = \text{sh}(a+b)$.

Maths - Chapitre 6

Nombres complexes : équations et géométrie

I. Programme officiel

Nombres complexes et trigonométrie

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Équations du second degré	
Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients complexes, discriminant. Somme et produit des racines d'une équation du second degré.	
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité. Équation $z^n = a$. Pour tout z, z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique des solutions.
h) Nombres complexes et géométrie plane	
Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité à l'aide des affixes.	
Transformation $z \in \mathbb{C} \mapsto e^{i\theta} z \in \mathbb{C}$: rotation plane de centre O et d'angle θ.	Il s'agit d'introduire le concept de transformation du plan dont l'étude ne figure pas au programme des classes antérieures.
Transformation $z \mapsto z + b$, translations. Transformation $z \mapsto kz, (k \in \mathbb{R}^*)$: homothétie de centre O de rapport k. Transformation $z \mapsto \bar{z}$, symétries axiales.	

II. Utilisations en géométrie

Les formules concernant le module et l'argument des nombres complexes permettent une grande variété d'applications géométriques. Nous en donnons ici quelques exemples.
On rappelle que le plan est rapporté à un repère $(0; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ ***orthonormal direct*** et que l'affixe d'un point $M(x; y)$ dans ce repère est le complexe $z = x + iy$.

II.1. Barycentre d'une famille de points

Théorème 6.1 (Isobarycentre d'une famille de points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ n points du plan.
Il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{A_1G} + \overrightarrow{A_2G} + ... + \overrightarrow{A_nG} = \vec{0}$.
Ce point est appelé ***isobarycentre de la famille*** $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$.
De plus, quel que soit le point M du plan, G vérifie

$$\overrightarrow{A_1M} + \overrightarrow{A_2M} + ... + \overrightarrow{A_nM} = n\overrightarrow{GM}$$

Démonstration

Proposition 6.2

L'affixe de l'isobarycentre G de la famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + ... + z_n}{n}$$

Démonstration

Corollaire 6.3

Le milieu d'un segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$ (en notant z_A et z_B les affixes respectives de A et B).
Le centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$ (en notant z_A, z_B et z_C les affixes respectives de A, B et C).

II.2. Angle de vecteurs

Proposition 6.4

Étant donnés deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives z et z' on a
$(\vec{u}; \vec{v}) \equiv \operatorname{Arg}(\bar{z}z')\ [2\pi]$
où $(\vec{u}; \vec{v})$ désigne l'angle orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration

Corollaire 6.5 (Vecteurs colinéaires)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont colinéaires si et seulement si $\bar{z}z' \in \mathbb{R}$.

Corollaire 6.6 (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont orthogonaux si et seulement si $\bar{z}z' \in i\mathbb{R}$.

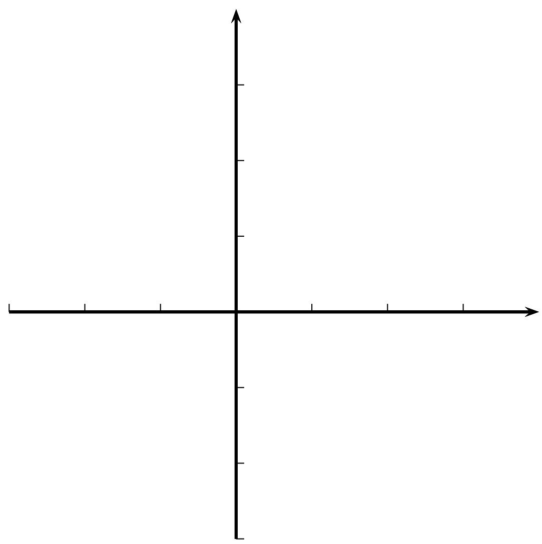
Corollaire 6.7 (Points alignés)

Trois point $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont alignés si et seulement si $\left(\overline{z_A} - \overline{z_B}\right)(z_A - z_C) \in \mathbb{R}$.

II.3. Transformations du plan complexe

On identifie les points du plan et leur affixe, et les vecteurs du plan et leur affixe.
Autrement dit, pour $z \in \mathbb{C}$

- « le point z du plan complexe » signifie « le point M du plan d'affixe z » ;
- « le vecteur z du plan complexe » signifie « le vecteur $\vec{v}$ du plan d'affixe z ».
- Soit $c \in \mathbb{C}$. La transformation $z \mapsto z + c$ du plan complexe est
  ....
  ....
- La transformation $z \mapsto \bar{z}$ du plan complexe est
  ....
  ....
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La transformation $z \mapsto \lambda z$ du plan complexe est
  ....
  ....
- Soit $u \in \mathbb{U}$. La transformation $z \mapsto uz$ est
  ....
  ....



III. Utilisations en algèbre

III.1. Racine *réelle* n-ième d'un *réel positif*

Définition 6.8

Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}\right.$ est définie par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
Lorsque $\alpha > 0$, elle peut être prolongée en 0 par 0, la fonction obtenue étant continue.

Proposition 6.9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$ est la bijection réciproque de $x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration

III.2. Racines complexes n-ièmes de l'unité

Théorème 6.10 (Racines n-ièmes de l'unité)

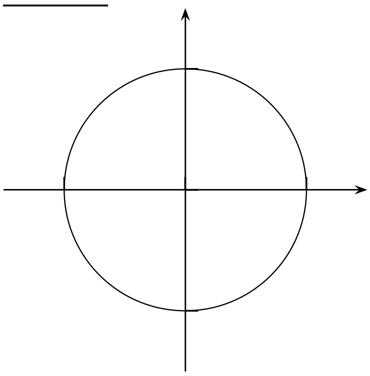
Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z \in \mathbb{C}, z^n = 1$ possède exactement n racine(s), toutes de module 1. L'ensemble des solutions de cette équation est $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0; n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$.

Démonstration

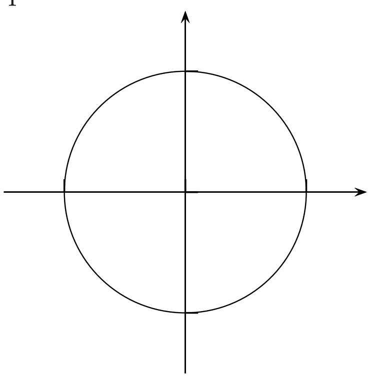
Important !

- Nous venons de voir que $n\theta \equiv 0\,[2\pi] \Leftrightarrow \theta$ ....
- D'après le théorème précédent, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^n \end{array} \right.$ ***n'est pas une bijection*** si $n > 1$ (puisque 1 a n antécédents).
  En conséquence, elle ***n'admet pas de bijection réciproque***.
  La fonction $y \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ est ***définie uniquement sur*** $\mathbb{R}_+$.

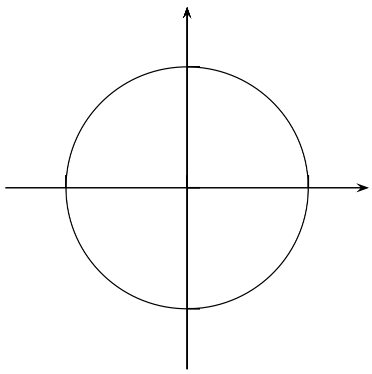
Ex. 6.1 Placer les racines complexes n-ièmes de l'unité dans les cas suivants



Racines cubiques : $n = 3$



Racines quatrièmes : $n = 4$



Racines sixièmes : $n = 6$

Méthode

Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = c$ a exactement n solutions.
Pour la résoudre, on procède de la façon suivante

- on écrit c sous forme trigonométrique : $\exists! \rho \in \mathbb{R}_+^*, \exists \gamma \in \mathbb{R}, c = \rho e^{i\gamma}$;
- on en déduit $|z|$: $|z^n| =$ ....
- on termine en explicitant les différentes valeurs possibles pour $\theta = \arg(z)$:
  $z^n = c \Leftrightarrow$ ....

Ex. 6.2 Résoudre l'équation $z^3 = 1 + i$

Cor. 6.2

III.3. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème 6.11

Étant donnés $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes***, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ possède :

- une solution ***double*** $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$;
- deux solutions distinctes $z_\pm = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$ si $\Delta = \delta^2 \neq 0$.

Démonstration

Méthode

Pour résoudre une équation du second degré à ***coefficients complexes*** :

- on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$;
- si $\Delta = 0$, on a immédiatement la solution double ;
- si $\Delta \neq 0$, on cherche la partie réelle et la partie imaginaire de l'un des deux complexes δ vérifiant $\delta^2 = \Delta$ en résolvant le système $\begin{cases} \delta^2 & = & \Delta \\ |\delta|^2 & = & |\Delta| \end{cases}$ c'est-à-dire en adaptant au cas $n = 2$ la méthode de résolution des équations du type $z^n = c$.

Ex. 6.3 Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$.

Cor. 6.3

III.4. Relations coefficients-racines

Théorème 6.12

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$, b et c ***trois nombres complexes*** alors

$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2), \qquad z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}, \qquad z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration

IV. Résumé et compléments

IV.1. Propriétés de l'exponentielle complexe

Nous avons défini page 71 l'exponentielle complexe par $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\mathcal{R}e(z)} \times e^{i\mathcal{I}m(z)}$ et nous avons donné quelques-unes de ses propriétés. En voici d'autres :

Propriété 6.13

$\forall z \in \mathbb{C}$,

- $|e^z| = e^{\mathcal{R}e(z)}$;
- $\arg(e^z) \equiv \mathcal{I}m(z)\ [2\pi]$.

Démonstration

Important !

L'équation $e^z = c \in \mathbb{C}^*$ possède une infinité de solutions complexes, la partie imaginaire de z étant définie à 2π près.

Méthode : Équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$

La propriété précédente donne une méthode de résolution des équations du type $e^z = c \in \mathbb{C}^*$: en effet, résoudre l'équation revient à résoudre le système

$$\begin{cases} |e^z| & = & e^{\mathcal{R}e(z)} = |c| \\ \arg(e^z) & \equiv & \mathcal{I}m(z) \equiv \arg(c)\ [2\pi] \end{cases}$$

Ex. 6.4 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$(E_1) : e^z = -7 \qquad (E_2) : e^z = 5 - 12i$

Cor. 6.4

IV.2. Représentations rationnelles des points du cercle trigonométrique

Lemme 6.14

Pour tout réel x non congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

Démonstration

Proposition 6.15

Pour tout réel x non congru à π modulo 2π, en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on a
$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Démonstration

Remarque

La proposition précédente permet aussi d'écrire, à condition que $\tan(x)$ et $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soient définies,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}$$

Corollaire 6.16

On rapporte le plan orienté à un repère orthonormé.
Pour tout point M du cercle trigonométrique distinct du point d'abscisse -1, il existe un unique réel t tel que M ait pour coordonnées $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$.

Démonstration

Maths - Chapitre 7

Équations différentielles et calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques outils de résolution des équations différentielles. En commençant par la plus simple de toute : étant donnée une fonction f, trouver une fonction F telle que $F' = f$.

I. Programme officiel

Techniques fondamentales de calcul en analyse

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
C - Primitives et équations différentielles linéaires a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs réelles ou complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$. $\leftrightarrows$ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ lorsque f est continue. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	Le résultat est admis à ce stade.
Intégration par partie d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Changement de variable : si ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\phi(I)$, alors pour tous a et b dans I, $$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\phi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$	On définit à cette occasion la classe $\mathcal{C}^1$. Application au calcul de primitives.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y'+a(x)y=b(x)$ où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où a est une fonction constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	$\leftrightarrows$ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	$\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques RC, RL et de systèmes mécaniques linéaires.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $y''+ay'+by=f(x)$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x\mapsto Ae^{\lambda x}$, $x\mapsto A\cos(\omega x)$, $x\mapsto A\sin(\omega x)$.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors-programme. $\leftrightarrows$ PC et SI : modélisation des circuits électriques RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

II. Calcul pratique des intégrales et des primitives

Dans ce qui suit, I est un intervalle ***réel*** contenant une infinité de points.

II.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$

Définition 7.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^0$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^0$ ***sur*** I si f est continue sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^0(I, J)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et continue sur I.

II.2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 7.2 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I si f est dérivable sur I et si f' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^1(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^1(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J et dérivable (donc continue) sur I ***et de dérivée*** f' ***continue sur*** I.

II.3. Rappels

Si f est une fonction continue sur I, alors d'après le théorème fondamental du calcul intégral (proposition 3.35 page 61), quel que soit $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f, donc une ***fonction de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***sur*** I (puisque sa dérivée f est continue).
On rappelle aussi que les notions de dérivée, de primitive et d'intégrale ont été étendue au cas des fonctions ***d'une variable réelle à valeurs complexes***. Notamment,

- pour tout nombre complexe c, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = e^{cx}$ a pour dérivée $f'(x) = ce^{cx}$ et pour primitives $F(x) = \dfrac{e^{cx}}{c} + k$ où $k \in \mathbb{C}$;
- si $\phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, alors $\left(e^{\phi}\right)' = \phi' e^{\phi}$.

Le lien entre primitives et intégrales d'une fonction (continue) sera démontré ultérieurement. On l'utilisera cependant constamment au cours de ce chapitre sous l'une des formes suivantes :

Méthode : Primitives et intégrales

- Si f est une fonction continue sur I dont ***on connaît une primitive*** F, alors pour $a, b \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.
- Si f est une fonction continue sur I dont ***on ne connaît pas de primitive***, alors pour $a \in I$, $x \in I \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ en est une. Les techniques de calcul d'intégrale que nous allons voir durant cette section peuvent alors ***parfois*** permettre d'obtenir une expression d'une primitive de f. Cependant, même lorsque le TFCI garantit l'existence

de primitives, il est ***parfois impossible d'en obtenir une expression***.

Notation

On note $[F(t)]_a^b$ la différence $F(b)-F(a)$. On a donc pour une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$ de primitive F :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Lorsqu'on cherche ***une primitive quelconque*** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(I)$, on notera souvent $x \in I \mapsto \int^x f(t)\mathrm{d}t$ une telle primitive. En utilisant la notation précédente, l'absence de borne inférieure dans l'intégrale s'interprète de la façon suivante :

$$\int^x f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]^x = F(x)$$

Ex. 7.1 Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \displaystyle\int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = 0$.

Cor. 7.1

II.4. Intégration par partie

Proposition 7.3 (Intégration par partie)

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $(a;b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 7.2 Trouver l'ensemble des primitives de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(x)$.

Cor. 7.2

Ex. 7.3 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto xe^x$.

Cor. 7.3

Ex. 7.4 (Cor.) Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$.

II.5. Changement de variable

Proposition 7.4 (Changement de variable)

Soit ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et f continue sur $J = \phi(I)$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f \circ \phi(t) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f\big(\phi(t)\big) \times \phi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode : Changement de variable dans une intégrale

En pratique, dans $\displaystyle\int_A^B f(u)\mathrm{d}u$, on effectue très souvent le changement de variables en utilisant une ***bijection*** $\phi : [a,b] \to [A,B]$. Cependant, la proposition 7.4 est valable sous la forme donnée y compris ***si ϕ n'est pas bijective***.

1) On pose $u = \phi(t)$ et on calcule $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
2) On calcule la bijection réciproque $t = \psi(u)$.
3) On remplace dans l'intégrale : $\displaystyle\int_{u=A}^{u=B} f(u)\mathrm{d}u = \int_{t=\psi(A)}^{t=\psi(B)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 7.5 Calculer $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

Cor. 7.5

Ex. 7.6 Calculer une primitive des fonctions $f : x \in]-1;1[\mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{x^2+9}$ et $h : x \in]-1;+\infty[\mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$.

Cor. 7.6

Méthode : Primitives des fonctions du type $x \mapsto \dfrac{\alpha}{ax^2+bx+c}$

Les trois ***méthodes*** utilisées pour l'obtention de primitives dans l'exercice 7.6 sont ***à connaître***. Voici un résumé de ces méthodes :

1) On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du dénominateur.
2) Suivant le signe de Δ, **sur chaque intervalle où la fonction est définie** :
   a) si $\Delta > 0$, l'équation $at^2 + bt + c = 0$ possède deux solutions $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t-t_1)(t-t_2)}\mathrm{d}t$ puis on cherche $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{1}{(t-t_1)(t-t_2)} = \dfrac{A}{t-t_1} + \dfrac{B}{t-t_2}$ ce qui permet de calculer $I(x)$.

b) si $\Delta = 0$, l'équation $at^2+bt+c=0$ possède une solution double $t_0 \in \mathbb{R}$.
On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t-t_0)^2}\mathrm{d}t$ qui se calcule simplement :

$I(x) =$ ....

c) si $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.
On écrit $I(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int^x \dfrac{1}{(t+A)^2+B}\mathrm{d}t$ pour éliminer le terme en t du dénominateur. Le dénominateur ne s'annulant pas, on a alors forcément $B > 0$ ce qui permet d'obtenir l'intégrale à l'aide de changement(s) de variable(s).

3) Si l'on souhaite obtenir **l'ensemble des primitives sur un intervalle où l'intégrande est définie**, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, toutes les primitives s'obtiennent à partir de celle calculée en rajoutant un terme constant.

Pour les fonctions du type $x \mapsto \dfrac{ux+v}{ax^2+bx+c}$, on élimine le terme ux du numérateur en faisant apparaître la dérivée du dénominateur (voir exercice suivant).

Ex. 7.7 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+4}$.

Cor. 7.7

Ex. 7.8 (Cor.) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t = k$$

Ex. 7.9 (Cor.) Calculer $L = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$.

Ex. 7.10 (Cor.) Calculer $I(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{5t^2+2t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

Ex. 7.11 (Cor.) Calculer $J(x) = \displaystyle\int^x \dfrac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1}$ en précisant le ou les ***intervalle(s)*** sur lesquels on effectue l'intégration.

II.6. Primitives usuelles

Primitives usuelles

Le tableau suivant donne les primitives à connaître. La colonne « Validité » indique les intervalles maximaux de validité de la primitive fournie. Lorsqu'on cherche une primitive sur une réunion d'intervalles, on doit a priori prendre ***des constantes d'intégration différentes***

sur chaque intervalle. Le tableau peut aussi se lire « à l'envers » : pour chaque primitive donnée, la colonne de gauche fournit sa dérivée. Enfin, les primitives de tan s'obtiennent en écrivant $\tan = \dfrac{-\cos'}{\cos}$, celles de $\dfrac{1}{\sin(x)}$ ou $\dfrac{1}{\cos(x)}$ de la même manière que dans l'exercice 7.5 et celles des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{a^2 \pm x^2}$ à l'aide de l'exercice 7.6.
Lorsque ce n'est pas précisé, a ***est un réel strictement positif et*** k ***un entier relatif***.

Fonction	Primitive	Validité
$x \mapsto x^a,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$x \mapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^* & \text{si } a \in \mathbb{Z}_-^* \\ \mathbb{R}_+^* & \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \ln\|x\|$	$x \mapsto x\ln\|x\| - x$	$\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{e}^{cx},\ c \in \mathbb{C}^*$	$x \mapsto \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln\|\cos(x)\|$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}(x)$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$

II.7. Primitives particulières

Méthode : Calcul des primitives de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

On écrit $e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx) = e^{(a+ib)x}$, dont on connaît les primitives. On passe ensuite à la partie réelle ou imaginaire suivant ce que l'on cherche.

Ex. 7.12 Calculer l'ensemble des primitives de $x \mapsto e^x(\cos x + \sin x)$.

Cor. 7.12

Méthode : Polynômes trigonométriques

Pour primitiver un polynôme trigonométrique (c'est-à-dire une somme d'expressions du type $\cos^n(x)\sin^p(x)$), on le ***linéarise***.

Ex. 7.13 Calculer l'ensemble des primitives de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)$ et de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin^3(x)$.

Cor. 7.13

III. Équations différentielles

III.1. Généralités

Définition 7.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{C}$ n fois dérivable de dérivées continues.
On appelle ***équation différentielle d'ordre* n *sur* I** une relation satisfaite pour tout $t \in I$ par $y(t)$, $y'(t)$, ..., $y^{(n)}(t)$.

Parmi les équations différentielles que l'on rencontre en physique, on peut par exemple citer :

- Oscillateur harmonique : $y'' + \omega_0^2 y = 0$
- Pendule pesant : $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Ex. 7.14 (Cor.) La fonction tangente est solution sur $I = \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle du premier ordre : $y' = 1 + y^2$.
Trouver toutes les solutions de cette équation différentielle définies de I dans $\mathbb{R}$.

III.2. Équations différentielles linéaires

Définition 7.6

On dit qu'une équation différentielle est ***linéaire*** lorsqu'elle s'écrit

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t)$$

où $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ et b sont des fonctions continues définies sur I.
On dit qu'elle est ***à coefficients constants*** lorsque $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont des fonctions ***constantes***.
On dit qu'elle est ***homogène*** ou ***sans second membre*** lorsque $b = 0$. Sinon on dit qu'elle est ***avec second membre***.

Ex. 7.15 Expliciter la nature des équations différentielles suivantes :

- Oscillateur harmonique :...
- Pendule pesant :...
- $xy''' + 2y'' - y = \cos(x)$ est. ....

IV. Linéaires du premier ordre

IV.1. Sans second membre

Théorème 7.7

Étant donnée une fonction $a : I \to \mathbb{C}$ continue et $A : I \to \mathbb{C}$ l'une de ses primitives, l'équation $y' + a(t)y = 0$ a pour solutions $y : t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$ et il existe une unique solution vérifiant la condition initiale $t_0 \in I, y(t_0) = k_0$ où $k_0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration

IV.2. Équations avec second membre

Théorème 7.8

Étant données deux fonctions $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues, l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^1(I)$ de l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Démonstration

Ex. 7.16 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $xy' - 2y = 0$.
Résoudre la même équation sur $\mathbb{R}_-^*$.
En déduire les solutions de $xy' - 2y = 0$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 7.16

Méthode : Méthode de variation de la constante

Pour obtenir une solution particulière de l'équation (E) avec second membre, on résout d'abord l'équation homogène (E') associée dont la solution est de la forme $y(t) = \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{C}$.
On recherche alors une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$: en remplaçant $y(t)$ dans (E), on obtient $\lambda'(t)$ et une solution particulière y_p de (E) après intégration.

Ex. 7.17 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ $(E_1) : y' - \frac{2}{x}y = x^2$ puis $(E_2) : y' - \frac{2}{x}y = 1 - \ln(x)$.

Cor. 7.17

IV.3. Principe de superposition

Théorème 7.9 (Principe de superposition)

Étant données deux fonctions b_1 et b_2 continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$,
si y_1 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ sur I et
si y_2 est une solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$ sur I,

alors $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $(E) : y' + a(t)y = b_1(t) + b_2(t)$ sur I.

Démonstration

Méthode : Principe de superposition

Le théorème précédent est utilisé de la façon suivante :

- lorsque le second membre $b(t)$ d'une équation différentielle est une somme de fonctions on peut tenter d'obtenir des solutions particulières associées à chacun de ses termes puis faire la somme des solutions obtenues pour avoir une solution particulière de l'équation d'origine ;
- dans certains cas au contraire, on peut tenter en ajoutant et retranchant une même expression au second membre de se ramener à des termes plus faciles à intégrer.

Ex. 7.18 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(E) : y' - \frac{2}{x}y = \ln(x)$.

Cor. 7.18

IV.4. Exercices

Ex. 7.19 Résoudre l'équation différentielle $y' + y = x + 1$.

Cor. 7.19

Ex. 7.20 Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = \cos^2(x)$.

Cor. 7.20

Ex. 7.21 (Cor.) Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y' - iy = -i\left(e^{it} + 1\right)$.

V. Linéaires du second ordre

Dans tout ce qui suit, $a, b \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On cherche les solutions y deux fois dérivables à dérivées continues de l'équation différentielle ***linéaire d'ordre deux à coefficients constants***

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

On note (E') l'équation homogène associée.

V.1. Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition 7.10 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$)

On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est ***de classe*** $\mathcal{C}^2$ ***sur*** I si f est deux fois dérivable sur I et si f'' ***est continue*** sur I.

Notation

Pour $J \subset \mathbb{C}$, on note $\mathcal{C}^2(I, J)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans J. On note donc $f \in \mathcal{C}^2(I, J)$ pour signifier qu'une fonction f est définie sur I, à valeurs dans J, dérivable deux fois (donc continue) sur I ***et de dérivée seconde*** f'' ***continue sur*** I.

V.2. Équation homogène

Remarque

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants. Cherchons, par analogie avec les équations différentielles linéaires du premier ordre, les solutions de (E') du type $x \mapsto e^{rx}$ où r est une constante ***réelle ou complexe***.

....

....

....

Définition 7.11 (Équation caractéristique)

Étant donnée $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients constants, on appelle ***équation caractéristique*** de (E') l'équation $r^2 + ar + b = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 7.12

Soit $(E') : y''+ay'+by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients complexes constants et $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
Alors les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de (E') sont :

- si $\Delta \neq 0$, en notant r_1 et r_2 les racines complexes de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine complexe de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B) \exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{C}^2$$

Démonstration

Remarque

Dans les deux cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$ où A et B sont des constantes réelles ou complexes. On dit que y est ***combinaison linéaire de*** y_1 ***et*** y_2 ou encore que y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.22 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - (1+i)y' + iy = 0$.

Cor. 7.22

V.3. Solutions réelles de l'équation homogène à coefficients réels

Théorème 7.13

Soit $(E') : y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients ***réels*** constants.

Soit $r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

Alors les solutions ***à valeurs réelles*** de (E') sont :

- si $\Delta > 0$, en notant r_1 et r_2 les racines ***réelles*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta = 0$, en notant r_0 la racine ***réelle*** de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto (At + B)\exp(r_0 t), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

- si $\Delta < 0$, en notant $\alpha + i\omega$ et $\alpha - i\omega$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

$$y : t \mapsto \exp(\alpha t)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)), (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

  Cette dernière solution peut aussi s'écrire $y : t \mapsto Y_0\exp(\alpha t)\cos(\omega t + \phi), (Y_0, \phi) \in \mathbb{R}^2$ (voir exercice 4.14 page 74) .

Démonstration

Remarque

Là encore, dans tous les cas y s'écrit $y = Ay_1 + By_2$. À nouveau, y est ***combinaison linéaire de*** y_1 et y_2 ou encore y peut s'exprimer ***dans la base de fonctions*** (y_1, y_2).

Ex. 7.23 Résoudre pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 6y' + 18y = 0$.

Cor. 7.23

V.4. Équation avec second membre

Théorème 7.14

Étant donnés $(a;b) \in \mathbb{K}^2$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$ est obtenue en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de l'équation homogène associée.

Le principe de superposition reste lui aussi valable et les démonstrations sont identiques au cas du premier ordre.

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle avec second membre, on résout tout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre.
La méthode de variation de la constante est parfois encore applicable mais en pratique, seuls sont au programme de PCSI les seconds membres de la forme De^{ct} avec $(D,c) \in \mathbb{C}^2$ qui permettent aussi de traiter les seconds membres du type $De^{ut}\cos(vt)$ ou $De^{ut}\sin(vt)$ en passant à la partie réelle ou imaginaire.
Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme

1) $t \mapsto Ue^{ct}$ lorsque c n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
2) $t \mapsto Ute^{ct}$ lorsque c est solution simple de l'équation caractéristique ;
3) $t \mapsto Ut^2e^{ct}$ lorsque c est solution double de l'équation caractéristique.

Ex. 7.24 Donner l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\cos(t)$.

Cor. 7.24

V.5. Unicité des solutions

Théorème 7.15

Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K})$ alors il existe une unique solution de l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t)$$

vérifiant les ***conditions initiales*** $\begin{cases} y(t_0) & = & v_0 \\ y'(t_0) & = & v_1 \end{cases}$ où $t_0 \in \mathbb{R}$, $(v_0; v_1) \in \mathbb{K}^2$.

Démonstration

Explicitement hors-programme.

Correction des exercices

Cor. 7.4 : On intègre par parties : $\int^x t\cos(t)\mathrm{d}t = [t\sin(t)]^x - \int^x \sin(t)\mathrm{d}t = x\sin(x)+\cos(x)$. L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x\cos(x)$ est donc $\{x \mapsto x\sin(x)+\cos(x)+k, k\in\mathbb{R}\}$.

Cor. 7.8 : ***Analyse*** : si f vérifie la condition donnée, alors $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+a)-f(x-a)=0$, ce qui s'écrit en posant $u=x-a$, $\forall u\in\mathbb{R}, f(u+2a)=f(u)$. Donc f est $2a$-périodique.
Synthèse : supposons que f est $2a$-périodique et soient $x,y\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y+a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(u+2a)\mathrm{d}u \qquad \texttt{en posant } u=t-2a \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x-a}^{y-a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{y-a}^{x-a} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{y-a}^{y+a} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Donc $\int_{x-a}^{x+a} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend pas de la valeur de $x\in\mathbb{R}$ ce qui achève notre démonstration.

Cor. 7.9 : On reconnaît l'aire d'un demi-disque de rayon 1 : $L=\frac{\pi}{2}$. Pour le démontrer, on effectue le changement de variable $u=\cos(t)$, $-1=\cos(\pi)$, $1=\cos(0)$, $\mathrm{d}u=-\sin(t)\mathrm{d}t$ en remarquant que sur $[0,\pi]$, $\sqrt{1-u^2}=\sin(t)$. On remplace dans l'intégrale

$$L = -\int_\pi^0 \sin^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t-\sin(t)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Cor. 7.10 : Discriminant : $\Delta = 4-20=-16<0$, le dénominateur ne s'annule donc jamais. On calcule une primitive sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{5t^2+2t+1} \\
&= \frac{1}{5}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{25}} \\
&= \frac{5}{4}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{5t+1}{2}\right)^2+1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u=\frac{5t+1}{2}$, $\mathrm{d}u=\frac{5}{2}\mathrm{d}t$. D'où

$$I(x) = \frac{5}{4}\int^{\frac{5x+1}{2}} \frac{\frac{2}{5}\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{5x+1}{2}\right)$$

Cor. 7.11 : Discriminant : $\Delta = 16-12=4>0$. Le dénominateur possède donc deux racines $t_1=\frac{-4+2}{6}=\frac{-1}{3}$ et $t_2=-1$. On calcule une primitive sur $]-\infty;-1[$ ou $\left]-1;\frac{-1}{3}\right[$ ou $\left]\frac{-1}{3};+\infty\right[$.

$$\begin{aligned}
J(x) &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+4t+1} \\
&= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}
\end{aligned}$$

On cherche à écrire $\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}$ sous la forme $\frac{A}{t+\frac{1}{3}}+\frac{B}{t+1}$.

On peut procéder ***par identification*** ou utiliser la méthode suivante :

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}=\frac{A}{t+\frac{1}{3}}+\frac{B}{t+1} \overset{\times\left(t+\frac{1}{3}\right)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+1}=A+\frac{B\left(t+\frac{1}{3}\right)}{t+1} \overset{t=\frac{-1}{3}}{\Longrightarrow} A=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\left(t+\frac{1}{3}\right)(t+1)}=\frac{A}{t+\frac{1}{3}}+\frac{B}{t+1} \overset{\times(t+1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{t+\frac{1}{3}}=\frac{A(t+1)}{t+\frac{1}{3}}+B \overset{t=-1}{\Longrightarrow} B=\frac{-3}{2}$$

D'où $J(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{2}\displaystyle\int^x \frac{1}{t+\frac{1}{3}}-\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{3}}{x+1}\right|=\ln\sqrt{\left|\frac{3x+1}{3x+3}\right|}$.

Cor. 7.14 : $1+y^2$ est une fonction strictement positive. L'équation différentielle donnée est donc équivalente à

$$\frac{y'}{1+y^2}=1$$

En primitivant on obtient donc $\operatorname{Arctan}(y)=x+k$ où k est une constante réelle.
On en déduit que $y=\tan(x+k)$. Or pour que y soit définie sur I, il faut que k soit un multiple entier de π.
La seule solution définie sur I de $y'=1+y^2$ est donc la fonction tangente.

Cor. 7.21 : La solution générale de l'équation homogène est $t\in\mathbb{R}\mapsto\lambda e^{it}, \lambda\in\mathbb{C}$. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante :
$\lambda' e^{it}=-i\left(e^{it}+1\right)$ donc $\lambda'=-i\left(e^{-it}+1\right)$ et $\lambda=-it+e^{-it}$ convient. On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{t\in\mathbb{R}_+^*\mapsto 1+(\lambda-it)e^{it}, \lambda\in\mathbb{C}\right\}$.

Maths - Chapitre 8

Nombres réels et suites numériques

« Les considérations qui font l'objet de ce petit écrit remontent à l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, à l'École polytechnique fédérale de Zurich, pour la première fois dans la situation de devoir exposer les éléments du calcul différentiel, et je ressentais à cette occasion, plus vivement que jamais auparavant, le manque d'un fondement véritablement scientifique à l'arithmétique. En concevant qu'une grandeur variable s'approche d'une valeur limite fixe, et notamment en prouvant la proposition ***que chaque grandeur qui croît constamment [et qui reste majorée] doit de façon certaine s'approcher d'une valeur limite***, je me réfugiais dans les évidences géométriques. Maintenant aussi, je considère l'appel à l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel comme extrêmement utile du point de vue didactique, et même indispensable si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais [...] ce sentiment d'insatisfaction s'imposait tant à moi que je pris la ferme résolution d'y réfléchir sans relâche [...]. On dit constamment que le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, et ***pourtant nulle part n'est donnée une explication de cette continuité***. », extrait de *Continuité et nombres irrationnels*

Richard Dedekind[1]

Le point de départ de ce chapitre sera la propriété qui résulte du travail de **Dedekind** et de ses successeurs et qui ***caractérise l'avantage théorique qu'il y a de travailler dans l'ensemble des nombres réels plutôt que dans l'ensemble des nombres rationnels***. Nous approfondirons la notion de nombre réel et en tirerons des conséquences pour l'étude des suites numériques et de ***leurs limites***.

I. Programme officiel

Nombres réels et suites numériques

1. **Richard Dedekind**(1831 ;1916), mathématicien allemand ayant contribué à fonder la logique mathématique contemporaine, notamment la construction des ensembles de nombres.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Ensembles usuels de nombres	
Entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	
Droite réelle.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors-programme.
La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.	
Borne supérieure (respectivement inférieure) d'une partie non vide majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$.	
Partie entière.	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut ou par excès.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a, b dans X, on a $[a; b] \subset X$.	
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Explicitement, implicitement ou par récurrence.
Monotonie, suite majorée, minorée, bornée.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Exemples d'étude de la monotonie d'une suite récurrente.
Suites stationnaires.	
Suites arithmétiques, géométriques.	Les élèves doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.	La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Notation $u_n \to l$. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle l en majorant $\lvert u_n - l\rvert$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim u_n$.
Suite convergente, suite divergente.	
Toute suite réelle convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	
Passage à la limite dans une inégalité.	
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorème de convergence par encadrement, théorèmes de divergence par majoration ou minoration.	
Théorème de la limite monotone.	
Théorème des suites adjacentes.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Suites extraites	
Définition, utilisation pour montrer la divergence d'une suite.	
f) Suites complexes	
Convergence d'une suite complexe.	Traduction à l'aide des parties réelles et imaginaires.
Suites complexes bornées : toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaison linéaire, produit, quotient.	

II. L'ensemble des nombres réels

II.1. Rappels et pré-requis

Ensembles usuels de nombres

Il convient d'emblée de bien comprendre que la notion de nombre réel repose :

- ***sur l'intuition géométrique*** de ***droite munie d'un repère***, qui contient en elle-même l'idée de ***continuité*** ;
- ***sur les intuitions algébriques*** de ***corps*** (voir la définition 4.7) et de ***relation d'ordre compatible avec les opérations*** (voir les définitions 2.1 et 3.1).

À ce titre les trois définitions précédentes ***doivent être revues et réapprises*** si besoin est.

On rappelle de plus que :

- $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$ et $(\mathbb{C}, +, \times)$ sont trois exemples de corps, les ***deux premiers uniquement étant munis d'une relation d'ordre totale compatible avec leurs opérations*** ;
- on a la suite d'inclusions strictes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux c'est-à-dire des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{N}{10^n}$ avec $(N, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$;
- on appelle ***nombres irrationnels*** les éléments de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Définition 8.1 (Majorant, minorant)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***majorée par*** $M \in \mathbb{R}$ et on dit que M ***est un majorant de*** E si ....

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ est ***minorée par*** $m \in \mathbb{R}$ et on dit que m ***est un minorant de*** E si ....

Une partie qui est minorée par m et majorée par M est dite ....

Définition 8.2 (Maximum, minimum, extremums)

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus grand élément*** $G \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***maximum de*** E si ....

On dit qu'une partie $E \subset \mathbb{R}$ possède ***un plus petit élément*** $P \in \mathbb{R}$ aussi appelé ***minimum de*** E si ....

Proposition 8.3 (Unicité du maximum et du minimum)

Si une partie de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément (ou un plus petit élément), alors il est unique.

II.2. Propriété de la borne supérieure, inférieure

Définition 8.4 (Borne supérieure, borne inférieure)

Soit $\mathcal{A}$ une partie ***non vide*** de $\mathbb{R}$. ***Lorsque ces nombres existent*** :

- on dit que S est ***la borne supérieure*** de $\mathcal{A}$ si S est ***le plus petit majorant*** de $\mathcal{A}$;
- on dit que I est ***la borne inférieure*** de $\mathcal{A}$ si I est ***le plus grand minorant*** de $\mathcal{A}$.

Notation

À condition que l'un ou l'autre existe, on note $S = \sup \mathcal{A}$ et $I = \inf \mathcal{A}$.

Ex. 8.1 Pour les ensembles suivants, donner, s'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le maximum, le minimum, la borne supérieure, la borne inférieure :
$\mathbb{N}$, $]1; 2]$, $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{Q}_+, x^2 < 2\}$

Remarque

Si $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément, alors cet élément est aussi la borne supérieure de $\mathcal{A}$.
En effet, ...
....
De même si $\mathcal{A}$ admet un plus petit élément, alors c'est aussi la borne inférieure de $\mathcal{A}$.
Les réciproques sont fausses (voir exercice précédent).

Axiome 8.5 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$ ou *propriété de la borne supérieure*)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne supérieure.
Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet **dans** $\mathbb{R}$ une borne inférieure.

Remarque

Cette propriété distingue le corps des nombres réels de celui des nombres rationnels. Elle ***doit être connue***. Elle exprime la ***continuité*** de la droite réelle et complète la remarque précédente : pour une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$

- $\mathcal{A}$ majorée ***équivaut à*** $\sup \mathcal{A}$ existe ;
- $\max \mathcal{A}$ existe ***implique*** $\sup \mathcal{A}$ existe, mais la réciproque est fausse.

L'ensemble des majorants d'une partie quelconque $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$ est

- vide si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée,
- $\mathbb{R}$ si $\mathcal{A}$ est vide,
- l'intervalle $[\sup \mathcal{A}; +\infty[$ sinon. En effet, d'après l'axiome précédent, l'ensemble des majorants possède toujours un plus petit élément si $\mathcal{A}$ est non vide majoré, c'est la borne supérieure.

Ces remarques s'adaptent à la borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

Méthode

Pour démontrer que S est la borne supérieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$ majorée on montre :

1) que S est un majorant de $\mathcal{A}$;

2) que tout majorant de $\mathcal{A}$ est supérieur ou égal à S.

Pour obtenir la borne supérieure d'une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, on peut aussi commencer par calculer l'ensemble des majorants, puis obtenir le plus petit d'entre eux.
La méthode s'adapte à l'obtention de la borne inférieure de $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Ex. 8.2 Montrer que $\sup \mathcal{E} = \sqrt{2}$ (où $\mathcal{E}$ est défini dans l'exercice précédent).

II.3. Partie entière d'un nombre réel

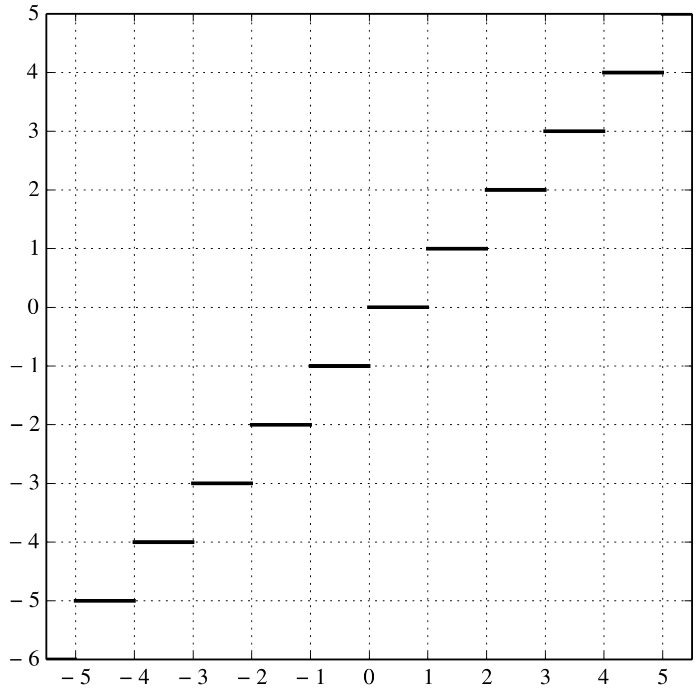
Définition 8.6

Pour tout réel x, on appelle ***partie entière de*** x le plus grand entier $N \in \mathbb{Z}$ inférieur ou égal à x.
Cet entier existe toujours d'après la propriété 2.5 (propriété fondamentale des entiers).

Notation

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Représentation graphique de $x \in \mathbb{R} \mapsto \lfloor x \rfloor$



Propriété 8.7

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
3) Si $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \leq x$ alors $n \leq \lfloor x \rfloor$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}, \lfloor x + m \rfloor = \lfloor x \rfloor + m$.

Démonstration

Méthode

Les deux premières propriétés ci-dessus permettent de traiter la plupart des problèmes faisant intervenir la fonction partie entière. ***Il faut donc absolument les connaître***.

Ex. 8.3

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers positifs a_n et b_n tels que

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^n &= a_n + b_n\sqrt{3} \\ 3b_n^2 &= a_n^2 - 1 \end{cases}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^n} \right\rfloor$ est un entier impair.

Cor. 8.3

II.4. Approximations décimales

Définition 8.8

$(x_0; x) \in \mathbb{D} \times \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Si $|x - x_0| \leq \epsilon$, on dit que x_0 est ***une approximation décimale*** de x à ϵ près. De plus :
si $x_0 > x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***excès***.
si $x_0 < x$, on dit que x_0 est une valeur approchée de x par ***défaut***.

Théorème 8.9 (Densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$)

L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } a < b, \exists x \in \mathbb{D} \text{ tel que } a < x < b$$

Démonstration hors programme

Soient $a < b$ deux réels. On a donc $b - a > 0$.
Notons $n = \lfloor \log_{10}(b-a) \rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$.
$n + 1 \leqslant \log_{10}(b-a) < n + 2 \Rightarrow 10^{n+1} \leqslant b - a < 10^{n+2} \Rightarrow 10 \leqslant \dfrac{b-a}{10^n} < 100.$
On en déduit que $\dfrac{a}{10^n} < \dfrac{a}{10^n} + 10 \leqslant \dfrac{b}{10^n}$.
On conclut en posant $N = \left\lfloor \dfrac{a}{10^n} + 9 \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ *qui vérifie* $\dfrac{a}{10^n} < N \leqslant \dfrac{a}{10^n} + 9 < \dfrac{b}{10^n}$ *d'où* $a < \dfrac{N}{10^{-n}} < b$.

Corollaire 8.10

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

Corollaire 8.11

Pour tout réel x et tout réel $\epsilon > 0$, il existe une approximation décimale de x à ϵ près, que ce soit par défaut ou par excès.

Démonstration

II.5. Intervalles réels

On rappelle que les intervalles réels ont été définis au chapitre 1 page 17 pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par :

- ***Intervalles fermés*** :
  $[a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- ***Intervalles semi-ouverts*** :
  $]a;b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$, $[a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$,
  $[a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$, $]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leqslant b\}$.
- ***Intervalles ouverts*** :
  $]a;b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$, $]a;+\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$, $]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$
  et $\mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$.

En particulier, $\emptyset = [1;0] =]1;0] =]0;0[$ est un intervalle réel (à la fois fermé, semi-ouvert et ouvert).

Remarque

Le théorème 8.9 peut s'énoncer à l'aide des intervalles sous la forme :
« Pour tout intervalle réel I ouvert non vide, il existe un nombre décimal d tel que $d \in I$ ».

Lemme 8.12

Étant donnée une partie ***non vide*** $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$:

1) si $\mathcal{A}$ est majorée et possède par conséquent une borne supérieure S, alors quel que soit $x < S$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x' \leqslant S$;
2) si $\mathcal{A}$ est minorée et possède par conséquent une borne inférieure I, alors quel que soit $x > I$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x > x' \geqslant I$;
3) si $\mathcal{A}$ n'est pas majorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x < x'$;
4) si $\mathcal{A}$ n'est pas minorée, alors quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' \in \mathcal{A}$ tel que $x' < x$.

Démonstration

Proposition 8.13

Une partie $\mathcal{X}$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous u et v dans $\mathcal{X}$, on a $[u,v] \subset \mathcal{X}$.

Démonstration

Ex. 8.4 (Cor.) [$*$] A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x;y) \in A \times B, x \leq y$.

1) Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$.
2) Montrer que $\sup A = \inf B \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists (x;y) \in A \times B, y - x < \epsilon$.

III. Introduction aux suites

III.1. Définitions

Définition 8.14 (Suites)

On appelle ***suite réelle*** tout élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et ***suite complexe*** tout élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
Par extension, si A est une ***partie infinie*** de $\mathbb{N}$, tout élément de $\mathbb{R}^A$ est aussi appelé suite réelle et tout élément de $\mathbb{C}^A$ est aussi appelé suite complexe.

Dans ce qui suit, on notera $\mathbb{K}$ pour désigner $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation

Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ est une suite, on préfère généralement comme pour les familles finies la notation u_0, u_1, u_2, etc... pour les images de la suite u.
On peut cependant aussi noter $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$etc... ces images.
La ***suite elle-même*** est notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Attention à ne pas confondre u_n qui est l'image de n par la suite u et u elle-même.

Remarque

De façon évidente, la restriction $u_{|I}$ d'une suite à une partie finie $I \subset \mathbb{N}$ est une famille finie.
Les notions de suite et de famille finie sont donc intimement liées.

Définition 8.15 (Égalité de deux suites)

Deux suites u et v sont ***égales*** si :

- elles sont ***définies sur la même partie*** $A \subset \mathbb{N}$;
- $\forall n \in A, u_n = v_n$.

On supposera à partir de maintenant que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ sauf indication contraire.

Définition 8.16 (Suites particulières)

Étant donnée u une suite réelle ou complexe, on dit :

- que u est ***constante*** s'il existe un réel ou un complexe a tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a$;
- que u est ***stationnaire*** s'il existe un réel ou un complexe a et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n = a$;
- que u est ***périodique*** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n + p \in A$ et $u_{n+p} = u_n$.
  La période de la suite est alors le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant cette propriété.

Remarque

Une définition alternative du mot ***période*** désigne ***tout entier satisfaisant la propriété donnée***. Auquel cas, il existe ***une infinité de périodes*** pour une suite périodique et on demandera souvent de donner ***la plus petite période*** de la suite.

Définition 8.17 (Propriété valable « à partir d'un certain rang »)

Étant donné un prédicat P dépendant d'une variable $x \in \mathbb{K}$, on dira que la suite u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $P(u_n)$ soit vraie.

Ex. 8.5 Écrire à l'aide de quantificateurs :
u vérifie P ***à partir d'un certain rang*** si et seulement si ....
ou plus simplement ....
Reformuler le fait qu'une suite est stationnaire.
u est stationnaire si et seulement si ....

III.2. Modes de définition d'une suite

Une suite peut être définie de multiples façons. On retiendra les trois modes de définition suivants illustrés chacun par un exercice :

a) De façon explicite

Ex. 8.6 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{2n+1} = (-1)^n \end{cases}$.
Montrer que u est périodique et préciser sa période.

Cor. 8.6

b) De façon implicite

Ex. 8.7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $e^{u_n} - 1 = u_n + n$.

Cor. 8.7

c) Par récurrence

Ex. 8.8 On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} & u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$.
Montrer que lorsqu'elle est définie, cette suite est périodique. On précisera notamment les valeurs de u_0 pour lesquelles la suite est définie et la période de la suite suivant la valeur de u_0.

Cor. 8.8

Remarque

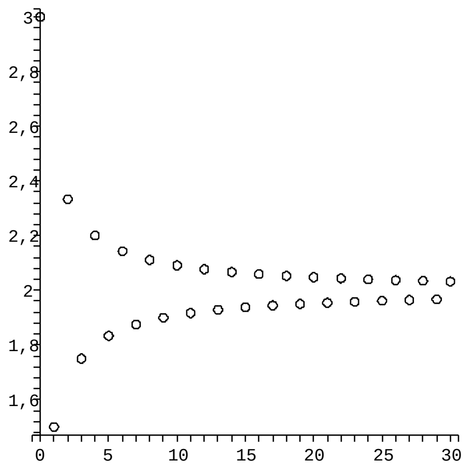
Dans le cas d'une suite définie par récurrence, la ***démonstration par récurrence*** est un outil ***indispensable***. Il faut toujours l'avoir à l'esprit.

III.3. Définitions spécifiques aux suites réelles

Définition 8.18 (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une ***suite réelle*** u est l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, u_n) obtenu lorsque n décrit $\mathbb{N}$.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$.



Définition 8.19 (Représentation graphique d'une suite récurrente)

Lorsque la suite est définie par récurrence $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$, il est souvent plus aisé pour observer son « comportement » (on parle plutôt de sa ***dynamique***) de la représenter graphiquement en traçant la représentation graphique de la fonction f, la droite d'équation $y = x$, puis en utilisant ces deux représentations graphiques pour obtenir de proche en proche les valeurs des termes de la suite u sur l'axe des abscisses.

Exemple : représentation graphique de la suite $u : \begin{cases} u_0 & = & \frac{4}{5} \\ u_{n+1} & = & \frac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$.

Définition 8.20 (Suites majorées, minorées)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***majorée*** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***minorée*** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$.

Remarque

Comme il n'existe pas de relation d'ordre totale sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$, les notions de suites majorées et minorées ne sont pas définies sur $\mathbb{C}$. Cependant, la définition suivante est valable pour les suites réelles ***et complexes*** :

Définition 8.21 (Suites bornées)

On dit qu'une suite ***réelle ou complexe*** u est ***bornée*** si la suite réelle $|u|$ est majorée.

Proposition 8.22

Une suite ***réelle*** u est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Démonstration

Définition 8.23 (Suites monotones)

On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***croissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** u est ***décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
On dit qu'une ***suite réelle*** est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.
Lorsque les inégalités sont strictes, on dit que la suite est ***strictement*** croissante ou ***strictement*** décroissante, et par conséquent ***strictement*** monotone.

Méthode

Pour étudier la monotonie d'une suite u on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.
Cependant, dans le cas d'une suite $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ définie par récurrence,
$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$ dépend de la valeur de u_n.
Dans ce cas, pour montrer que la suite est monotone, on cherchera des ***intervalles*** $I \subset \mathbb{R}$ tels que

- $\forall x \in I, f(x) \in I$: on dit que l'intervalle I est ***stable par*** f ;
- g est de signe constant sur I.

Cette méthode sera précisée lors du chapitre sur la continuité.

Ex. 8.9 Soit $u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2 + u_n}{2} \end{cases}$ (voir représentation graphique précédente).
Montrer que si $u_0 \in [0; 1]$, alors u est décroissante.

Cor. 8.9

IV. Suites arithmétiques, géométriques et récurrentes linéaires

IV.1. Suites arithmétiques

Définition 8.24

Une suite u est dite ***arithmétique*** s'il existe un nombre r (réel ou complexe) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

- r est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 8.25

u est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

Proposition 8.26 (Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = n\frac{u_{p+1} + u_{p+n}}{2}$$

Autrement dit, la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes par la moyenne arithmétique du premier et du dernier de ces termes.

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section III.4.

IV.2. Suites géométriques

Définition 8.27

Une suite u est dite ***géométrique*** s'il existe un nombre q (réel ou complexe) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$.
q est appelé ***raison*** de la suite u.

Propriété 8.28

u est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$.

Démonstration

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites arithmétiques.

Proposition 8.29 (Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

La somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=p+1}^{p+n} u_k = u_{p+1}\frac{1-q^n}{1-q}$$

Démonstration

Démonstration faite au chapitre 2, section III.4.

Corollaire 8.30

Quels que soient $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{C}$, $x^n - y^n = (x-y)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.

IV.3. Suites récurrentes linéaires

Définition 8.31

On appelle ***suite arithmético-géométrique*** toute suite définie pour $a, b \in \mathbb{K}$ par u : $\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+1} & = & au_n + b \end{cases}$

Remarque

Si $a = 1$, on retrouve le cas particulier des suites arithmétiques, et si $b = 0$ on retrouve celui des suites géométriques.

Proposition 8.32

Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit u une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$ $(a \neq 1)$. Alors :

u est la somme d'une suite géométrique v de raison a et d'une suite constante c ***vérifiant la même relation de récurrence que*** u.

Démonstration

Remarque

On peut faire une analogie entre les suites arithmético-géométriques et les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1 (aussi curieux que cela puisse paraître au premier abord !).

En effet, considérons l'équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$. Pour obtenir ses solutions, il faut :

- .... ;
- ....
....

....
....

Définition 8.33

On appelle ***suite récurrente linéaire d'ordre 2*** toute suite définie pour $a, b \neq 0 \in \mathbb{K}$ par

$$u : \begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{K} \\ u_1 & \in & \mathbb{K} \\ u_{n+2} & = & au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On appelle ***équation caractéristique associée*** à cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 l'équation d'inconnue $r \in \mathbb{C}$

$$r^2 - ar - b = 0, \text{ de discriminant } \Delta = a^2 + 4b$$

Proposition 8.34

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu) z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu) z_0 = (\lambda + u_0) z_0$.

Démonstration

La démonstration sera faite ultérieurement conformément au programme.

Remarque

- On remarquera ***la très grande ressemblance entre les propositions précédentes*** et ***celles concernant les équations différentielles linéaires*** du chapitre 7, section V. Cette ressemblance entre des objets à priori très éloignés sera expliquée dans les chapitres sur les espaces vectoriels et justifie l'usage répété du mot ***linéaire*** pour qualifier ces objets.
- ***Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants***, la proposition 8.34 s'adapte lorsque $u_0, u_1, a, b \in \mathbb{R}$ à l'obtention d'une formule explicite pour les suites réelles :
  - ⋆ si $\Delta > 0$, on écrit $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions ***réelles*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;
  - ⋆ si $\Delta = 0$, on écrit $u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$ où z_0 est l'unique solution ***réelle*** double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + u_0) z_0$;
  - ⋆ si $\Delta < 0$, on écrit $u_n = r^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$ où $re^{\pm i\theta}$ sont les deux solutions ***complexes conjuguées*** distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifient $u_0 = \lambda$ et $u_1 = r [u_0 \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)]$.

Méthode : Suites arithmético-géométrique et suites récurrentes linéaires

- Pour une suite arithmético-géométrique vérifiant $u_{n+1} = au_n + b, a \neq 1$, ***on retient uniquement*** qu'une formule explicite est obtenue comme ***somme d'une suite géométrique de raison*** a ***et d'une solution particulière constante de la formule de récurrence***. Le premier terme de la suite géométrique peut être facilement obtenu par le calcul du premier terme de u.
- Pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$, ***on retient uniquement*** la formule explicite suivant les valeurs du discriminant. Les valeurs de λ, μ peuvent être facilement obtenues par le calcul des deux premiers termes de u.
  On est aidé en cela par la ressemblance entre la méthode vue pour les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants et celle énoncée dans la proposition 8.34 et la remarque suivante.

Ex. 8.10 ***Suite de Fibonacci***
Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$.

Cor. 8.10

Ex. 8.11 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Comment aurait-on pu obtenir la formule explicite sans le recours à la méthode du cours ?

Cor. 8.11

Ex. 8.12 Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ et montrer que cette suite est périodique.

Cor. 8.12

Ex. 8.13 (Cor.) Exprimer u_n en fonction de n pour $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 3$.
Simplifier $u_{100} + u_{101}$. Ce résultat se généralise-t-il ?

Important ! Ressemblance... oui mais !

Les équations différentielles linéaires sont données sous la forme $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ tandis que les suites récurrentes linéaires vérifient
$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0 \Leftrightarrow u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0, b \neq 0$ ce qui explique la légère différence entre les équations caractéristiques associées (et leur discriminant).
En outre, si $\Delta = 0$ par exemple, la solution générale de $y'' + ay' + by = 0, b \neq 0$ s'écrit $y = (\lambda x + \mu)e^{z_0 x}$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique tandis que la formule explicite obtenue pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, b \neq 0$ est $u_n = (\lambda n + \mu)z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique.

IV.4. Démonstration par récurrence double

Méthode : Démonstration par récurrence double

Étant donné $n_0 \in \mathbb{Z}$, pour démontrer qu'un prédicat $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$, on peut effectuer une ***récurrence double*** :

- **Initialisation** : ***on vérifie que*** $P(n_0)$ ***et*** $P(n_0+1)$ ***sont vrais***.
- **Hérédité** : on suppose que pour un entier $n \geqslant n_0$, les propriétés $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies, ***en énonçant clairement ces propriétés appelées hypothèses de récurrence***. On démontre alors, sous ces hypothèses, que $P(n+2)$ ***est vraie***.
- **Conclusion** : « ***La propriété est initialisée aux rangs*** n_0 ***et*** n_0+1 ***et héréditaire pour*** $n \geqslant n_0$***, elle est donc vraie pour tout entier*** $n \geqslant n_0$***.*** »

En résumé, on démontre :

$$\overbrace{P(n_0) \textbf{ et } P(n_0+1)}^{\text{Initialisation}} \Rightarrow P(n_0+2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow \underbrace{\big(P(n) \textbf{ et } P(n+1)\big) \Rightarrow P(n+2)}_{\text{Hérédité}} \Rightarrow \ldots$$

Ex. 8.14 ***Suite de Fibonacci (bis)***
Sans utiliser la formule explicite obtenue à l'exercice 8.10, montrer que la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_0 = u_1 = 1$ vérifie :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$.

Cor. 8.14

V. Limite d'une suite réelle

Dans cette section, les suites considérées sont des ***des suites réelles***.

V.1. Limite finie

Définition 8.35

On appelle ***intervalle non trivial*** de $\mathbb{R}$ tout intervalle non vide et non réduit à un point.

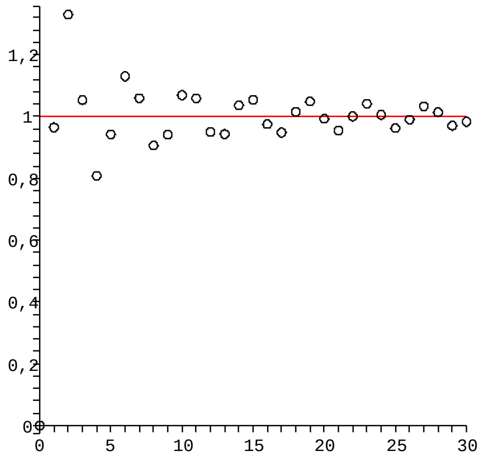
Définition 8.36

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** le réel α (ou ***converge vers*** α) si tout intervalle fermé non trivial centré sur α contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.α est appelé ***limite de la suite*** u.
Une suite ***qui converge vers un nombre réel*** est dite ***convergente***.
Sinon, elle est dite ***divergente***.

Notation

Avec des quantificateurs cela s'écrit : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$.



Remarque

- N dépend à priori de ϵ et généralement, plus ϵ est petit, plus N doit être choisi grand.
- Il découle immédiatement de la définition que
  $|u_n| \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow u_n \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Méthode

Pour montrer qu'une suite u converge vers α ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $\epsilon > 0$
   « ***Soit*** $\epsilon > 0$**.** »

2) on trouve un rang N adapté à ϵ
   « ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que pour tout entier*** $n \geq N, |u_n - \alpha| \leqslant \epsilon$**.** »

On peut aussi faire une démonstration par analyse/synthèse.

Ex. 8.15 Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Cor. 8.15

V.2. Unicité de la limite d'une suite convergente

Lemme 8.37

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$x = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, |x| \leqslant \epsilon$

Démonstration

Proposition 8.38

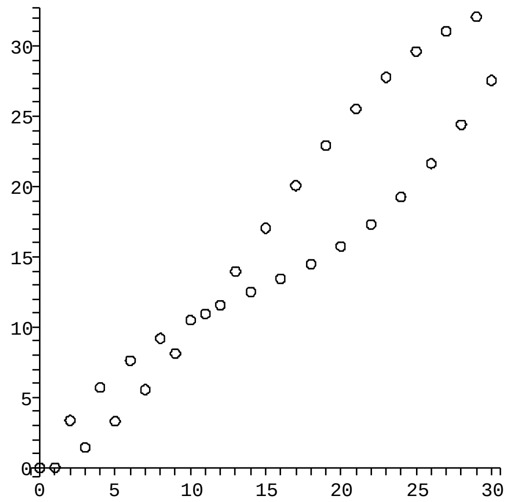
La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration

V.3. Limite infinie

Définition 8.39

On dit qu'une suite réelle u ***tend vers*** $+\infty$ (ou ***diverge vers*** $+\infty$) si tout intervalle du type $[A, +\infty[$ contient ***tous les termes de la suite à partir d'un certain rang***.



Notation

Avec des quantificateurs :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$.
On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Définition 8.40

De même, on dit que u ***tend vers*** $-\infty$ (ou ***diverge vers*** $-\infty$) et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si

....

Remarque

N dépend à priori de A et plus $|A|$ est grand, plus N doit être choisi grand.

Méthode

Pour montrer qu'une suite u diverge vers $\pm\infty$ ***à l'aide de cette définition*** :

1) on se donne une valeur $A \in \mathbb{R}$
« ***Soit*** $A \in \mathbb{R}$. »

2) on trouve un rang N adapté à A
« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \geqslant A$ »
pour une suite divergeant vers $+\infty$

ou

« ***Montrons qu'il existe*** $N \in \mathbb{N}$ ***tel que quel que soit*** $n \geqslant N, u_n \leqslant A$ »

pour une suite divergeant vers $-\infty$.

On peut aussi faire une démonstration par analyse synthèse.

Ex. 8.16 Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Cor. 8.16

Proposition 8.41

La limite (finie ou infinie) d'une suite est unique.

V.4. Propriété

Propriété 8.42

Si u est une suite convergente alors elle est bornée.

Si u diverge vers $\pm\infty$ alors elle n'est pas bornée.

Les réciproques sont fausses en général.

Démonstration

V.5. Opérations sur les limites finies

Théorème 8.43

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l_2 \in \mathbb{R}$ alors

1) Combinaisons linéaires : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda l_1 + \mu l_2$.
2) Produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l_1 l_2$.
3) Quotient : si $l_1 \neq 0$, alors $\dfrac{v}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{l_2}{l_1}$.

Démonstration

V.6. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 8.44

Si u et v sont deux suites réelles convergeant vers l_1 et l_2 et telles que à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $l_1 \leqslant l_2$.

Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, on ne peut rien affirmer de plus : on a toujours $l_1 \leqslant l_2$.

Démonstration

VI. Théorèmes d'existence d'une limite

VI.1. Théorèmes des gendarmes

Théorème 8.45

Si u et v sont deux suites réelles et l un réel tels que u converge vers 0 et à partir d'un certain rang $|v_n - l| \leqslant u_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 8.46 (Théorème des gendarmes)

Si u, v et w sont trois suites réelles telles que u et w convergent vers la même limite l et à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Théorème 8.47

Soient u et v deux suites réelles telles que à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Corollaire 8.48

La suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$,
- diverge vers $+\infty$ si $a > 1$;
- est constante égale à 1 si $a = 1$ (donc converge vers 1) ;
- converge vers 0 si $-1 < a < 1$;
- n'admet pas de limite si $a \leqslant -1$.

Démonstration

VI.2. Suites monotones

Théorème 8.49

Toute suite réelle croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

Théorème 8.50

Toute suite réelle décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 8.51 (Théorème de convergence monotone)

Toute suite réelle croissante majorée converge vers sa borne supérieure.
Toute suite réelle décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.

Démonstration

VI.3. Suites adjacentes

Définition 8.52

On dit que deux suites u et v sont adjacentes si $\begin{cases} \text{l'une est une suite croissante} \\ \text{l'autre est une suite décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$

Théorème 8.53 (Théorème des suites adjacentes)

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont même limite.

Démonstration

VII. Compléments

VII.1. Suites extraites

Définition 8.54

Étant donnée une suite u, on dit que v est une ***suite extraite*** de u s'il existe une injection croissante $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.

Proposition 8.55

Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.

Ex. 8.17 On donne $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{3}\right)$. Expliciter les suites extraites $(v_n)_{n\in N} = (u_{6n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in N} = (u_{6n+4})_{n\in\mathbb{N}}$.
Que peut-on en conclure pour la suite u ?

Cor. 8.17

VII.2. Suites complexes

Définition 8.56

Étant donnée une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe, on définit les suites $\mathcal{R}e\,(z) = (\mathcal{R}e\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{I}m\,(z) = (\mathcal{I}m\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\bar{z} = (\overline{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $|z| = \left(|z_n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 8.57

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - l| = 0$.
Sinon, on dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Notation

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$.

Important !

Les limites infinies ***ne sont pas définies pour les suites complexes***.

Théorème 8.58

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{R}e\,(z_n) = \mathcal{R}e\,(l) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{I}m\,(z_n) = \mathcal{I}m\,(l) \end{cases}$$

Démonstration

Remarque

Ce théorème permet d'étudier les suites complexes en se ramenant aux suites réelles. Il permet aussi de transférer certaines propriétés des suites réelles aux suites complexes : limite d'une somme, d'un produit, etc...

Important !

Tous les théorèmes concernant les suites réelles faisant intervenir la relation d'ordre ....
....
....

VII.3. Droite numérique achevée

Définition 8.59

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Remarque

On peut prolonger les lois de $(\mathbb{R}; +; \times)$ à $\overline{\mathbb{R}}$ par analogie avec les théorèmes opératoires sur les limites mais pas totalement à cause des cas d'indétermination.

Ainsi, soit $l \in \mathbb{R}$, on pose :

$l + \infty =$..............................	$l - \infty =$..............................
$+\infty + \infty =$..........................	$-\infty - \infty =$..........................
$-\infty + \infty =$..........................	$+\infty - \infty =$..........................

De même, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_-^*$, on a :

$a \times (+\infty) =$.........................	$a \times (-\infty) =$.........................
$b \times (+\infty) =$.........................	$b \times (-\infty) =$.........................
$(+\infty) \times (+\infty) =$.....................	$(-\infty) \times (-\infty) =$.....................
$(-\infty) \times (+\infty) =$.....................	$(+\infty) \times (-\infty) =$.....................
$0 \times (+\infty) =$.........................	$0 \times (-\infty) =$.........................

Ces tableaux peuvent être aussi vus comme des tableaux récapitulatifs des opérations sur les limites. Ils sont complétés pour $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$.

On retiendra enfin que les limites de la forme $1^{\pm\infty}$, $\pm\infty^0$ et 0^0 ....

VII.4. Exercice de synthèse

Ex. 8.18 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.
3) Calculer I_2, I_3 et I_4.
4) Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.
5) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.
6) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
7) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

VIII. Correction des exercices

Cor. 8.4 :

1) En deux temps :
   - Soit $y \in B$. $\forall x \in A, x \leq y$ donc y est un majorant de A et $\sup A \leq y$.
     Nous venons de démontrer que $\forall y \in B, \sup A \leq y$.
   - Ainsi, B est minoré par $\sup A$ et $\inf B \geq \sup A$.

2) Supposons que $\sup A = \inf B$ et soit $\epsilon > 0$.
Soit $u = \sup A - \frac{\epsilon}{2}$ et $v = \inf B + \frac{\epsilon}{2}$. D'après le lemme 8.12, il existe $x \in A$ tel que $u < x < \sup A$ c'est-à-dire $-\sup A < -x < -u$, et $y \in B$ tel que $\inf B < y < v$.
En faisant la somme des deux inégalités, on obtient l'existence de $(x;y) \in A \times B$ tels que $0 < y - x < v - u = \epsilon$.
Réciproquement, supposons que $\forall \epsilon > 0, \exists (x;y) \in A \times B, y - x < \epsilon$. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in A, y \in B$ tels que $y - x < \epsilon$.
On a donc $\inf B \leqslant y < x + \epsilon \leqslant \sup A + \epsilon$. Autrement écrit et en utilisant le premier résultat démontré, pour tout $\epsilon > 0$, $\sup A \leqslant \inf B < \sup A + \epsilon$.
Ce qui permet de conclure que $\sup A = \inf B$ (si l'on n'est pas convaincu par la précédente propriété, on fait une démonstration par l'absurde).

Cor. 8.13 : Équation caractéristique : $z^2 + z - 2 = 0$ de discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc
$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda + \mu\,(-2)^n$.
Or $u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et
$u_1 = 3 = \lambda - 2\mu$
donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 - (-2)^n$$

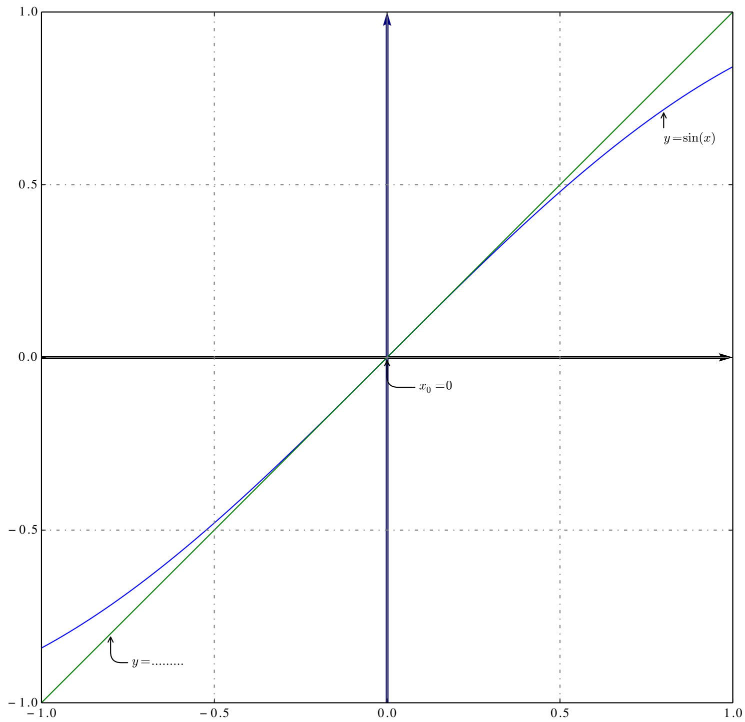
On a donc $u_{100} + u_{101} = 1 - (-2)^{100} + 1 - (-2)^{101} = 2 - (2^{100} - 2^{101}) = 2\,(1 + 2^{99}) = 2u_{99}$.
Ce résultat se généralise évidement puisqu'il s'agit en fait de la formule de récurrence donnée pour u !

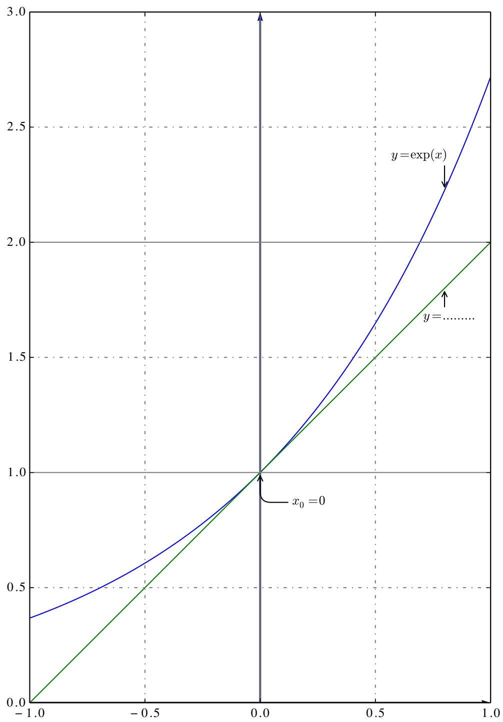
Maths - Chapitre 9

Développements limités

L'IDÉE fondamentale à l'origine des développements limités repose sur une généralisation de la notion de tangente : au voisinage d'un point x_0, la valeur $f(x_0+h)$ d'une fonction f dérivable peut être approximée par $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$, ce qui revient à approximer f par une fonction affine au voisinage de x_0.

Par exemple, au voisinage de 0 : $\sin h \approx$. ou encore $e^h \approx$. . . . .





Peut-on obtenir des « approximations de meilleure qualité » à l'aide de polynômes de degré supérieur ?

L'objectif de ce chapitre est d'une part de clarifier la notion d'approximation d'une suite par une autre suite ou d'une fonction par une autre fonction, d'autre part d'élaborer des outils permettant d'obtenir des ***approximations polynomiales des fonctions usuelles***.

I. Programme officiel

Analyse asymptotique

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction, à l'aide du symbole o, des croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n), n^\alpha$ et $e^{\gamma n}$.
Liens entre relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissance. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	Équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(u_n)$.
b) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent.	
c) Développements limités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a. Unicité, troncature d'un développement limité.	Adaptation aux cas où f est définie sur $I \backslash \{a\}$.
Forme normalisée d'un développement limité $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + o(h^n)\right)$ où $a_0 \neq 0$.	$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$, signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Intérêt de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I d'une application de classe $\mathcal{C}^n(I)$.	La formule sera démontrée dans le chapitre « Intégration ».
Développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan. tan à l'ordre 3.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
d) Utilisations des développements limités.	
Calcul d'équivalents et de limites. Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum. Détermination d'asymptotes.	

II. Équivalence, domination, négligeabilité

II.1. Notion de voisinage

Définition 9.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

II.2. Relations de comparaison entre suites

Définition 9.2 (Équivalence de suites)

On dit que la suite u est ***équivalente à*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 1.

Notation

Si la suite u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Définition 9.3 (Domination)

On dit que la suite u est ***dominée par*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ est borné : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, m \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant M$.

Notation

Si la suite u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O(v_n)$.

Définition 9.4 (Négligeabilité)

On dit que la suite u est ***négligeable devant*** la suite v ***au voisinage de*** $+\infty$ si ***à partir d'un certain rang*** $n_0 \in \mathbb{N}$

- la suite v ne s'annule plus à partir du rang n_0 ;
- le quotient $\dfrac{u}{v}$ tend vers 0.

Notation

Si la suite u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, on note $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}(v_n)$ ou plus simplement $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$.

II.3. Relations de comparaison entre fonctions

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

Définition 9.5 (Équivalence de fonctions)

On dit que la fonction f est ***équivalente à*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Notation

Si la fonction f est équivalente à la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Définition 9.6 (Domination)

On dit que la fonction f est ***dominée par*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si

- il existe un voisinage I de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- le quotient $\dfrac{f}{g}$ est borné sur I : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, m \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant M$.

Notation

Si la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{=} O(g(x))$.

Définition 9.7 (Négligeabilité)

On dit que la fonction f est ***négligeable devant*** la fonction g ***au voisinage de*** x_0 si
- il existe un voisinage de x_0 sur lequel g ne s'annule pas (sauf éventuellement en x_0) ;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

Notation

Si la fonction f est négligeable devant la fonction g au voisinage de x_0, on note $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ ou plus simplement $f(x) = \underset{x_0}{o}(g(x))$.

Ex. 9.1 Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de :
- $x \mapsto \sin(x)$;
- $x \mapsto \exp(x) - 1$;
- $x \mapsto \ln(1+x)$;
- $x \mapsto \cos(x) - 1$.

Cor. 9.1

II.4. Propriétés des équivalents

Important !

$\cos(x)$	est équivalent à	$1+x$	en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1+x} = 1$
-1	est équivalent à	-1	en 0... et partout ailleurs ! ***Mais***
$\cos(x) - 1$	***n'est pas équivalent à***	$\cancel{0}$	en 0 d'après l'exercice précédent.

Il ***n'est donc pas autorisé de faire une somme d'équivalents*** !
On préférera pour les calculs la notion de ***développement limité*** que l'on verra plus loin.
Cependant les propriétés opératoires suivantes peuvent être utilisées dans les cas simples :

Propriété 9.8

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ et $w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} z(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et w ne s'annulent pas ;
2) $v(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)$ et $z(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x)$;
3) $u(x)w(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)z(x)$;
4) $\dfrac{u(x)}{w(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{v(x)}{z(x)}$;
5) $\forall p \in \mathbb{Z}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$ et si $v > 0$ au voisinage de x_0, $\forall p \in \mathbb{R}, u^p(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v^p(x)$.

Démonstration

Ex. 9.2

1) Montrer que $\ln(e+x)$ et $\cos(x)$ sont équivalents pour $x \to 0$.
2) Trouver un équivalent simple de $\ln(e+x) - 1$ pour $x \to 0$.

Cor. 9.2

Propriété 9.9 (Propriétés conservées par équivalence)

Si $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ alors :

1) il existe un voisinage de x_0 sur lequel u et v sont de même signe ;
2) $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)$ existe si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$ existe et en cas d'existence, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = \lim\limits_{x\to x_0} u(x)$.

Démonstration

II.5. Propriétés des « petit o »

Propriété 9.10 (Équivalent et « petit o »)

$u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ si et seulement si $u(x) = v(x) + \underset{x\to x_0}{o}(v(x))$.

Démonstration

Propriété 9.11 (Traduction des croissances comparées)

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

- $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$;
- $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}\left(e^{\gamma x}\right)$;
- si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ et $x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha)$.

Ex. 9.3 Montrer que pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\beta \in \mathbb{R}_-^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}_-^*$,

1) $\ln^\alpha(x) = \underset{x\to 0^+}{o}\left(x^\beta\right)$;
2) $e^{\gamma x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$.

Cor. 9.3

Remarque

On retiendra notamment que la propriété 9.10 permet d'utiliser les « petit o » pour traiter les questions concernant les équivalents. ***Cette propriété doit absolument être connue.***
De plus, la propriété $\alpha > \beta \Rightarrow x^\alpha = \underset{x\to 0}{o}\left(x^\beta\right)$ est elle aussi d'une importante primordiale pour la suite du chapitre. Notons $f(x) \underset{0}{\ll} g(x)$ le fait que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(g(x))$: on a alors les négligeabilités suivantes

Au voisinage de 0 : $\quad \dots \underset{0}{\gg} \frac{1}{x^2} \underset{0}{\gg} \frac{1}{x} \underset{0}{\gg} 1 \underset{0}{\gg} x \underset{0}{\gg} x^2 \underset{0}{\gg} x^3 \underset{0}{\gg} \dots$

Au voisinage de $+\infty$: $\quad \dots \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{\infty}{\ll} 1 \underset{\infty}{\ll} x \underset{\infty}{\ll} x^2 \underset{\infty}{\ll} x^3 \underset{\infty}{\ll} \dots$

L'idée générale des développements limités est fondée sur cette propriété : ***nous allons approximer des fonctions au voisinage de*** 0 par des ***polynômes de degré*** n en ***négligeant tous les termes de degré supérieur à*** n.

III. Développements limités

III.1. Définitions

Définition 9.12

On dit que f admet un ***développement limité à l'ordre*** n ***au voisinage de*** x_0 et on note f ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si

$$\exists (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$$

Ou encore, au voisinage de 0, en utilisant $h = x - x_0$ et le signe $\sum$ à la place des pointillés :

$$f(x_0 + h) = \dots\dots\dots + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

La somme $\dots\dots\dots$ est appelée ***partie principale*** du DL.

$\underset{x\to x_0}{o}\left((x - x_0)^n\right)$ ou $\underset{h\to 0}{o}(h^n)$ est appelé ***reste du*** DL.

Remarque

Comme le changement de variable $h = x - x_0$ est toujours possible, on considèrera souvent par la suite des développements limités en 0, ou on s'y ramènera par changement de variable. En particulier en l'absence d'indications, les « petit o » sont supposés être donnés au voisinage de 0.

III.2. Premier exemple

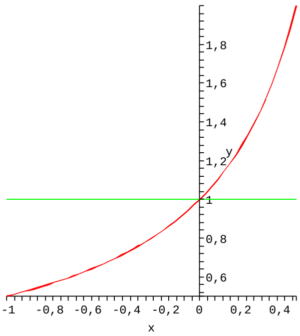
Développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$:

$$\text{pour tout } x \in]-1;1[\text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} x^k \begin{array}{l} = \quad \ldots\ldots\ldots \\ = \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

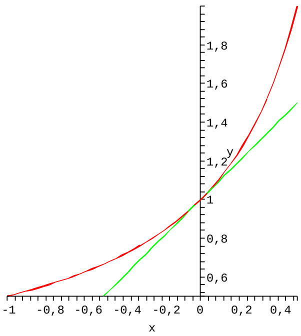
. . . .

III.3. Interprétation géométrique

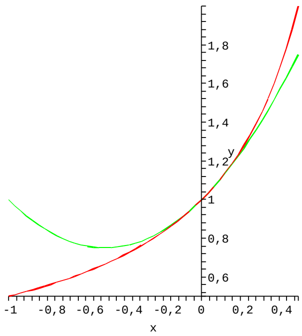
Plus l'ordre du DL est grand, plus la représentation graphique de sa partie principale se rapproche au voisinage de x_0 de $\mathcal{C}_f$.



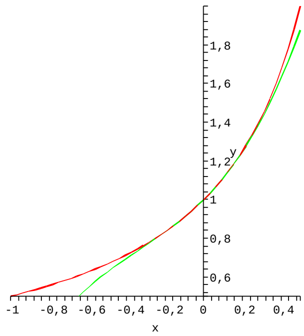
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto 1$



et $x \mapsto 1+x$



et $x \mapsto 1+x+x^2$



et $x \mapsto 1+x+x^2+x^3$

III.4. DL, continuité, dérivabilité

Proposition 9.13

Si f admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ alors f est $\mathcal{C}^0(x_0)$ ou prolongeable par continuité en x_0.
Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors f (ou son prolongement) est dérivable mais sa dérivée n'est pas forcément continue.
Ceci ne se généralise pas au cas $n \geq 2$, c'est-à-dire qu'il est possible qu'une fonction admette un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ sans pour autant être deux fois dérivable.

Démonstration

III.5. Unicité

Proposition 9.14

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ alors il est unique.

Démonstration

Important !

En revanche, étant donné un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, il existe une infinité de fonctions possédant ce développement limité :

III.6. Troncature

Proposition 9.15

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$, alors $\forall k \in [\![0;n]\!]$, f admet un $\mathrm{DL}_k(x_0)$ dont la partie principale est la troncature de celle du $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

Démonstration

III.7. Forme normalisée d'un développement limité

Définition 9.16 (Forme normalisée d'un développement limité)

Étant donnés un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, on dit que ce développement limité est donné ***sous forme normalisée*** lorsqu'il est écrit sous la forme

$$f(x_0+h) = h^p\left(a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)\right)$$

avec $a_0 \neq 0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$.

Propriété 9.17 (Équivalent d'une fonction)

Étant donnés un réel $x_0 \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un voisinage I de x_0 sauf éventuellement en x_0 et possédant sur I un développement limité, le premier terme du développement limité normalisé de f au voisinage de x_0 est un équivalent de $f(x_0+h)$ au voisinage de $h \to 0$.

Démonstration

Ex. 9.4 Donner un équivalent de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - 1 - x - x^2$ au voisinage de 0.

III.8. Opérations sur les DL

Propriété 9.18

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de x_0 (sauf éventuellement en x_0) et possédant pour $n \in \mathbb{N}$ un développement limité à l'ordre n en x_0 de parties principales P et Q, alors :

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha f + \beta g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 de partie principale $\alpha P + \beta Q$;
- $f \times g$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0 dont partie principale est la troncature à l'ordre n de PQ ;
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ possède un développement limité à l'ordre n en x_0.

Démonstration

Théorème 9.19

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Corollaire 9.20

Si f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ ***et si*** f' ***admet un*** $\mathrm{DL}_n(0)$ alors celui de f' est obtenu en dérivant celui de f.

Important !

La condition « f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ » est primordiale. Sans elle, on ne peut pas dériver.

Ex. 9.5 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ et $x \mapsto e^x$.

III.9. Formule de Taylor-Young

Définition 9.21 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$)

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle réel I est ***de classe*** $\mathcal{C}^n$ ***sur*** I, si elle est n fois dérivable en tout point de I et si sa dérivée $n^{\text{ème}}$ est continue.

Théorème 9.22 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

Démonstration

La démonstration sera effectuée dans le chapitre sur l'intégration.

Méthode : Utilisation de la formule de Taylor-Young

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors f admet pour $\mathrm{DL}_n(x_0)$ celui donné par la formule de Taylor-Young.
Cependant, il y a souvent plus simple pour obtenir ce développement limité.
La formule de Taylor-Young est de ce fait davantage un outil théorique qu'un outil pratique.

Important !

On rappelle (voir proposition 9.13) que f peut admettre un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ sans pour autant être $\mathcal{C}^n(x_0)$. Mais si $f \in \mathcal{C}^n(I)$, elle possède en tout point de I un unique développement limité à l'ordre n donné par la formule de Taylor-Young.

Ex. 9.6 Soit n un entier positif. Obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto e^x$, le $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$, enfin obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

Remarques

Le développement limité de $(1+x)^\alpha$ incite à généraliser la définition des coefficients binomiaux :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\begin{pmatrix} \alpha \\ p \end{pmatrix} =$ ....

On a alors $(1+x)^\alpha =$ ....

Ex. 9.7 $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto \tan x$.

Cor. 9.7

III.10. Résumé

Voici une liste des DL(0) à connaître et de la façon dont on les obtient :

Fonction	DL(0)	Démonstration
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$	Somme des termes d'une suite géométrique.
$x \mapsto \frac{1}{1+x}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$
$x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto e^x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$	Formule de Taylor-Young.
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie paire de e^x.
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, partie impaire de e^x.
$x \mapsto \cos x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{R}e\left(e^{ix}\right)$.
$x \mapsto \sin x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Formule de Taylor-Young, $\mathcal{I}m\left(e^{ix}\right)$.
$x \mapsto \tan x$	$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$	Quotient de sin par cos, $\tan' = 1 + \tan^2$.
$x \mapsto \ln(1+x)$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
$x \mapsto \operatorname{Arctan} x$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$	Intégration de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Les développements limités en 0 de Arccos et Arcsin s'obtiennent par primitivation.
Ils ne sont pas à retenir. On les retrouve au besoin pour de petites valeurs de n.

IV. Utilisations

IV.1. Limite, continuité, dérivabilité, tangente

Les propriétés 9.9 et 9.10 permettent de démontrer immédiatement les résultats suivants :

Théorème 9.23 (Utilisation des développements limités)

Soit f une fonction définie sur un voisinage I du réel x_0, sauf éventuellement en x_0 lui-même.

- Si f possède un développement limité $f(x_0 + h) = a_0 + \underset{h \to 0}{o}(1)$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$.
  De plus, soit f est définie et continue en x_0, soit f est prolongeable par continuité par a_0 en x_0.

- Si f possède un développement limité normalisé $f(x_0+h) = a_0 h^p + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$ alors

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_0(x-x_0)^p$$

- Si f possède un développement limité $f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + a_p h^p + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$ (avec $a_p \neq 0$) alors
  - ⋆ f est continue ou prolongeable par continuité par a_0 en x_0 ;
  - ⋆ f (ou son prolongement) est dérivable et $f'(x_0) = a_1$;
  - ⋆ l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0 est $y = a_0 + a_1(x-x_0)$;
  - ⋆ on peut connaître les positions relatives de la courbe et de sa tangente en étudiant le signe de $a_p h^p$ au voisinage de $h \to 0$.

Ex. 9.8 (Cor.) Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{Arcsin}(x)}$ pour $x \neq 0$.

1) Montrer que f peut être prolongée par continuité en $x=0$.
2) Tracer la représentation graphique de f sur son ensemble de définition.
   Préciser notamment la position de la courbe par rapport à sa tangente en 0.

Ex. 9.9 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $u_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

1) Déterminer si u converge et si oui, donner sa limite.
2) Dans le cas où u converge vers $l \neq 0$, donner un équivalent (simple) de $u_n - l$.

Ex. 9.10

1) Prouver pour $n \in \mathbb{N}^*$ que l'équation $x^n + x^{n-1} + ... + x = 1$ possède une unique racine dans $[0;1]$.
2) Montrer que la suite u est strictement monotone.
3) Montrer que la suite u est convergente vers une limite l à déterminer.
4) Trouver un équivalent de $u_n - l$.

Ex. 9.11 Étude de la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

Montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers une limite strictement positive que l'on déterminera.

Montrer que si w converge vers $l \in \mathbb{R}$ et ne s'annule pas, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k$ existe et vaut l.

En déduire un équivalent de la suite u.

IV.2. Asymptotes et développements asymptotiques

Durant tout le chapitre, nous avons considéré des développements limités, c'est-à-dire des développements de la forme $f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$. On peut généraliser cette notion en admettant tous les développements de la forme :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=-p}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

De tels développements sont appelés ***développements limités généralisés*** ou encore ***développements asymptotiques***.

Ex. 9.12 Donner les 4 premiers termes du développement asymptotique de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x)}$ en 0.

Cor. 9.12

Méthode : Détermination d'asymptotes obliques

On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la représentation graphique d'une fonction f en $\pm\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.
Les développements ***asymptotiques*** peuvent être utilisés pour l'obtention d'***asymptotes obliques*** à la représentation graphique d'une fonction f en posant pour $x \to \pm\infty$, $h = \frac{1}{x} \to 0$ puis en développant $f\left(\frac{1}{h}\right)$ au voisinage de 0 :
si $f\left(\frac{1}{h}\right) = \dfrac{a}{h} + b + \underset{h\to 0}{o}(1)$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la représentation graphique de f.

Ex. 9.13 Effectuer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ au voisinage de $\pm\infty$ et en déduire la position de C_f relativement à ses asymptotes.

Cor. 9.13

Ex. 9.14 Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \displaystyle\int_0^x \mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t$.
Étudier F puis tracer sa représentation graphique.
On précisera notamment : ses ensembles de définition et de dérivabilité, sa parité, son sens de variations, un équivalent en 0, ses éventuelles asymptotes...

Maths - Chapitre 10

Systèmes linéaires

I. Programme officiel

Systèmes linéaires et calcul matriciel

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Systèmes linéaires a) Généralités sur les systèmes linéaires	
Équation linéaire à p inconnues. Système linéaire de n équations à p inconnues.	Interprétations géométriques, représentations d'une droite ou d'un plan.
Système homogène associé à un système linéaire.	
Matrice A d'un système homogène. Matrice augmentée $(A\|B)$ d'un système avec second membre.	On introduit les matrices comme tableaux rectangulaires d'éléments de $\mathbb{K}$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, d'un systèmes.	On emploiera les notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j, \lambda \neq 0$.
Deux systèmes sont dits équivalents si on passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	
Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.	
Deux matrices sont dites équivalentes par ligne si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.	Notations $A \underset{L}{\sim} A'$.
b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss	
Une matrice est dite échelonnée par ligne si elle vérifie les deux propriétés suivantes : • si une ligne est nulle, toutes les suivantes sont nulles ; • à partir de la seconde ligne, pour toute ligne non nulle, le premier coefficient non nul en partant de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente. On appelle pivot le premier coefficient non nul d'une ligne non nulle.	

Une matrice échelonnée en ligne est dite échelonnée ***réduite*** si elle est nulle ou si ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.	
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.	La démonstration de l'unicité n'est pas exigible.
c) Ensemble des solutions d'un système linéaire	
Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres. Système incompatible. Système compatible. Rang d'un système linéaire. Le nombre de paramètres est égal à la différence entre le nombre d'inconnues et le rang. Expression des solutions d'un système.	

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n et p sont deux entiers naturels non nuls.
On appelle ***scalaire*** tout élément de $\mathbb{K}$.

II. Introduction

Ex. 10.1 Résoudre les systèmes suivants :

Inconnue $(x;y) \in \mathbb{R}^2$
$$S_1 : \begin{cases} 6x & +2y = & 1 \\ x & -2y = & 3 \end{cases}$$

Inconnue $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$
$$S_2 : \begin{cases} x+y+ & z & =-5 \\ x-y+ & 2z & =0 \end{cases}$$

Inconnue $(x;y) \in \mathbb{C}^2$
$$S_3 : \begin{cases} (1+i)x & + & (2-i)y & = & 3-2i \\ (-1+i)x & + & (1+2i)y & = & 2+3i \end{cases}$$

II.1. Formules de Cramer en dimension 2

Proposition 10.1

Soient $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{K}$ vérifiant $|a|^2 + |a'|^2 \neq 0$ et $|b|^2 + |b'|^2 \neq 0$. Le système d'inconnue $(x;y) \in \mathbb{K}^2$

$$S : \begin{cases} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{cases}$$

- possède, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, un unique couple solution donné par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

- possède une infinité de solutions si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$;
- ne possède aucune solution si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \neq \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

Démonstration

Définition 10.2

Le nombre (réel ou complexe) $ab'-a'b$ est appelé ***déterminant du système*** et noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

II.2. Interprétation géométrique dans le plan

Dans le plan rapporté à un repère, chaque équation du système correspond à une droite. Résoudre un système de deux équations à deux inconnues, c'est donc chercher les points d'intersection de deux droites.
Plus précisément :

- Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, les deux droites sont sécantes et l'unique couple solution correspond à leur point d'intersection $M\left(\frac{cb'-c'b}{ab'-a'b}; \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)$.
- Si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$, les deux droites sont confondues et les solutions sont les coordonnées des points de cette droite : elles vérifient l'une des deux équations du système.
  Le paramétrage de ces points obtenu dans la précédente démonstration s'écrit pour $k \in \mathbb{K}$
  $\left(\dfrac{c'-b'k}{a'}; k\right) = \left(\dfrac{c'}{a'}; 0\right) + k\left(\dfrac{-b'}{a'}; 1\right)$.
  Donc cette droite passe par le point $N\left(\dfrac{c'}{a'}; 0\right)$ et est dirigée par $\vec{u}\,(-b'; a')$.
- Enfin, si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 \neq \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$, les deux droites sont strictement parallèles et n'ont pas d'intersection.

Ex. 10.2 Résoudre suivant la valeur du paramètre $u \in \mathbb{R}$ le système

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccc} (2u-1)x & + & (u+1)y & = & 2u+2 \\ (u-1)x & + & (u+1)y & = & u+1 \end{array} \right.$$

Cor. 10.2

II.3. Définitions

Définition 10.3 (Équations et systèmes linéaires)

On appelle ***équation linéaire à*** p ***inconnues*** toute équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_px_p = b$$

où $a_1, a_2, ..., a_p, b$ sont des ***constantes scalaires*** (c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$ donnés) et $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les inconnues.

Lorsqu'on connaît des valeurs de $x_1, x_2, ..., x_p$ satisfaisant l'équation, on dit que ces valeurs $v_1, v_2, ..., v_p \in \mathbb{K}$ sont ***solutions de l'équation*** ou encore que $(v_1, v_2, ..., v_p) \in \mathbb{K}^p$ est ***un*** p***-uplet solution de l'équation***.

On appelle système linéaire de n ***équations à*** p ***inconnues*** tout système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_p = b_n \end{array} \right.$$

où $(a_{i,j})_{i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;p]\!]}$ est une ***matrice*** (c'est-à-dire un tableau) ***de constantes scalaires à*** n ***lignes et*** p ***colonnes***, $(b_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est un ***vecteur-colonne de*** $\mathbb{K}^n$ et $x_1, x_2, ..., x_p$ sont les inconnues.

À nouveau, des valeurs $v_1, v_2, ..., v_p \in \mathbb{K}$ des inconnues satisfaisant le système - c'est-à-dire satisfaisant ***chacune des équations du système*** - sont appelées ***solutions du système***.

On dit aussi que $(v_1, v_2, ..., v_p) \in \mathbb{K}^p$ est ***un*** p***-uplet solution du système***.

Notation

L'ensemble des matrices de coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

L'ensemble des vecteurs-colonne est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^n$.

Définition 10.4 (Matrice et matrice augmentée d'un système)

Avec les notations de la définition 10.3, la matrice $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1;n]\!], j \in [\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée ***matrice du système linéaire***.

La matrice de $\mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ formée des p colonnes de A auxquelles on juxtapose le vecteur-colonne B est appelée ***matrice augmentée du système***.

Notation

La matrice augmentée du système est notée $(A|B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$.

On dit qu'on a ***bordé la matrice*** A ***par le vecteur colonne*** B.

Ex. 10.3 Donner les matrices et matrices augmentées des systèmes vus à l'exercice 10.1 .

Cor. 10.3

Définition 10.5 (Système homogène et second membre)

Étant donné un système linéaire $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$ à n équations et p inconnues, on appelle ***second membre*** le vecteur-colonne $B = (b_1; b_2; \ldots; b_n) \in \mathbb{K}^n$ et ***système homogène associé*** le système obtenu en annulant le second membre, c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Remarque

Un système homogène possède au moins une solution, le vecteur nul de $\mathbb{K}^p$.

II.4. Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Notation

Étant donné un système de n équations à p inconnues, pour $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$, on note

- $L_i \leftrightarrow L_j$ l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j ;
- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \neq 0, \mu \in \mathbb{K}$, l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j$.

Définition 10.6 (Opérations élémentaires)

Les opérations correspondant aux deux notations données ci-dessus sont appelées ***opérations élémentaires sur les lignes*** d'un système linéaire.

Remarque

On ***retiendra*** les remarques suivantes :

- dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, ***il est absolument nécessaire que*** $\lambda \neq 0$;
- deux cas fréquents de l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ sont :
  - ⋆ $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ où $\lambda = 1 \neq 0$;
  - ⋆ $L_i \leftarrow \lambda L_i$ où $\lambda \neq 0, \mu = 0$.
- à priori, ***on ne peut effectuer qu'une seule opération élémentaire à la fois*** !

Définition 10.7 (Systèmes équivalents)

Deux systèmes linéaires sont dits ***équivalents*** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une ***famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes***.

III. Méthode du pivot de Gauss

III.1. Ensemble des solutions de deux systèmes équivalents

Théorème 10.8

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Démonstration

La démonstration se fait par récurrence et repose essentiellement sur la remarque suivante.

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système sont des bijections de l'ensemble des systèmes de n équations à p inconnues vers lui-même.

- la bijection réciproque de $L_i \leftrightarrow L_j$ est $L_i \leftrightarrow L_j$;
- la bijection réciproque de $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ est $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i - \frac{\mu}{\lambda} L_j$ ***à condition que*** $\lambda \neq 0$!

  Ceci justifie que dans l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$, on n'autorise que les valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

III.2. Présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire

Définition 10.9 (Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice)

On définit les ***opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice*** de la même manière que pour les systèmes. Autrement dit, pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$,

- $L_i \leftrightarrow L_j$ est l'opération qui consiste à ***échanger les lignes d'indices*** i ***et*** j de A ;

- $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*, \mu \in \mathbb{K}$ est l'opération qui consiste à ***remplacer la ligne d'indice*** i ***de*** A ***par la combinaison linéaire*** $\lambda L_i + \mu L_j, \lambda \neq 0$.

Définition 10.10 (Matrices équivalentes par lignes)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par lignes*** si elles se déduisent l'une de l'autre par une famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Notation

Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par ligne, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Méthode

Comme nous le verrons, la méthode du Pivot de Gauss consiste à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes d'un système pour obtenir de proche en proche (c'est-à-dire par ***récurrence*** ou de façon ***récursive***) l'ensemble des solutions du système.
Or ***effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système revient à effectuer les mêmes opérations sur la matrice augmentée du système***.
Par soucis d'efficacité, on présentera donc souvent la résolution d'un système sous ***forme matricielle*** en écrivant ***une suite de matrices augmentées équivalentes par lignes***.

Ex. 10.4 Résoudre le système d'inconnues $(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4$ suivant en présentant la résolution sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 5 \\ x & + & 4y & + & 9z & + & 16t & = & 1 \\ x & + & 8y & + & 27z & + & 64t & = & -1 \\ x & + & 16y & + & 81z & + & 256t & = & -5 \end{array}\right.$$

Cor. 10.4

III.3. Matrices échelonnées

Définition 10.11 (Matrice échelonnée par lignes)

Une matrice est dite ***échelonnée par lignes*** si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi ;
- à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé (***strictement***) à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

Définition 10.12 (Pivot d'une matrice échelonnée par lignes)

On appelle ***pivot*** d'une matrice échelonnée par lignes le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Schématiquement, une matrice échelonnée par lignes possède des coefficients nuls « sous un escalier ». Voici un exemple de matrice échelonnée par lignes :

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ désignent des coefficients quelconques

et les $\oplus$ les pivots (***non nuls***) de chaque ligne non nulle.

(source : http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrice_échelonnée)

Proposition 10.13 (Algorithme d'échelonnement)

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

Démonstration

On le démontre par récurrence sur le nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de ligne(s).

Initialisation *:*

Une matrice possédant une seule ligne est évidemment échelonnée par lignes, donc équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

Hérédité *:*

Supposons que toute matrice possédant $n \in \mathbb{N}^*$ ligne(s) soit équivalente à une matrice échelonnée par lignes.

Soit M une matrice à $n+1$ lignes.

- *Ou bien M est la matrice nulle auquel cas elle est échelonnée par lignes.*
- *Ou bien il existe un coefficient de M non nul.*

  L'ensemble $C = \{j \in [\![1;p]\!], \exists i \in [\![1;n+1]\!], m_{i,j} \neq 0\} \subset \mathbb{N}^*$ est alors non vide, donc $j_0 = \min C$ existe et il existe $i_0 \in [\![1;n+1]\!]$ tel que $m_{i_0,j_0} \neq 0$.

  En utilisant l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$, on a $M \underset{L}{\sim} M'$ où le premier coefficient non nul de la première ligne de M' est m_{1,j_0} (car $j_0 = \min C$).

  En utilisant les opérations élémentaires $L_k \leftarrow L_k - \dfrac{m_{k,j_0}}{m_{1,j_0}} L_1$ pour $k \in [\![2;n+1]\!]$, on a $M \underset{L}{\sim} M' \underset{L}{\sim} M''$ où les $j_0 - 1$ premières colonnes de M'' sont nulles, et où le seul coefficient non nul de la colonne d'indice j_0 est m_{1,j_0}. On distingue à nouveau deux cas :

  - ⋆ *Si $j_0 = p$ alors M'' est échelonnée par lignes et l'hérédité démontrée.*
  - ⋆ *Sinon, notons N la sous-matrice de M'' constituée des lignes dont l'indice est dans $[\![2;n+1]\!]$. N est une matrice à n lignes, elle est donc équivalente par lignes à une matrice échelonnée (par hypothèse de récurrence).*

    Autrement dit, il existe une famille finie d'opérations élémentaires sur les lignes de N conduisant à une matrice échelonnée par lignes. En opérant la même famille d'opérations élémentaires sur les lignes correspondantes de M'' (d'indices de ligne supérieur de 1 à ceux des opérations élémentaires effectuées sur N), on obtient une

matrice M''' échelonnée par lignes et telle que $M \underset{L}{\sim} M'''$ puisque
d'une part ces opérations laissent inchangée la première ligne de M'',
d'autre part les j_0 premières colonnes de M'' sont nulles à l'exception du pivot m_{1,j_0},
*et qu'enfin le premier coefficient non nul de la deuxième ligne est situé, **s'il existe**,*
à droite du premier coefficient non nul de la première ligne.

***Conclusion** : la propriété est initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

III.4. Matrices échelonnées réduites

Définition 10.14 (Matrice échelonnée réduite par lignes)

Une matrice est dite ***échelonnée réduite (par lignes)***
si elle est nulle
ou
si elle est échelonnée par lignes et que tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite : les $*$ désignent des coefficients quelconques.
(source : http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Matrice_échelonnée)

Proposition 10.15 (Algorithme du pivot de Gauss)

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Démonstration

***Existence** : on la démontre par récurrence. On suppose la propriété vérifiée pour les matrices de n lignes.*

On part de la matrice échelonnée $Q = M'''$ obtenue dans la démonstration de la proposition 10.13 et on divise chaque ligne non nulle par son pivot (non nul) pour obtenir une matrice Q'.

Ou bien la deuxième ligne de Q' est nulle ou n'existe pas auquel cas Q' est échelonnée réduite puisque la matrice possède au plus un pivot égal à 1 sur la première ligne.

Ou bien la deuxième ligne est non nulle . La sous-matrice composée des n dernières lignes de Q' vérifie la propriété de récurrence ce qui permet d'obtenir une matrice Q''. Pour chaque pivot de Q'' des lignes d'indice supérieur à 2, on fait une opération élémentaire du type $L_1 \leftarrow L_1 - aL_i$ où a est choisi de sorte à annuler le coefficient de la première ligne de même colonne que le pivot de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

La matrice obtenue est échelonnée réduite.

Unicité : démonstration explicitement hors-programme.

IV. Résolution pratique des systèmes linéaires

IV.1. Principe général

Soit S un système de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues, de matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de matrice augmentée $(A|B) \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$.
On applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée de S ce qui conduit à $(A|B) \underset{L}{\sim} (A'|B')$ où $(A'|B') \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K})$ est, d'après le théorème 10.8 et la proposition 10.15 :

- l'unique matrice échelonnée réduite équivalente par lignes à $(A|B)$;
- la matrice augmentée d'un système S' équivalent à S et possédant donc le même ensemble de solutions.

Résoudre un système quelconque S revient donc :

1) ***à effectuer l'algorithme du pivot de Gauss sur sa matrice augmentée ;***
2) ***à savoir résoudre les systèmes dont la matrice augmentée est échelonnée réduite par lignes.***

Dans tout ce qui suit, S, S', $(A|B)$ et $(A'|B')$ désignent les objets que nous venons de définir.

IV.2. Inconnues et paramètres

Définition 10.16 (Inconnues principales, inconnues secondaires)

On appelle ***inconnue principale*** d'un système S toute inconnue possédant un pivot sur sa colonne dans la matrice A' échelonnée réduite obtenue après application du pivot de Gauss.
Dans le cas contraire, on dit que l'inconnue est une ***inconnue secondaire*** ou un ***paramètre du système*** S.

IV.3. Systèmes compatibles, systèmes incompatibles

Définition 10.17 (Systèmes compatibles, systèmes incompatibles)

On dit qu'un système est ***compatible*** si la matrice $(A'|B')$ échelonnée réduite obtenue après application du pivot de Gauss ne possède pas de pivot dans sa dernière colonne.
Sinon, on dit que le système est ***incompatible***.

Proposition 10.18

Un système incompatible ne possède aucune solution.

Démonstration

Supposons que S soit incompatible : il possède le même ensemble de solutions que S' de matrice augmentée (échelonnée réduite) $(A'|B')$. Or cette matrice possède un pivot dans la dernière *colonne donc il existe une ligne $i \in [\![1;n]\!]$ du système s'écrivant $0 = b'_i \neq 0$ qui n'a aucune solution quelles que soient les valeurs des inconnues.*

IV.4. Résolution générale d'un système compatible

Définition 10.19 (Rang d'un système)

On appelle rang d'un système le nombre de pivots de la matrice échelonnée réduite A' associée à sa matrice A.

Notation

On note $\operatorname{rg} S$ le rang d'un système S.

Remarque

Les inconnues principales étant celles possédant un pivot sur la colonne qui leur est associée dans la réduite échelonnée A' du système, il y a autant d'inconnues principales que de pivots : le nombre d'inconnues principales vaut $\operatorname{rg} S$.
De ce fait, $p - \operatorname{rg} S$ est le nombre d'inconnues secondaires.

Corollaire 10.20

Le rang d'un système de $n \in \mathbb{N}^*$ équations à $p \in \mathbb{N}^*$ est inférieur ou égal à $\min(n;p)$.

Théorème 10.21

Un système compatible possède au moins une solution.

Démonstration

Supposons que S soit compatible : il possède le même ensemble de solutions que S' de matrice augmentée (échelonnée réduite) $(A'|B')$ où aucun pivot ne se trouve dans le second membre.
La matrice $(A'|B')$ se termine éventuellement par des lignes nulles que l'on peut supprimer puisqu'elles correspondent dans le système S' à des lignes $0 = 0$ qui sont vérifiées pour toutes valeurs des inconnues. On se ramène donc à un système de $N \in \mathbb{N}$ équations.
Si $N = 0$, tout couple est solution et l'ensemble des solutions est donc $\mathbb{K}^p$.
Sinon, en réordonnant les inconnues principales et secondaires (ce qui revient à échanger des colonnes de la matrice augmentée $(A'|B')$, on obtient donc un système S'' de matrice augmentée

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & b'_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & b'_{N-1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & b'_N
\end{pmatrix}$$

où $N = \operatorname{rg} S \leqslant p$ par construction et où les $*$ désignent les coefficients affectant les paramètres du système.

Le système a donc au moins une solution $\left(b'_1; b'_2; ...; b'_N; \underbrace{0; 0; ...; 0}_{p-N \text{ zéros}}\right)$.

IV.5. Exercices

Méthode : Résolution générale d'un système de n équations à p inconnues

On part d'un système S de n équations à p inconnues.

1) On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice augmentée $(A|B)$ de S ce qui permet d'obtenir l'unique réduite échelonnée par lignes $(A'|B') \underset{L}{\sim} (A|B)$.
2) S'il y a un pivot sur la dernière colonne, le système est incompatible et n'a aucune solution.
3) Sinon, si toutes les lignes sont nulles, l'ensemble des solutions du système est $\mathbb{K}^p$.
4) Sinon, on supprime les lignes nulles et on échange inconnues principales et inconnues secondaires de sorte à obtenir une matrice échelonnée réduite de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & b'_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & b'_N \end{pmatrix}$$

   où $N = \operatorname{rg} S \leqslant p$ par construction et où les $*$ désignent les coefficients affectant les paramètres du système.
5) Les inconnues secondaires peuvent être choisies quelconques : s'il y en a, le système a une infinité de solutions.
   Les inconnues principales sont quant à elles déterminées de façon unique en fonction des valeurs données aux inconnues secondaires.

Ex. 10.5 Donner la nature et si possible une équation paramétrique de l'ensemble des solutions de :

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} 3x - y + 2z & = & 5 \\ -8x + 3y + z & = & 1 \end{array} \right. \qquad S_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} x + y - z & = & 1 \\ 2x + 2y - z & = & 3 \end{array} \right. \qquad S_3 : \left\{ \begin{array}{lcl} x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x & = & \frac{-1}{5} \end{array} \right.$$

Ex. 10.6 Résoudre pour $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ et donner une interprétation géométrique du résultat :

$$S_1 : \begin{cases} x+y+z &= 5 \\ x+2y+3z &= -1 \\ x+4y+9z &= 2 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x+2y+3z &= a \\ y+2z &= b \\ z &= c \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x+y+z &= 5 \\ x-2y+4z &= 6 \\ x+7y-5z &= 2 \end{cases} \qquad S_4 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2+y^2+z^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y &= \frac{-1}{5} \\ x^2+y^2+z^2+\frac{2\sqrt{3}(x-y-z)}{3} &= 1 \end{cases}$$

Ex. 10.7 Résoudre le système

$$S : \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ 2x + 4y + 8z + 8t = 4 \\ 3x + 6y + 11z + 14t = 3 \\ 4x + 8y + 18z + 14t = 8 \end{cases}$$

sachant que sa réduite échelonnée par lignes est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.8 Résoudre le système

$$S : \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ 3x + 2y + t = 2 \\ x + 3y + 2z + t = 3 \\ 2x + 3y + 4t = 3 \end{cases}$$

sachant que sa réduite échelonnée par lignes est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 10.9 Soient a, b, c les racines de $t^3-t+1=0$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

Ex. 10.10

1) Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \begin{cases} ax + y + z = \alpha \\ x + ay + z = \beta \\ x + y + az = \gamma \end{cases}$$

2) Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 10.11 Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!], a_i \in \mathbb{K}^*$ et $s \in \mathbb{K}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ suivant

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 + \cdots + x_n = s \end{cases}$$

Ex. 10.12 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $x_j = ax_{j-1}+b$ et $x_1 = ax_n+b$.

Maths - Chapitre 11

Calcul matriciel

I. Programme officiel

Systèmes linéaires et calcul matriciel

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Calcul matriciel	
a) Ensembles de matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Opérations sur les matrices : combinaisons linéaires, multiplication matricielle.	Si X est une matrice colonne, AX est une comb. lin. des colonnes de A. La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B et la i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B.
Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire.	
Propriétés du produit matriciel.	Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul.
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Notation I_n pour la matrice identité.
Puissances d'une matrice carrée.	Le produit matriciel est associatif mais n'est pas commutatif.
Formule du binôme.	
Matrices diagonales, triangulaires.	Stabilités par les opérations.
b) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel	
Matrices d'opération élémentaire : transvection, transposition, dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires.	Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes à l'aide des matrices élémentaires.
Traduction matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss : pour toute matrice rectangulaire à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe une matrice E produit de matrices d'opérations élémentaires et une unique matrice R échelonnée réduite telles que $A = ER$.	
Brève extension des résultats précédents aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.	Notation $A \underset{C}{\sim} A'$.
c) Matrices carrées inversibles	

Matrices carrées inversibles. Inverse d'une matrice.	On introduit la terminologie « groupe linéaire » et la notation $GL_n(\mathbb{K})$ pour désigner l'ensemble des matrices inverses mais tout développement sur la notion de groupe est hors-programme.
Inverse d'un produit de matrices inversibles. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, équivalence des propriétés suivantes : 1) A est inversible ; 2) $A \underset{L}{\sim} I_n$; 3) le système AX n'admet que la solution nulle ; 4) pour tout B, le système $AX = B$ admet une unique solution ; 5) pour tout B, le système $AX = B$ admet au moins une solution. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire.	
d) Transposition	
Transposée d'une matrice. Transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse.	Notations ${}^tA$, A^T. Matrices symétriques, antisymétriques.

II. Ensembles de matrices

II.1. Introduction et rappels

Le chapitre 10 a introduit la notion de ***matrice*** comme un outil de calcul et de présentation pour la résolution des systèmes linéaires. Les matrices y étaient utilisées comme une forme abrégée de la mise en œuvre de l'algorithme du pivot de Gauss, notamment au travers des opérations élémentaires autorisées sur les lignes d'un système, de sa matrice associée ou de sa matrice augmentée associée (voir les définitions 10.3 et 10.4 et les notations correspondantes).
Le présent chapitre vise à approfondir la notion de matrice :

- non seulement pour introduire des ***opérations sur les matrices*** permettant une écriture symbolique très compacte et efficace des opérations déjà introduites pour les systèmes linéaires ;
- mais encore pour étudier les ***propriétés des opérations matricielles*** qui ***se distinguent en bien des points des propriétés habituelles des opérations sur les***

scalaires.

Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps, pour nous $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, et n,p,q des entiers naturels non nuls.

Rappelons la définition 10.4 d'une matrice :

Définition 11.1 (Matrice)

On appelle ***matrice*** A de ***type*** (n,p) ou ***d'ordre*** (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau à n ***lignes et*** p ***colonnes*** d'éléments de $\mathbb{K}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant p}}$$

Les a_{ij} sont appelés ***coefficients*** de la matrice.

Lorsque $p=1$, la matrice est appelée ***matrice-colonne*** ou encore ***vecteur-colonne***.

Lorsque $n=1$, la matrice est appelée ***matrice-ligne*** ou encore ***vecteur-ligne***.

Rappelons aussi la notation de l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes :

Notation

L'ensemble des matrices de coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dans le cas où $n=p$, on note plus simplement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices de cet ensemble sont appelées ***matrices carrées***.

L'ensemble des vecteurs-colonne est noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^n$.

L'ensemble des vecteurs-ligne est noté $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ ou plus simplement $\mathbb{K}^p$.

Ex. 11.1 Résoudre à l'aide de l'algorithme de Gauss les systèmes associés aux matrices augmentées $(A|V)$ et $(B_t|V)$ où $t\in\mathbb{R}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix},\ B_t=\begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix} \text{ et } V=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cor. 11.1

II.2. Combinaisons linéaires de matrices de même ordre

Définition 11.2 (Multiplication par un scalaire)

Soient $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on définit la matrice λA par

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant p}}$$

Définition 11.3 (Addition de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit la matrice $A + B$ par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant p}}$$

Définition 11.4 (Combinaison linéaire de matrices de même ordre)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toute matrice de la forme $\lambda A + \mu B$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ est appelée ***combinaison linéaire des matrices*** A ***et*** B.

On définit de même l'addition ou la combinaison linéaire de N matrices de même ordre, où N est un entier supérieur ou égal à 2.

Propriété 11.5

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

La démonstration sera faite au chapitre 18.

II.3. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Notation

Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et tout $j \in [\![1; p]\!]$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient e_{ij} qui est égal à 1. Autrement dit

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Proposition 11.6

La famille $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration

La démonstration sera faite au chapitre 14.

II.4. Produits de matrices

Ex. 11.2 Effectuer les produits suivants :

$$\begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2+3i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3+i & 7+6i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & -4 & 0 \\ 3i & 2+i & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Définition 11.7

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
On définit la matrice $A \times B = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par

$$AB = (c_{ij})_{\substack{i \leqslant n \\ j \leqslant q}} \text{ où } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Autrement dit, pour obtenir le coefficient c_{ij} de AB, on effectue les « produits scalaires » du i-ème vecteur ligne de A par le j-ème vecteur colonne de B.

Remarque

Pour que le produit de deux matrices soit possible, il faut et il suffit que ***le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite***.
Le produit possède alors ***le même nombre de lignes que la matrice de gauche et le même nombre de colonnes que la matrice de droite***.
D'autre part, ***les produits*** AB ***et*** BA ne sont tous les deux possibles que si ***les matrices*** A ***et*** B ***sont d'ordre*** (n, p) ***et*** (p, n).
Cette impossibilité, en général, d'échanger les matrices A ***et*** B est une première preuve que ***le produit de matrices n'est pas commutatif***. En voici une autre :

Ex. 11.3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

II.5. Calcul pratique de produits matriciels

Proposition 11.8

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, le produit AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration

Proposition 11.9

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
La j-ème colonne de AB est le produit de A par la j-ème colonne de B et la i-ème ligne de AB est le produit de la i-ème ligne de A par B.

Démonstration

Ce résultat est une généralisation de la proposition précédente et se démontre de manière identique.

Remarque

Les deux résultats précédents peuvent s'écrire à l'aide des notations matricielles sous la forme suivante :

1) Si $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & A_2 & ... & A_p \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $A_1, A_2, ..., A_p \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les ***colonnes de*** A et si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors

$$AX = \left(\begin{array}{c} x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_pA_p \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

2) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & B_2 & ... & B_q \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où $B_1, B_2, ..., B_q \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont les ***colonnes de*** B alors

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} AB_1 & AB_2 & ... & AB_q \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

3) Si $A = \left(\begin{array}{c} A'_1 \\ \hline ... \\ \hline A'_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ où $A'_1, A'_2, ..., A'_n \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ sont les ***lignes de*** A alors

$$AB = \left(\begin{array}{c} A'_1B \\ \hline ... \\ \hline A'_nB \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Ex. 11.4 Calculer AX et AY. En déduire $A(X|Y)$.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Cor. 11.4

II.6. Matrices et systèmes linéaires

Nous avons vu au chapitre 10 l'utilisation des matrices pour la résolution de systèmes linéaires. Réciproquement, un système linéaire peut s'écrire sous forme matricielle de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = B$$

où $A = (a_{ij})_{\substack{i\leqslant n \\ j\leqslant p}}$, $B = (b_i)_{i\leqslant n}$ et $X = (x_j)_{j\leqslant p} \in \mathbb{K}^p$ est le p-uplet inconnu.

II.7. Matrice nulle

Définition 11.10

On appelle matrice ***nulle*** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Notation

On note $0_{n,p}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.8. Matrices carrées particulières

a) Matrices commutantes

Il peut arriver que ***pour deux matrices carrées de même ordre*** A ***et*** B ***on ait*** $AB = BA$.

$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 36 \\ 36 & 23 \end{pmatrix}$, $AB =$, $BA =$

Définition 11.11

Pour deux matrices carrées A et B de même ordre n, on dit que A et B ***commutent*** si $AB = BA$.

b) Diagonale d'une matrice

Définition 11.12

On appelle ***diagonale*** d'une matrice carrée les coefficients a_{ii}, $i \in [\![1;n]\!]$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la diagonale sont appelés ***coefficients diagonaux***.

Définition 11.13

On appelle ***matrice diagonale*** A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice dont ***tous les coefficients sont nuls*** à l'exception éventuellement des coefficients diagonaux.

Définition 11.14

On appelle matrice ***identité*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, la matrice diagonale dont ***tous les coefficients diagonaux valent 1***.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Matrices triangulaires

Définition 11.15

On appelle ***matrice triangulaire supérieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sous-diagonaux sont nuls*** : $\forall i > j, a_{ij} = 0$.

Définition 11.16

On appelle ***matrice triangulaire inférieure*** toute matrice carrée A dont les ***coefficients sur-diagonaux sont nuls*** : $\forall j > i, a_{ij} = 0$.

$$T_S = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad T_I = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Définition 11.17

On appelle matrice triangulaire toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

d) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 11.18

On appelle ***matrice symétrique*** toute matrice A pour laquelle $\forall i,j \in [\![1;n]\!], a_{ij} = a_{ji}$.

Définition 11.19

On appelle ***matrice antisymétrique*** toute matrice carrée A pour laquelle $\forall i,j \in [\![1;n]\!], a_{ij} = -a_{ji}$. En particulier, pour $i = j$, on a :..

$$S = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

II.9. Propriétés du produit matriciel

Propriété 11.20

L'addition de matrices est commutative, associative, possède un élément neutre qui est la matrice nulle. Par ailleurs toute matrice possède une matrice opposée.
Concernant la multiplication matricielle et la multiplication par un scalaire : soient n, p, q et r quatre entiers naturels non nuls.

Associativité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Élément neutre :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), 1_{\mathbb{K}}.A = A$.
$\forall A \in \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}), AI_n = I_nA = A$.

Distributivité :
$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), A(B+C) = AB + AC$.
$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), (A+B)C = AC + BC$.

Démonstration

Remarque

La distributivité de la multiplication matricielle autorise à factoriser ***à droite*** ou ***à gauche***.

Définition 11.21

On définit la puissance k-ième d'une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ par
$A^k = \underbrace{A \times ... \times A}_{k \text{ facteurs}}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.

La définition précédente n'est rendue possible que parce que le produit matriciel est associatif.

Propriété 11.22

Toute combinaison linéaire de matrices diagonales est une matrice diagonale.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Toute combinaison linéaire de matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

Propriété 11.23

Le produit de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

Démonstration

II.10. Des règles qui ne sont pas valables pour les produits de matrices

L'exercice 11.3 montre que ***la multiplication de deux matrices carrées de même ordre n'est pas commutative*** !

Un produit de deux matrices non nulles peut être nul !
Autrement dit, si $AB = 0$... on ne peut rien conclure !
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$

Une matrice carrée non nulle peut avoir une puissance k-ième nulle !
Autrement dit, si $A^k = 0$... On ne peut rien conclure !
$A = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}, A^2 =$

Les produits d'une même matrice par deux matrices distinctes peuvent être égaux !
Autrement dit, si $AB = AC$... on ne peut rien conclure en général !
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, AB =$ $\quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, AC =$
ou encore, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $AD =$

Les identités remarquables ne sont plus valables en général !
En effet, en développant $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) =$ ....
on montre que $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \Leftrightarrow$ ....

II.11. Identités remarquables pour *les matrices carrées qui commutent*

Proposition 11.24

Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre $n \in \mathbb{N}^*$ ***qui commutent***, alors $\forall p \in \mathbb{N}$:

1) $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}B^k$

2) $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^{p-k}B^k\right)$

Démonstration

III. Méthode du pivot et calcul matriciel

III.1. Matrices élémentaires

Définition 11.25 (Matrice de transvection)

On appelle ***matrice de transvection de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $V_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ appartiennent à $[\![1;n]\!]$. Autrement dit une matrice de transvection est une matrice de la forme

$$V_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Définition 11.26 (Matrice de transposition)

On appelle ***matrice de transposition de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ où $i \neq j$ appartiennent à $[\![1;n]\!]$. Autrement dit une matrice de transposition est une matrice de la forme

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

Définition 11.27 (Matrice de dilatation)

On appelle ***matrice de dilatation de*** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toute matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1; n]\!]$. Autrement dit une matrice de dilatation est une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) = \left(\quad \right)$$

Définition 11.28 (Matrice élémentaire)

On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une ***matrice élémentaire*** si c'est une matrice de transvection, de transposition ou de dilatation.

Remarque

Les notations $V_{ij}(\lambda)$, T_{ij} et $D_i(\lambda)$ pour les matrices élémentaires ***ne sont pas des notations officielles***. Elles ne sont introduites que dans le but de faciliter l'usage des matrices élémentaires dans la suite de ce chapitre.
En revanche elles ne peuvent pas être utilisées en dehors de ce chapitre (en colle, en devoir, aux concours...) à moins d'en redonner la définition.

Ex. 11.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Calculer $AV_{1,2}(2)$, $V_{1,2}(2)A$, $AT_{2,3}$, $T_{2,3}A$, $AD_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et $D_2\left(\frac{1}{2}\right)A$.

Cor. 11.5

III.2. Interprétation des produits par les matrices élémentaires

Propriété 11.29

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Multiplier A ***à gauche*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la i-ème ligne de A le produit de j-ème ligne de A par λ***.
Multiplier A ***à gauche*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les i-ème et j-ème lignes de A***.
Multiplier A ***à gauche*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la i-ème ligne de A par λ***.
Multiplier A ***à droite*** par $V_{ij}(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***ajouter à la j-ème colonne de A le produit de i-ème colonne de A par λ***.
Multiplier A ***à droite*** par $T_{ij} \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***échanger les i-ème et j-ème colonnes de A***.

Multiplier A ***à droite*** par $D_i(\lambda) \in \mathcal{M}_{\dots}(\mathbb{K})$ revient à ***multiplier à la i-ème colonne de A par λ***.

Démonstration

Définition 11.30 (Matrices équivalentes par colonne)

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites ***équivalentes par colonne*** si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à droite*** de matrices élémentaires.

Notation

Si deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par colonne, on note $A \underset{C}{\sim} A'$.

Remarque

- La définition 10.10 donnée pour les matrices équivalentes par lignes peut s'énoncer ainsi : deux matrices sont équivalentes par lignes si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par un produit fini ***à gauche*** de matrices élémentaires.
- Les opérations sur les colonnes de la matrice associée à un système linéaire peuvent s'interpréter comme des changements d'inconnues.

III.3. Matrices carrées inversibles

Proposition 11.31

Si $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $BA = AC = I_n$, alors $B = C$.

Démonstration

Définition 11.32 (Matrice carrée inversible)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est ***inversible*** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

On dit alors que B est ***l'inverse*** de la matrice A.

Notation

Si A est une matrice inversible, on note A^{-1} son inverse.

Ex. 11.6 Montrer qu'il existe des matrices carrées non nulles non inversibles.

Cor. 11.6

Proposition 11.33

Les matrices élémentaires sont inversibles. De plus :

- ***Matrices de transvection*** : $V_{ij}(\lambda)^{-1} = V_{ij}(-\lambda)$;
- ***Matrices de transposition*** : $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$;
- ***Matrices de dilatation*** : $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$.

Démonstration

C'est une conséquence directe de la propriété 11.29.

III.4. Traduction matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss

Théorème 11.34

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite par lignes $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = ER$.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat du théorème 10.15 de résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss puisque les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice s'interprètent comme produits successifs à gauche par des matrices élémentaires.

Théorème 11.35

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite ***par colonnes*** $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = RE$.

IV. Matrices carrées inversibles

IV.1. Groupe linéaire

Définition 11.36

On appelle ***groupe linéaire d'ordre*** n et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 11.37

1) $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;
2) si $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3) si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration

IV.2. Caractérisations des matrices carrées inversibles

Théorème 11.38

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $A \underset{L}{\sim} I_n$;
3) le système $AX = 0_{n,1}$ admet une unique solution $X = 0_{n,1}$;
4) pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, le système $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}$;
5) pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, le système $AX = B$ admet au moins une solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

Démonstration

- ①⇒②

D'après le théorème 11.34, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un produit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices élémentaires et une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.

Les matrices élémentaires sont inversibles donc E est inversible et $E^{-1}A = E^{-1}ER = R$.

Supposons A inversible. R est alors inversible comme produit de deux matrices qui le sont.

Montrons par récurrence finie que la seule matrice échelonnée réduite par lignes d'ordre (n, n) inversible est I_n.

Supposons R échelonnée réduite par lignes d'ordre (n, n) et inversible.

***Initialisation** : si $r_{1,1} = 0$ alors $R_1 = 0_{n,1}$ (par définition des matrices échelonnées réduites par lignes) et quelle que soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en décomposant R en ses vecteurs colonnes, $MR = (MR_1|\cdots|MR_n)$, donc $MR_1 = 0_{n,1}$ et $MR \neq I_n$ ce qui est absurde puisque nous avons supposé R inversible.*

Donc $r_{1,1} = 1$ et $\forall i \in [\![2; n]\!], r_{i,1} = 0$.

***Hérédité** : supposons que pour $p \in [\![1; n-1]\!]$ et tout $k \in [\![1; p]\!], r_{k,k} = 1$ et montrons par l'absurde que $r_{p+1,p+1} = 1$.*

Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire (par définition des matrices échelonnées réduites par lignes) que $r_{p+1,p+1} = 0$. Or (toujours par définition des matrices échelonnées réduites par lignes) pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, R_k est le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de celui d'indice de ligne k qui vaut 1 et $R_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} r_{k,p+1} R_k$.

Donc quelle que soit la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $MR_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} r_{k,p+1} MR_k = \begin{pmatrix} r_{1,p+1} \\ \vdots \\ r_{p,p+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ *par hypothèse de récurrence et en utilisant l'expression des vecteurs colonnes* R_k *pour* $k \in [\![1;p]\!]$.

En particulier le coefficient d'indice $p+1$ *de* MR_{p+1} *est nul donc* $MR \neq I_n$ *(quelle que soit la matrice* M*) ce qui est absurde puisque nous avons supposé* R *inversible.*

Conclusion *: si* R *échelonnée réduite par lignes est inversible, alors* $R = I_n$ *(qui est bien inversible).*

- ②⇒③

  Si $A \underset{L}{\sim} I_n$ *alors le système* $AX = 0_{n,1}$ *est équivalent en utilisant la décomposition* ER *de* A *à* $X = E^{-1}0_{n,1} = 0_{n,1}$ *donc admet une unique solution* $X = 0_{n,1}$.

- ③⇒④

  Supposons que le système $AX = 0_{n,1}$ *admette une unique solution* $X = 0_{n,1}$.

  Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, *si* $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}$ *sont solutions du système* $AX = B$, *alors* $AX_1 = AX_2 \Leftrightarrow A(X_1 - X_2) = 0_{n,1}$ *donc* $X_1 = X_2$. *Le système* $AX = B$ *admet donc au plus une solution.*

  Montrons par l'absurde qu'il admet au moins une solution.

  Supposons donc qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ *tel que le système* $AX = B$ *n'admette pas de solution. L'algorithme de Gauss appliqué à la matrice augmentée* $(A|B)$ *de ce système donne alors une matrice* $(R|B')$ *qui possède un pivot dans sa dernière colonne avec* $R \underset{L}{\sim} A$ *échelonnée réduite par lignes.*

  En particulier, la matrice carrée R *d'ordre* n *possède au plus* $n-1$ *pivots et il existe donc une colonne de* R *sans pivot. Notons* j *l'indice minimal des colonnes de* R *sans pivot.*

  Le vecteur $X' = \begin{pmatrix} -r_{1,j} \\ -r_{2,j} \\ \vdots \\ -r_{j-1,j} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ *est une solution non nulle du système* $RX = B'$ *ce qui est absurde puisque nous avons d'une part supposé que* $AX = 0_{n,1}$ *admettait une unique solution* $X = 0_{n,1}$ *et que d'autre part les matrices élémentaires sont inversibles (i.e.* $X' = EX \neq 0_{n,1} \Leftrightarrow E^{-1}X' = X \neq 0_{n,1}$*).*

- ④⇒⑤

L'implication est évidente : si pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, le système $AX = B$ admet une unique solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ alors pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, le système $AX = B$ admet au moins une solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}$.

- ⑤⇒①

  Supposons que pour tout $B \in \mathcal{M}_{n,1}$, le système $AX = B$ admet au moins une solution $X \in \mathcal{M}_{n,1}$. En particulier, cette propriété est vraie pour les vecteurs $E_{i,1}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}$. Soient X_i les solutions des systèmes correspondant. Alors la matrice $M = (X_1|...|X_n)$ vérifie $AM = (AX_1|...|AX_n) = I_n$.

  On admet que $MA = I_n$ et que M est donc l'inverse de A.

IV.3. Calcul pratique de la décomposition ER et de l'inverse d'une matrice

Le théorème précédent conduit aux deux méthodes suivantes :

Méthode : Décomposition ER

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, décomposer A sous la forme ER où $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un produit de matrices élémentaires et $R \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A, ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss*** à la matrice A ***en notant sous forme de matrices élémentaires E_k toutes les opérations élémentaires effectuées sur les lignes***.

À la fin de l'algorithme, on obtient donc

$$R = E_N E_{N-1} ... E_2 E_1 A$$

La matrice échelonnée réduite par lignes obtenue à la fin de l'algorithme est la matrice R recherchée.

La matrice E est quant à elle le produit $E_1^{-1} E_2^{-1} ... E_{N-1}^{-1} E_N^{-1}$.

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|I_n)$.

À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1})$.

Ex. 11.7 Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse. Sinon, donner leur décomposition ER.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, C_t = \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ -t & t & 1-2t \end{pmatrix}$$

V. Transposée d'une matrice et compléments

V.1. Transposée

Définition 11.39

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelle ***transposée de*** A la matrice B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $\forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], b_{i,j} = a_{j,i}$.

Notation

On note ${}^tA$ ou A^T la transposée de la matrice A.

Définition 11.40

L'application ${}^t : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right.$ est appelée ***transposition***.

V.2. Propriétés

Propriété 11.41

La transposition vérifie :

- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$;
- $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$;
- si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), {}^t(A^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1}$.

Démonstration

V.3. Matrices symétriques et antisymétriques

Proposition 11.42

La définition des matrices symétriques et antisymétriques se traduit à l'aide de la transposition par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice symétrique si et seulement si ${}^tA = A$;
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

V.4. Transposée des matrices élémentaires

Proposition 11.43

La transposée des matrices élémentaires vérifie :

- pour $i \neq j \in [\![1;n]\!]$, ${}^tV_{ij}(\lambda) = V_{ji}(\lambda)$;

- ${}^{t}T_{ij} = T_{ji} = T_{ij}$ car les matrices de transposition sont symétriques ;
- pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, ${}^{t}D_i(\lambda) = D_i(\lambda)$.

V.5. Rang d'une matrice

Définition 11.44

On appelle ***rang*** d'une matrice A le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A.

V.6. Seconde méthode pour l'obtention de l'inverse d'une matrice

Méthode : Obtention de l'inverse d'une matrice

Pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, obtenir la matrice A^{-1} ***revient à appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice*** $(A|X)$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

À la fin de l'algorithme, la matrice obtenue sera alors $(I_n|A^{-1}X)$.

Ex. 11.8 Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode précédente.

Maths - Chapitre 12

Espaces vectoriels

I. Programme officiel

Espaces vectoriels et applications linéaires

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Espaces vectoriels a) Espaces et sous-espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espaces vectoriel. Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$ (cas particulier des suites). Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation.	Exemples : ensemble des solution d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.	
C- Applications linéaires a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes. Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée. Image directe d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.	
b) Isomorphismes	
Isomorphisme, automorphisme.	
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$.

d) Endomorphismes remarquables	
Identité et homothéties.	Notation Id_E.
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.	
Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.	

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désignera le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

II. Structure d'espace vectoriel

II.1. Introduction et premiers exemples

- Tout vecteur $\vec{u}$ du plan peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ de deux vecteurs non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est appelée ***base du plan vectoriel***, $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ sont appelées ***coordonnées*** du vecteur $\vec{u}$ ***dans la base*** $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
- Toute solution y d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ de deux solutions non colinéaires y_1 et y_2 de cette équation différentielle : $(y_1; y_2)$ est appelée ***base de l'espace des solutions***, $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ sont appelées ***coordonnées*** de la solution y ***dans la base*** $(y_1; y_2)$.
- Tout nombre complexe z peut s'écrire comme ***une combinaison linéaire*** $z = x \times 1 + y \times i$ des nombres 1 et i : ....
- Toute suite récurrente linéaire u d'ordre 2 peut s'écrire comme ....
  ....
  ....
  ....
- Tout couple $(c; d) \in \mathbb{K}^2$ peut s'écrire comme ....
  ....
  ....
  ....

Les exemples précédents illustrent le fait que les notions de ***combinaisons linéaires***, de ***bases*** ou encore de ***coordonnées*** se retrouvent dans des domaines très variés des mathématiques, dont certains n'ont à priori aucun rapport immédiat avec la géométrie.
Ce qui importe en fait, ***ce sont les opérations que l'on peut faire sur les objets concernés dans ces exemples*** : on peut les ajouter entre eux, ou les multiplier par un scalaire (c'est-à-dire un nombre réel ou complexe), ce sont des éléments de plusieurs ***espaces vectoriels***.
Par ailleurs, tous ces exemples concernent des espaces vectoriels ***de dimension 2*** : pour définir un vecteur dans ces espaces, il suffit de donner ***deux scalaires, appelés coordonnées de ce vecteur***. Cette notion de dimension est utilisée dans d'autres domaines que les mathématiques, parfois avec une autre terminologie : en SI par exemple, on parle plutôt de ***degrés de liberté***.
Il existe évidemment des espaces vectoriels de dimension 1, ou 3, ou plus, voire de dimension infinie !

Le but de ce chapitre est d'éclaircir le lien entretenu par ces objets en apparence si divers.

II.2. Définition et premiers exemples

Définition 12.1

On dit que $(E,+,.)$ est un ***espace vectoriel sur*** $\mathbb{K}$ ou encore un $\mathbb{K}$-***espace vectoriel*** si :

- E est muni d'une loi ***interne*** notée additivement $(+)$ qui lui confère une structure de ***groupe commutatif*** : $\forall (x,y)\in E^2, x+y\in E$, la loi est ...., possède .... noté 0_E (ou plus simplement 0) et tout élément $x\in E$ possède .... noté $-x$.
- E est muni d'une loi externe $(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E\mapsto \lambda.x\in E$. Plus précisément, cette loi vérifie :
  - ⋆ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$;
  - ⋆ $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$;
  - ⋆ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}, \forall x\in E, (\lambda\times\mu).x=\lambda.(\mu.x)$;
  - ⋆ $\forall x\in E, 1_{\mathbb{K}}.x=x$.

Si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** et ceux de $\mathbb{K}$ ***scalaires***.

Notation

Les éléments de $x\in E$ sont parfois surmontés d'une flèche ($\vec{x}$) pour les distinguer des scalaires, mais ce n'est pas une obligation. Cette notation est essentiellement utilisée pour les vecteurs du plan et de l'espace ordinaires.
Le signe . de la loi externe de E est souvent omis.

Ex. 12.1

- $(\mathbb{R},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel où . est ....
  $\mathbb{C}$ s'identifie alors ....
- $(\mathbb{C},+,.)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel où . est ....
- $(\mathbb{R}^2,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par ....
  et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors ....
- De même, $(\mathbb{R}^3,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par
  .... et sa loi externe par ....
  $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors ....
- D'une manière générale, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant sa loi interne par
  .... et sa loi externe par ....

Ex. 12.2

- L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles muni des lois :
  - ⋆ $\forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}+(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=$ ....
  - ⋆ $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=$ ....

  est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
  De même, l'ensemble $\left(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,.\right)$ des suites complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

- D'une manière générale, soit A un ensemble quelconque et $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$. On munit $\mathcal{F}(A,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^A$ des lois :
  - ⋆ $\forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K}), \forall g \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, on définit par $f+g$ l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$
  - ⋆ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{K})$, on définit par $\lambda.f$ l'application : $\left\{\begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$

  Muni de ces deux lois, $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En effet ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  De même, si $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque, $(\mathcal{F}(A,E),+,.)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété 12.2

Pour un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E$:

- $0.x = 0_E$: $0.x = (0+0).x = 0.x + 0.x \Rightarrow 0.x = 0_E$
- $\lambda.0_E = 0_E$: $\lambda.0_E = \lambda.(0_E+0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E \Rightarrow \lambda.0_E = 0_E$
- $\lambda.x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ **ou** $(\lambda^{-1}.\lambda).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x = 0_E$

Ex. 12.3 Montrer que la commutativité de la loi + est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Cor. 12.3

Ex. 12.4 $E = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, xy = 0\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Cor. 12.4

II.3. Combinaisons linéaires

Définition 12.3 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on dit que u est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** U ou une ***combinaison linéaire de*** U si

$$\exists(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

III. Sous-espaces vectoriels

Dans tout ce qui suit, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

III.1. Définition

Définition 12.4

Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ si :

- $0_E \in F$;
- $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda.x + \mu.y \in F$: F est dit ***stable par combinaisons linéaires***.

Remarque

$\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$.

III.2. Théorème fondamental

Théorème 12.5

Si F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, alors $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Méthode

Pour prouver qu'un ensemble (muni de lois...) est un espace vectoriel, on montrera souvent qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Ex. 12.5

- Montrer que l'ensemble $F = \{(x; x), x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:
  ....
  ....
  ....
- Montrer que pour une fonction $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
  ....
  ....
- Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (d'ordre quelconque) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$.
  ....
  ....
  ....
  ....

III.3. Sous-espace vectoriel engendré

Proposition 12.6

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, ***l'ensemble des combi-***

naisons linéaires de U est un sous-espace vectoriel de E appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** U.
On le note $\operatorname{Vect} U$.

Démonstration

Méthode
Pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on peut tenter de l'écrire comme sous-espace vectoriel engendré par une famille.

Ex. 12.6
- L'ensemble $F = \{(x;x), x \in \mathbb{R}\} =$ .... est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par..
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\operatorname{Vect}((0;0;1);(0;1;0))$ est l'ensemble des vecteurs de la forme..................
- Pour une fonction a continue sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ engendré par ....
- Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
  L'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ engendré par ....
  ....

III.4. Intersection de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 12.7
L'intersection $F \cap G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.7 Existe-t-il des suites u vérifiant ***à la fois*** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$?
Existe-t-il des suites v vérifiant ***à la fois*** $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$ et $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$?

Cor. 12.7

III.5. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 12.8
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On appelle ***somme de*** F ***et de*** G l'ensemble $H = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.

Notation

La somme H des sous-espaces vectoriels F et G est notée $H = F + G$.

Théorème 12.9

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Ex. 12.8 On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites géométriques de raison 2 et $\mathcal{V}$ l'ensemble des suites constantes.
Montrer que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .\right)$ et que $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est l'ensemble des suites vérifiant $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Cor. 12.8

III.6. Somme directe de sous-espaces vectoriels

Définition 12.10

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels F et G de E, on dit que la somme $F + G$ est ***directe*** si

$$\forall z \in F + G, \exists! x \in F, \exists! y \in G, z = x + y$$

Notation

Si la somme $F + G$ est directe, on note $F \oplus G$ la somme des sous-espaces vectoriels F et G de E.

Proposition 12.11

La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration

III.7. Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 12.12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F et G sont ***supplémentaires dans*** E si $F \oplus G = E$, autrement dit si

$$\begin{cases} F + G & = & E \\ F \cap G & = & \{0_E\} \end{cases}$$

Ex. 12.9 Montrer que $\text{Vect}((0;1))$ et $\text{Vect}((1;0))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il en est de même de $\text{Vect}((0;1))$ et $\text{Vect}((1;1))$.

Cor. 12.9

Remarque

Cet exemple montre qu'un sous-espace vectoriel F ***admet plusieurs sous-espaces supplémentaires*** G dans E. ***En conséquence, on ne peut jamais dire que*** G ***est ~~le supplémentaire de F~~, mais seulement qu'il est un supplémentaire de F*** !

Remarque

D'après la définition de la somme directe, si F et G sont supplémentaires dans E, ***tout vecteur de*** E ***se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

IV. Applications linéaires

Étant donné un corps $(\mathbb{K},+,\times)$ (pour nous $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), on se donne $(E,+,.)$, $(F,+,.)$ et $(G,+,.)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

IV.1. Définition

Définition 12.13

Soit f une application de E dans F. On dit que f est une ***application linéaire*** ou un ***morphisme d'espaces vectoriels*** si

$$\forall(\lambda;\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall(u;v)\in E^2, f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$$

Corollaire 12.14

$f(0_E)=0_F$.

Démonstration

On prend $(\lambda;\mu)=$*. . . . . .dans la définition précédente.*

Notation

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Définition 12.15

- Les applications de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés ***endomorphismes*** de E.
- Les applications ***bijectives*** de $\mathcal{L}(E,F)$ sont appelées ***isomorphismes*** et les bijections de $\mathcal{L}(E)$ sont appelées ***automorphismes***.
- On appelle ***forme linéaire*** de E toute application de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$.

Notation

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$. Il s'agit de l'abréviation de ***Groupe Linéaire***.

Ex. 12.10 $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est une application linéaire.

Cor. 12.10

IV.2. Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 12.16

$\mathcal{L}(E,F)$ muni de l'addition d'applications et de la multiplication par un scalaire est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$.

Démonstration

IV.3. Composition

Proposition 12.17

La composée de deux applications linéaires est linéaire.

Démonstration

Remarque

Notamment, la composée de deux endomorphismes est un endomorphisme, la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme et la composée de deux automorphismes est un automorphisme.

IV.4. Réciproque d'une application linéaire bijective

Proposition 12.18

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

Démonstration

Remarque

Notamment, ***dans le cas de*** $\mathcal{GL}(E)$ la loi $\circ$ est une loi de composition interne qui confère à $(GL(E), \circ)$ une structure de groupe : la composée de deux automorphismes est un automorphisme, l'identité est l'élément neutre de la composition et tout automorphisme possède un symétrique pour la composition qui est sa bijection réciproque.

IV.5. Noyau et image d'une application linéaire

Définition 12.19

Pour toute application $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit :

- le ***noyau*** de f noté $\operatorname{Ker} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Ker} f = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$;
- l'***image*** de f notée $\operatorname{Im} f$ comme l'ensemble $\operatorname{Im} f = \{v \in F, \exists u \in E, f(u) = v\} = \{f(u), u \in E\}$.

Autrement dit,
le noyau de f est l'image réciproque par f du vecteur nul de F (c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de 0_F)
l'image de f est l'ensemble des ***vecteurs de*** F ***ayant un antécédent par*** f ***dans*** E c'est-à-dire l'image directe de E par f.

IV.6. Propriétés de l'image et du noyau

Théorème 12.20

Étant donnés $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et V un sous-espace vectoriel de E, on a :

1) $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E et $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F ;
2) en particulier, $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F ;
3) f injective $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$;
4) f surjective $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F$.

Démonstration

Ex. 12.11 Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie dans le précédent exemple est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Cor. 12.11

V. Applications linéaires particulières

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

V.1. Rappel

Par définition (voir définition 12.10), tout vecteur de $E=F\oplus G$ se décompose ***de manière unique en la somme d'un vecteur de*** F ***et d'un vecteur de*** G.

V.2. Les homothéties

Définition 12.21

On appelle homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application $h_\lambda : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}\right.$

Propriété 12.22

- $\forall x \in E$, $h_1(x)=x$ (h_1 est l'identité) et $h_0(x)=0$ (h_0 est l'application nulle) ;
- si $\lambda \neq 0$, $h_\lambda \in \mathcal{GL}(E)$ et $h_\lambda^{-1}=h_{\frac{1}{\lambda}}$.

V.3. Les projections

Définition 12.23

On appelle projection sur F parallèlement à G l'application $p : \left\{\begin{array}{ccc} E=F\oplus G & \to & E \\ x=x_1+x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}\right.$

Propriété 12.24

- $\forall x_1 \in F, p\left(x_1\right)=x_1$ et $\forall x_2 \in G, p\left(x_2\right)=0$;
- $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, $\operatorname{Im} p = F = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-p)$ et $\operatorname{Ker} p = G$;

Démonstration

Proposition 12.25 (Caractérisation des projections)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une projection si et seulement si $f \circ f = f$ (on note aussi $f^2=f$).

Démonstration

V.4. Les symétries

Définition 12.26

On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application s : $\left\{\begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}\right.$

Propriété 12.27

- Si p est la projection sur F parallèlement à G alors $s = 2p - \mathrm{Id}$ et $p = \frac{s+\mathrm{Id}}{2}$
- $s \in \mathcal{GL}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$, $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$

Démonstration

Proposition 12.28 (Caractérisation des symétries)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
f est une symétrie si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$ (on note aussi $f^2 = \mathrm{Id}$).

Démonstration

V.5. Les affinités

Définition 12.29

On appelle affinité de base F parallèlement à G et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application a : $\left\{\begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \rightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 + \lambda x_2 \end{array}\right.$

Propriété 12.30

- Si $\lambda = 1$, alors $a = \mathrm{Id}$.
  Si $\lambda = 0$, alors a est la projection sur F parallèlement à G.
  Si $\lambda = -1$, alors a est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
- Si $\lambda \neq 0$ alors $a \in \mathcal{GL}(E)$

Démonstration

Maths - Chapitre 13

Polynômes

I. Programme officiel

Polynômes

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$	
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$.	La construction n'est pas exigible.
Opérations : somme, produit, composée.	
Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant et terme de plus haut degré d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.	On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Degré d'une somme, d'un produit.	
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
b) Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$; diviseurs et multiples.	
Division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $Q \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$.	
c) Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	
Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale.
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit.	
Dérivée k-ième d'un polynôme.	
Formule de Taylor.	
d) Racines	
Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité.	
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	
Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives.	
Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Décomposition en facteurs irréductibles	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors-programme.
f) Somme et produit des racines d'un polynôme	
Expression de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.	Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors-programme.
Cas des polynômes du second degré.	Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

II.1. Définitions

Définition 13.1

On appelle ***polynôme à une indéterminée et à coefficients dans*** $\mathbb{K}$ une suite $a : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang $n \in \mathbb{N}$: $\forall p \geq n, a_p = 0$.
Les termes a_i de la suite sont appelés ***coefficients*** du polynôme.

Notation

On note $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Comme la suite des coefficients est nulle à partir d'un certain rang, un polynôme non nul peut aussi être noté $(a_0, a_1, ..., a_n)$ où a_n est le dernier terme non nul de la suite a.
Cependant, généralement, un polynôme est noté sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{avec par convention } X^0 = 1$$

X est appelée ***indéterminée***.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

- Il résulte de la définition que deux polynômes sont égaux ***si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux***.

- On appelle ***polynôme nul*** le polynôme dont tous les coefficients sont nuls.
- On appelle ***polynômes constants*** les polynômes dont seul le premier coefficient est (éventuellement) non nul.
- On appelle ***monôme*** tout polynôme qui n'a qu'un unique coefficient non nul ; c'est à dire de la forme a_pX^p avec $p \in \mathbb{N}$ et $a_p \in \mathbb{K}$.
- Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ appartient aussi à $\mathbb{C}[X]$. On a donc $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. La réciproque est fausse. En effet, $P = X - i$ est dans $\mathbb{C}[X]$ mais n'est pas dans $\mathbb{R}[X]$.
- Si on ne sait pas quel est le dernier coefficient non nul, et puisque l'on est sûr que cette somme comporte un nombre **fini** de termes, on peut parfois noter $P = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_kX^k$.

Ex. 13.1 $P = (1, 0, 5, -2, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 2, 5i, 1 + i, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$ ....
$P = (0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$ est un polynôme que l'on notera $P =$......................................
Attention X désigne un polynôme particulier et non une variable !

II.2. Structures de $\mathbb{K}[X]$

Définition 13.2

On munit $\mathbb{K}[X]$:

- d'une addition :
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X], \quad P + Q = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ...)$;
- d'une multiplication par les scalaires de $\mathbb{K}$:
  $\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.P = (\lambda \times a_0, \lambda \times a_1, ...)$.

Proposition 13.3

$(\mathbb{K}[X], +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Définition 13.4

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une multiplication :
$\forall P = (a_0, a_1, ...) \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q = (b_0, b_1, ...) \in \mathbb{K}[X],$

$$P \times Q = (c_0, c_1, ...) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{i+j=n} a_ib_j$$

Remarques

- La définition du produit de polynômes est une simple traduction de la multiplication habituelle. Notamment elle vérifie $X^n \times X^p = X^{n+p}$ pour tous $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.
  Ceci justifie la convention adoptée $X^0 = 1$.

- Au vu de la définition, on peut conclure que la multiplication sur $\mathbb{K}[X]$ est commutative.

Ex. 13.2 $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 2 - X + 3X^2$. Calculer $P \times Q$.

. . . .

Définition 13.5

On munit également $\mathbb{K}[X]$ d'une composée :

Soient $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On définit $A \circ P$ par : $\quad A \circ P = A(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k$.

Remarque

Dans le cas particulier où $P = X$, le polynôme $A(P) = A(X)$ est égal au polynôme A, c'est pourquoi on utilise aussi bien A que $A(X)$ pour désigner ce dernier polynôme.

Ex. 13.3 La composition consiste simplement à remplacer l'indéterminée X par un polynôme.
On considère les polynômes $P = 1 + X + X^2$ et $Q = 1 + X$.
Calculer $P \circ Q$ puis $Q \circ P$. La composée est-elle commutative ?

Cor. 13.3

II.3. Fonctions polynomiales

Définition 13.6

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle ***fonction polynomiale*** associée à P la fonction $\tilde{P}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$

On notera souvent de la même façon un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
Lorsqu'on passe d'un polynôme à sa fonction polynomiale associée, on dira que l'on ***substitue*** x à X dans P ou que l'on ***évalue*** P en x.

Remarques

- Les opérations définies précédemment sur l'ensemble des polynômes correspondent à celles définies sur l'ensemble des fonctions.
  En fait, les opérations sur l'ensemble des polynômes ***ont été définies de sorte à ce qu'elles coïncident avec les opérations sur l'ensemble des fonctions***.
- Il y a une ***différence de nature*** entre polynôme et fonction polynomiale. ***Cette distinction n'est pas un caprice de mathématicien*** !
  Par exemple, deux polynômes ne sont égaux que si tous leurs coefficients sont égaux. Or cela n'a rien d'évident ***à priori*** pour les fonctions polynomiales : existe-t-il deux

fonctions polynomiales f et g correspondant à deux polynômes ***distincts*** et telles que, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$?
Nous répondrons à cette question en cours de chapitre. Pour le moment, il est important de retenir que égalité de polynômes et égalité de fonctions ont des sens différents :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ....
Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si ....
....

II.4. Degré et coefficient dominant

Définition 13.7

Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul.
Le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$ est appelé ***degré de*** P.
Par convention, on définit le degré du polynôme nul comme égal à $-\infty$.
a_n est appelé ***coefficient dominant de*** P et $a_n X^n$ est appelé ***terme dominant de*** P.
Si $a_n = 1$, on dit que P est un ***polynôme unitaire*** ou ***normalisé***.

Ex. 13.4 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Quel est le degré de $P = (\alpha + 1)X^2 + 3$?

Cor. 13.4

Notation

On note $\deg(P)$ le degré de P.
Le coefficient dominant de P est parfois noté $\mathrm{cd}(P)$.

Remarques

- Si P n'est pas le polynôme nul, $\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$. Cette définition a un sens car $\{k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus grand élément.
- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants **non nuls**.

Théorème 13.8 (Degré d'une somme, d'un produit)

$\forall P \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X], \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(\lambda.P) = \deg P$;
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Démonstration

Ex. 13.5 Trouver deux polynômes P et Q tels que : $\deg(P+Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$

Cor. 13.5

Ex. 13.6 Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, montrer que : $PQ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\ P = 0 \ \text{ ou } \ Q = 0\ ]$.

Cor. 13.6

Remarque

Il faut bien faire la différence entre le fait qu'un polynôme s'annule (son évaluation en un scalaire est nulle) et le fait qu'un polynôme est nul (tous ses coefficients sont nuls).
Par exemple, si $(X - a)P = 0$, alors $P = 0$ bien que $X - a$ s'annule en a. Ce qui compte, c'est que $X - a$ n'est pas le polynôme nul.

II.5. $\mathbb{K}_n[X]$

Notation

$\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes ***de degré inférieur ou égal à*** n.

Ex. 13.7 $\mathbb{R}_3[X] =$ ....
Ex. 13.8 Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$P = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2)$
Que peut-on en déduire concernant la famille $(1, 1 + X, 1 + X + X^2)$?

Cor. 13.8

III. Multiples, diviseurs et racines d'un polynôme

III.1. Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 13.9 (Divisibilité)

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que B ***divise*** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
On dit aussi que B est un ***diviseur*** de A ou que A est un ***multiple*** de B.

Notation

On note $B|A$ l'assertion « B divise A ».

Ex. 13.9 Dans $\mathbb{R}[X]$, $(X + 1) \mid (X^2 - 1)$ car ....

Théorème 13.10 (Division euclidienne)

$\forall (A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$, $\exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$.

On appelle A le ***dividende***, B le ***diviseur***, Q le ***quotient*** et R le ***reste***.

Démonstration

Ex. 13.10 Effectuer la division euclidienne de A par B lorsque :

- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^2 + X - 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{C}[X]$ avec $A = X^4 + iX + 1$ et $B = iX^2 + 1$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathbb{R}[X]$ avec $A = X + 2$ et $B = X^3 + 8X + 1$.

Cor. 13.10

Corollaire 13.11

Pour $B \in \mathbb{K}[X]$ non nul, le reste de la division euclidienne de A par B est nul si et seulement si B divise A.

III.2. Racines (ou zéros) d'un polynôme

Définition 13.12

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou un **zéro**) de P (dans $\mathbb{K}$) si $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Important !

La précision ■ dans $\mathbb{K}$ ■ peut avoir de l'importance : le polynôme $X^2 + 1$ admet des racines dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

Remarque

Un polynôme à coefficients réels de degré impair admet nécessairement une racine réelle d'après le théorème des valeurs intermédiaires (voir exercice 13.11 de la feuille d'exercices).

Théorème 13.13

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)$ est le polynôme constant $\tilde{P}(\alpha)$.

En particulier : α est une racine de $P \Leftrightarrow (X - \alpha) | P$.

Démonstration

Ex. 13.11 Soit $Q = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$. Trouver les racines de Q.

Cor. 13.11

Méthode : Calculer le reste d'une division euclidienne

Pour calculer le reste de la division euclidienne de A par B avec $B \neq 0$, on écrit $A = BQ + R$ avec $R = \sum_{k=0}^{deg(B)-1} a_k X^k$. On évalue ensuite en les racines de B (si on les connaît). En effet, si a est une racine de B, alors $A(a) = R(a)$. Ceci nous permet de déterminer les coefficients de R.

Ex. 13.12 Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{10} - X^5$ par $X^2 - 3X + 2$.

Cor. 13.12

Corollaire 13.14 (Très important !)

- Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$ possède au plus n racines deux à deux distinctes.
- Tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines.
- Si deux fonctions polynomiales coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{K}$ alors les polynômes associés sont identiques.
  En particulier, ***deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si les polynômes associés sont égaux***.

Démonstration

Méthode : Pour prouver qu'un polynôme P est nul :

il suffit de prouver que P possède une infinité de racines ou que P possède $\deg(P) + 1$ racines.

Ex. 13.13 Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Montrer que P est constant.

Cor. 13.13

IV. Polynôme dérivé et racines multiples

IV.1. Dérivées d'un polynôme

La notion de polynôme dérivé est purement formelle. Elle correspond simplement à la notion de dérivation des fonctions polynomiales que nous connaissons.

Définition 13.15

Étant donné $P \in \mathbb{K}[X]$, on appelle polynôme dérivé de P le polynôme associé à la dérivée de la fonction polynomiale de P.
Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

Notation

On note P' ou $P^{(1)}$ le polynôme dérivé de P et on définit de même les polynômes dérivés successifs $P'' = P^{(2)}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$.

Proposition 13.16

Linéarité de la dérivation :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \;, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \;, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (P+Q)' & = & P' + Q' \\ & & \text{et} \\ (\lambda \cdot P)' & = & \lambda \cdot P' \end{array} \right.$$

Démonstration

Proposition 13.17

Dérivation d'un produit :
$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \;, \quad (PQ)' = P'Q + PQ'$

Proposition 13.18

Formule de Leibniz de dérivation d'un produit PQ de polynômes :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \;, \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} Q^{(k)}$$

Proposition 13.19

Formule de Taylor : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors on a :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Démonstration

IV.2. Multiplicité d'une racine

Définition 13.20

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle multiplicité de α dans P le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^n | P$.
En particulier $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Remarque

Une racine de multiplicité 0 de P ***n'est pas une racine de*** P !

Proposition 13.21

De façon évidente, α est une racine de P si et seulement si sa multiplicité dans P est supérieure à 1.

Ex. 13.14 Quelles sont les racines réelles et leur multiplicité pour le polynôme

$$P = (X^2-1)(X^3-1)$$

Cor. 13.14

IV.3. Caractérisation de la multiplicité d'une racine

Théorème 13.22

α est une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ dans $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si
$P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Démonstration

Ex. 13.15 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, 1 est racine de P avec $P = X^{2n+1}-(2n+1)X^{n+1}+(2n+1)X^n-1$ et donner sa multiplicité.

Cor. 13.15

V. Factorisation des polynômes

V.1. Polynômes scindés sur $\mathbb{K}$

Définition 13.23

Un polynôme P non nul est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur à 1.
Autrement dit, P est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$

tels que :

$$P = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n).$$

Ici les racines de P notées $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ne sont pas nécessairement distinctes.

Important !

Un polynôme peut être scindé dans $\mathbb{C}[X]$ sans l'être dans $\mathbb{R}[X]$!
Exemple : $P = X^2+1 =$..

Remarque

Autrement dit, un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il admet des racines dont la somme des ordres de multiplicité vaut n.

V.2. Relation coefficients-racines d'un polynôme scindé.

Proposition 13.24

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ***scindé*** sur $\mathbb{K}$ et $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ ses racines.

- La somme des racines de P est donnée par : $\sum_{k=1}^{n} x_k = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.
- Le produit des racines de P est donné par : $\prod_{k=1}^{n} x_k = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

Démonstration

Ex. 13.16 Déterminer P le polynôme unitaire de degré 3 dont la somme et le produit des racines valent 6, et dont la somme des coefficients est nulle.

Cor. 13.16

Remarques

- En particulier, si $P = aX^2+bX+c$ alors :
  la somme des racines vaut : $S = -\dfrac{b}{a}$.
  le produit des racines vaut : $P = \dfrac{c}{a}$.
- Inversement, soient x_1 et x_2 deux réels avec S leur somme et P leur produit.
  Alors x_1 et x_2 sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$.

Ex. 13.17 Trouver deux nombres dont la somme vaut $-\dfrac{17}{2}$ et le produit vaut 4.

Cor. 13.17

V.3. Cas particulier des racines lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Théorème 13.25 (Théorème de d'Alembert-Gauss - Admis)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 13.26

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$: $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

On a : $\sum_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.

Démonstration

Proposition 13.27

Soit P un polynôme **à coefficients réels** (donc $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$).
Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine complexe de P **alors** son conjugué $\bar{\alpha}$ est également racine de P.

Démonstration

Remarque

Attention, la proposition précédente est ***fausse*** pour $P \in \mathbb{C}[X]$!
Par exemple i est racine de $P = X - i \in \mathbb{C}[X]$ mais pas $\bar{i} = -i$.

Ex. 13.18 Soit $P = X^4 + X^3 - 10X^2 + 2X - 24$.
Vérifier que $\sqrt{2}i$ est racine de P, et en déduire toutes les racines de P.

Cor. 13.18

V.4. Polynômes irréductibles et factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$

Définition 13.28 (Polynômes irréductibles)

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible si $\deg P \geq 1$ et si les seuls diviseurs de P sont les polynômes de la forme λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et les polynômes constants (non nuls).

Ex. 13.19 Déterminer tous les diviseurs de $P = X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 13.19

Remarque

Par définition, les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Ex. 13.20

1) Factoriser $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) En déduire que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Cor. 13.20

Proposition 13.29 (Classification des polynômes irréductibles)

- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré.
- Les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes du premier degré et les polynômes du second degré à discriminant strictement négatif.

Démonstration

Factorisation des polynômes

- On a déjà vu que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré)
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, ..., r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ On a toujours : $\sum\limits_{k=0}^{r} m_k = \deg(P)$.

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. La factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k} \prod_{j=1}^{p} (X^2 - p_j X + q_j)^{l_j} \qquad \text{où}$$

  - ⋆ λ est le coefficient dominant de P (c'est à dire du terme de plus haut degré).
  - ⋆ $\forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre m_k de P.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$ les discriminants $(\Delta = p_j^2 - 4q_j)$ vérifient $\Delta < 0$.
  - ⋆ $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $l_j \in \mathbb{N}^*$ est un exposant entier.

Ex. 13.21 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$.

1) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2) Factoriser P sous forme de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Cor. 13.21

Ex. 13.22 Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on note $P = X^n - 1$.

1) Décomposer P en produits d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Cor. 13.22

Maths - Chapitre 14

Dimension des espaces vectoriels

I. Programme officiel

Espaces vectoriels et applications linéaires

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Espaces vectoriels a) Espaces et sous-espaces vectoriels	
Exemples de référence : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	
b) Familles finies de vecteurs	
Famille libre, famille liée. Toute famille de polynômes non nuls échelonnés en degrés est libre. Famille génératrice d'un espace vectoriel. Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$. Base adaptée à une somme directe. Si $(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$ est une famille libre alors $\text{Vect}(e_1, ...e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, ..., e_n)$ sont en somme directe.	Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires. Matrice colonne des coordonnées.
B-Espaces vectoriels de dimension finie a) Dimension finie	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$.	 Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi ceux d'une famille génératrice. Droite et plan vectoriels.

Si E est de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs, alors $\mathcal{F}$ est une base, si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E. Rang d'une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. Caractérisation des familles libres par leur rang.	
b) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie	
Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Cas d'égalité. Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions. Formule de Grassmann.	
C- Applications linéaires b) Isomorphismes	
Caractérisation des isomorphismes par les bases. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension. Si E et F ont même dimension, alors une application linéaire de E dans F est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, détermination d'une base.
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2.	
e) Rang d'une application linéaire	
Applications linéaires de rangs finis. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme. Théorème du rang.	$\mathrm{rg}(u \circ v) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.
f) Équations linéaires	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire	Exemples de l'ensemble des solutions d'un système linéaire et des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

Dans tout ce qui suit, $(\mathbb{K}, +, \times)$ désignera le corps des nombres réels ou des nombres complexes.

II. Rappels et compléments

II.1. Rappels

Ce chapitre poursuit et complète le chapitre 12 sur les espaces vectoriels. En conséquence, toutes les définitions et propriétés du chapitre sur les espaces vectoriels doivent être revues. Notamment, on révisera attentivement

- la caractérisation (théorème fondamental 12.5) des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$;
- les notions de somme et de somme directe de deux sous-espaces vectoriels ;
- la définition 12.13 d'une application linéaire ;
- la définition 12.19 du noyau d'une application linéaire et le théorème 12.20 énonçant les propriétés du noyau d'une application linéaire ou de l'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire ;
- la définition et la caractérisation des projections et des symétries...

II.2. Rappel : combinaisons linéaires

Définition 14.1 (Combinaisons linéaires)

Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, on dit que u est une ***combinaison linéaire des vecteurs de*** U ou une ***combinaison linéaire de*** U si

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u_i = \lambda_1.u_1 + \lambda_2.u_2 + ... + \lambda_n.u_n$$

Proposition 14.2

Étant donnée une famille $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E, ***l'ensemble des combinaisons linéaires de*** U est un sous-espace vectoriel de E appelé ***sous-espace vectoriel engendré par*** U.
On le note $\operatorname{Vect} U$.

II.3. Complément : espaces vectoriels de référence

Pour montrer que $(F, +, .)$ est un espace vectoriel, on montre la plupart du temps que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
Parmi les espaces vectoriels de référence, nous avons déjà vu :

- l'espace vectoriel des n-uplets $\mathbb{K}^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque ;
- l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$;
- l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes $\mathbb{K}^A = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$, où $A \subset \mathbb{R}$;
- l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, ou celui des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ noté $\mathbb{K}_n[X]$;

- l'espace vectoriel des matrices à $n \in \mathbb{N}^*$ lignes et $p \in \mathbb{N}^*$ colonnes et à coefficients réels ou complexes $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- l'espace vectoriel des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels E et F.

II.4. Équations linéaires

Théorème 14.3

Soient E et F deux espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soit y un vecteur de F.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des vecteurs x solution de l'équation $\phi(x) = y$ est :

- ou bien vide : $\mathcal{S} = \emptyset$;
- ou bien la somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre : $\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Ker}(\phi)$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent est le cas général d'une situation que nous avons déjà rencontrée à plusieurs reprises :

- Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, où a et b sont deux fonctions continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$: alors l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle et de la solution générale de l'équation homogène associée.
  En effet, d'une part $\phi : y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto y' + a(x)y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ est une application linéaire, d'autre part, la méthode de variation de la constante nous garantit qu'il existe toujours une solution particulière à l'équation différentielle.
- Le résultat similaire concernant les équations différentielles $y''+ay'+by = f(x)$ linéaires à coefficients constants se déduit de même du théorème précédent.
- L'ensemble des suites vérifiant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ est somme de la suite constante vérifiant la même formule de récurrence (***solution particulière constante*** !) et d'une suite géométrique de raison a (***solution générale de l'équation sans second membre*** !) : ici l'application linéaire est $\phi : u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'équation linéaire est $\phi(u) = b$ où b doit être interprétée comme la suite constante égale à b...
  $\phi(u) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n$ ce qui donne bien les suites géométriques de raison a.
- Enfin, l'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit somme d'une solution particulière de ce système et de la solution générale du système sans second membre !

Ex. 14.1 Soit u la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} & = & 3u_{n+1} - 2u_n + 1 \end{array}\right.$

1) Montrer que $\psi : u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2) Trouver une suite particulière simple vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$.
3) Déduire des deux question précédentes une formule explicite donnant u_n en fonction de n.

Cor. 14.1

Ex. 14.2 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & \left(\dfrac{x+y}{3}; \dfrac{2x+2y}{3}\right) \end{array} \right.$

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2) Nature géométrique de ϕ ?
3) Résoudre les équations $\phi(x;y) = (-2;-4)$ et $\phi(x;y) = (0;1)$.

Cor. 14.2

III. Familles finies de vecteurs

III.1. Famille libre, famille liée

Définition 14.4

On dit qu'une famille de vecteurs est ***liée*** si l'un des vecteurs de la famille est une ***combinaison linéaire des autres vecteurs***.
Dans le cas contraire on dit que la famille est ***libre***.

Proposition 14.5

Une famille de vecteurs est libre si et seulement si il existe une unique combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille.

Démonstration

Méthode

En pratique, pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est libre on écrira donc

« ***Supposons que*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ ***et montrons que*** $\forall i \in [\![1;n]\!], \lambda_i = 0$. »

et pour démontrer qu'une famille $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est liée on écrira

« ***Montrons qu'il existe des solutions*** $(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ ***non nulles à l'équation*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ »

Dans les deux cas, on résout un système : s'il existe une unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, la famille est libre, sinon la famille est liée.

Ex. 14.3 • La famille $((2;-1);(1;2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle libre ?

• La famille $(X^2+3X+1;X^2-3X+1;X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ?

Propriété 14.6

- Toute famille finie contenant le vecteur nul est liée.
- Toute famille composée d'un unique vecteur non nul est libre.
- Toute famille libre A à laquelle on adjoint un vecteur $v \notin \operatorname{Vect} A$ est libre.

Démonstration

Définition 14.7

On dit que deux vecteurs u et v sont colinéaires ou que trois vecteurs u, v et w sont coplanaires si et seulement si ils forment une famille liée.

Ex. 14.4 Montrer que $(\cos;\sin)$ est une famille libre de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,.\right)$.
Étant donnés $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ***distincts***, montrer que $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto e^{c_2 x})$ est une famille libre.
Même question pour $(x \mapsto e^{c_1 x}; x \mapsto x e^{c_1 x})$.

Cor. 14.4

III.2. Famille génératrice

Définition 14.8

On dit qu'une famille A de vecteurs de E est ***génératrice*** si $\operatorname{Vect} A = E$.

Méthode

Pour démontrer qu'une famille $A=(u_1;u_2;...;u_n)$ est génératrice on écrira donc
« ***Soit*** v ***un vecteur de*** E***, montrons qu'il existe*** $(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ ***tels que*** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = v$***.*** »
et il s'agira encore de résoudre un système d'équations linéaires.

Ex. 14.5 • La famille $((2;-1);(1;2))$ de $\mathbb{R}^2$ est-elle génératrice ?

• La famille $(X^2+3X+1;X^2-3X+1;X^2+X+1)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle génératrice ?

Propriété 14.9

- Si $(u_1; u_2; ...; u_n)$ est génératrice alors $\forall v \in E$, $(u_1; u_2; ...; u_n; v)$ est génératrice.
- Si $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est ***génératrice et liée*** alors on peut trouver une sous-famille génératrice de $n-1$ vecteurs de A.

Démonstration

III.3. Base

Définition 14.10

On dit qu'une famille A de vecteurs est ***une base*** de E si elle est ***libre et génératrice***.

Ex. 14.6 • La famille $((2; -1); (1; 2))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

. . . .

. . . .

• La famille $(X^2 + 3X + 1; X^2 - 3X + 1; X^2 + X + 1)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

. . . .

Théorème 14.11 (Unicité de la décomposition dans une base)

Si $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est une base de E alors $\forall v \in E, \exists! \, (\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Démonstration

Définition 14.12

Si $A = (u_1; u_2; ...; u_n)$ est une base de E, pour tout vecteur $v \in E$, les scalaires $(\lambda_1; ...; \lambda_n)$ tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ sont appelés ***coordonnées de*** v ***dans*** A.

Important !

Les coordonnées d'un vecteur sont ***valables dans une base*** ! Si on change un seul vecteur de la base, il ***est possible que toutes les coordonnées changent*** !

Ex. 14.7 Quelles sont les coordonnées du vecteur $v = (3; 2)$ dans la base $((1; 0); (1; 2))$ de $\mathbb{R}^2$?

. . . .

Ex. 14.8 Donner une base $\mathcal{B}$ de l'ensemble des solutions à valeurs réelles de $(E) : y'' + 2y' + 2y = 0$.
Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ est une solution de (E).
Quelles sont les coordonnées de f dans $\mathcal{B}$?

Cor. 14.8

III.4. Famille de polynômes échelonnée en degrés

Définition 14.13

On dit qu'une famille $(P_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ est ***échelonnée en degrés*** si

$$\forall i \in [\![1;p-1]\!]\,, \deg P_i < \deg P_{i+1}$$

Propriété 14.14

Toute famille de polynômes échelonnée en degrés ne contenant pas le polynôme nul est libre.

Démonstration

III.5. Bases et sommes directes

Définition 14.15 (Base adaptée à une somme directe)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,.)$ et $\mathcal{B} = (e_1; e_2; ...; e_n)$ une base de E.
On suppose de plus que $E = F \oplus G$.
On dit de $\mathcal{B}$ qu'elle est ***adaptée à cette somme directe*** si il existe $k \in [\![1;n]\!]$ tel que
$\mathcal{B}_1 = (e_1; ...; e_k)$ soit une base de F,
$\mathcal{B}_2 = (e_{k+1}; ...; e_n)$ soit une base de G.

Remarque

Il existe des bases de $F\oplus G$ qui ne sont pas adaptées à cette somme directe. Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2,+,.)$, $F = \text{Vect}((1;-1))$ et $G = \text{Vect}((1;1))$ sont supplémentaires mais la base canonique de $\mathbb{R}^2$ n'est pas adaptée à $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Ex. 14.9 Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G de la remarque précédente sont effectivement supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Cor. 14.9

Proposition 14.16 (Propriété de génération de la somme)

Soient k, n deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k < n$.
Soient $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{F} = (e_1; ...; e_k; e_{k+1}; ...; e_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

- $\mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k; e_{k+1}; ...; e_n) = \mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k) + \mathrm{Vect}\,(e_{k+1}; ...; e_n)$
- Si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{Vect}\big(\mathcal{F}\big) = \mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_k) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_{k+1}; ...; e_n)$.

Démonstration

Méthode : Somme de sous-espaces vectoriels engendrés

La première égalité du théorème précédent s'utilise dans les deux sens :

- De droite à gauche : on utilisera cette propriété pour « simplifier » certaines sommes de sous-espaces vectoriels.
  Notamment, lorsqu'on a affaire à la somme de deux sous-espaces vectoriels, il ***peut être très utile d'exprimer ces sous-espaces vectoriels comme des sous-espaces engendrés par une famille***.
- De gauche à droite : on utilisera cette propriété pour montrer qu'une base est adaptée à une somme directe ou pour décomposer un vecteur sur deux sous-espaces vectoriels.
  Notamment, en poursuivant la décomposition jusqu'au bout,
  $\mathrm{Vect}\,(e_1; ...; e_n) = \mathrm{Vect}(e_1) + ... + \mathrm{Vect}(e_n)$.

Ex. 14.10 Soient $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel,
$F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((0; 0; 1)\big)$.

1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, puis montrer qu'ils sont supplémentaires.
2) Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

Cor. 14.10

IV. Espaces vectoriels de dimension finie

IV.1. Dimension finie

Définition 14.17

On dit qu'un espace vectoriel est de ***dimension infinie*** s'il n'admet aucune famille génératrice finie.
Au contraire, s'il admet une famille génératrice finie, alors l'espace vectoriel est dit de ***dimension finie***.

Ex. 14.11 Montrer que l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Cor. 14.11

Dans tout ce qui suit $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

IV.2. Obtention d'une base à partir d'une famille génératrice

Théorème 14.18 (Théorème de la base extraite)

De toute famille génératrice finie $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E.

Démonstration

Corollaire 14.19

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie admet une base.

IV.3. Obtention d'une base à partir d'une famille libre

Théorème 14.20 (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base.

Démonstration

Remarque

La démonstration que nous venons de faire garantit un résultat légèrement plus fort que celui de l'énoncé puisque nous avons démontré :

1) que toute famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie peut être complétée en une base ;

2) que les vecteurs utilisés pour compléter la famille libre peuvent être choisis dans une famille génératrice arbitraire de E.

Méthode : Obtention d'une base à partir d'une famille libre/génératrice

Pour compléter une famille libre $\mathcal{F}$ en une base d'un espace vectoriel E de dimension finie :

- on se donne une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E (qui en possède une puisqu'il est ... .) ;
- pour chaque vecteur v de $\mathcal{G}$, on complète la famille $\mathcal{F}$ par v et on vérifie si la nouvelle famille ainsi formée est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur v.

Pour extraire une base d'une famille génératrice $\mathcal{G}$:

- on part de la famille vide $\mathcal{F}$;
- pour chaque vecteur v de $\mathcal{G}$, on complète $\mathcal{F}$ avec ce vecteur et on vérifie si la nouvelle famille est libre ou liée. Si elle est libre, on recommence avec la nouvelle famille obtenue. Si elle est liée, on rejette le vecteur v.

Ex. 14.12 Extraire de la famille $\mathcal{G} = ((1;2;3);(-1;0;1);(1;1;1);(2;1;0);(1;0;0))$ une base de $\mathbb{R}^3$.

Cor. 14.12

IV.4. Lemmes

Lemme 14.21

Soient v un vecteur, $n \in \mathbb{N}$ et $(u_1; ...; u_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs. On a l'équivalence

$$v \in \text{Vect}(u_1; ...; u_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, v - \lambda u_{n+1} \in \text{Vect}(u_1; ...; u_n)$$

Démonstration

Lemme 14.22 (Lemme fondamental)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute famille de $n+1$ vecteurs de E s'écrivant comme combinaisons linéaires de n vecteurs de E est liée.

Démonstration

IV.5. Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 14.23 (Théorème de la dimension)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$.

1) Il existe une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de E.
2) Si $\mathcal{B}' = (e'_i)_{i \in [\![1;n']\!]}$ est une autre base de E, alors $n = n'$.

Démonstration

Corollaire 14.24

Toutes les bases d'un espace vectoriel non nul (de dimension finie) ont le même nombre de vecteurs.

Définition 14.25 (Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle ***dimension de*** E

- l'entier 0 si $E = \{0_E\}$;
- le nombre de vecteurs d'une base quelconque de E sinon.

Notation

On note $\dim E$ la dimension d'un espace vectoriel.

Ex. 14.13 Quelle est la dimension des espaces vectoriels suivants :

1) le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$?
2) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}, +, .)$?
3) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, .)$?
4) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, .)$?

Cor. 14.13

Définition 14.26

On appelle ***espace vectoriel trivial*** tout espace vectoriel de dimension 0.
On appelle ***droite vectorielle*** tout espace vectoriel de dimension 1.
On appelle ***plan vectoriel*** tout espace vectoriel de dimension 2.

IV.6. Propriétés

Propriété 14.27

Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

- toute famille génératrice possède au moins n vecteurs ;
- toute famille libre possède au plus n vecteurs.

Démonstration

Propriété 14.28

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteur(s) de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{F}$ est une base de E ;
2) $\mathcal{F}$ est une famille libre ;
3) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice.

Démonstration

Ex. 14.14 On considère l'équation différentielle $(E) : x^3y' - 2y = 0$.

1) Donner l'ensemble des solutions de (E) à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Donner une base de l'ensemble des solutions définies (et dérivables) sur $\mathbb{R}$.

Cor. 14.14

IV.7. Bases canoniques

Définition 14.29 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle ***base canonique de*** $\mathbb{K}^n$ la base formée des n-uplets de la forme

$$e_i = \left(\underbrace{0; ...; 0}_{(i-1) \text{ zéros}} ; 1; \underbrace{0; ...; 0}_{(n-i) \text{ zéros}} \right).$$

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ comporte donc n vecteur(s).

Remarque

La base canonique définie ci-dessus est une base !

- ***C'est une famille génératrice*** :

  ....

- ***C'est une famille libre*** :

  ....

En conséquence, $\mathbb{K}^n$ est de dimension ..

Définition 14.30 (Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$)

On appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ la famille $(1, X, X^2, ..., X^n)$.
Il s'agit bien d'une base car :

- ....

  ....

- ....

En conséquence, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension ....

Définition 14.31 (Rappel : base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$)

On appelle base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ où pour tout $i \in [\![1;n]\!]$

et tout $j \in [\![1;p]\!]$, E_{ij} est défini par

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & j & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Il s'agit bien d'une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ car :

- ....
  ....
- ....

En conséquence, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension ....

IV.8. Rang d'une famille finie

Définition 14.32

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de ***dimension quelconque*** (finie ou infinie) et $\mathcal{F}$ une famille ***finie*** de vecteurs de E.
On appelle ***rang*** de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $\operatorname{Vect} \mathcal{F}$.

Notation

On note $\operatorname{rg} \mathcal{F}$ le rang de la famille $\mathcal{F}$.

Théorème 14.33

Une famille finie de vecteurs est libre si et seulement si son rang est égal au nombre de vecteurs qui la composent.

Démonstration

Méthode

Pour déterminer le rang d'une famille finie de vecteurs on peut utiliser l'algorithme suivant :

- ***Initialisation*** : on élimine de la famille $\mathcal{F}$ tous les vecteurs nuls et on constitue une sous-famille $\mathcal{F}'$ formée du premier vecteur restant ;

- ***Hérédité*** : pour chaque vecteur v de $\mathcal{F}$ qui n'est pas dans $\mathcal{F}'$, on vérifie si v n'appartient pas à $\operatorname{Vect}\mathcal{F}'$. Si c'est le cas, on adjoint v à $\mathcal{F}'$.
- ***Terminaison*** : on s'arrête quand tous les vecteurs de $\mathcal{F}$ ont été traités.

Ex. 14.15 Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$\vec{a} = (1,2,3,4), \vec{b} = (1,1,1,3), \vec{c} = (2,1,0,5), \vec{d} = (1,3,1,-1), \vec{e} = (2,3,0,1)$$

et $U = \operatorname{Vect}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ et $V = \operatorname{Vect}\left(\vec{d}, \vec{e}\right)$.
Quelles sont les dimensions de U, V, $U \cap V$ et $U + V$?

Cor. 14.15

V. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

V.1. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 14.34

Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$.

Démonstration

V.2. Supplémentaire d'un espace vectoriel

Proposition 14.35

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Il existe un supplémentaire G de F dans E, autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$.
2) Si F est non trivial (c'est-à-dire $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$), alors la réunion de toute base de F avec toute base d'un supplémentaire G de F dans E est une base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration

Proposition 14.36

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie si et seulement si $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim F + \dim G &= \dim E \end{cases}$

Démonstration

V.3. Formule de Grassmann

Proposition 14.37

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Démonstration

VI. Applications linéaires en dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

VI.1. Définition à l'aide d'une base de l'espace de départ

Théorème 14.38

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E et $\mathcal{F} = (v_1; v_2; ...; v_n)$ ***une famille quelconque de vecteurs de*** F, il existe ***une unique application linéaire*** ϕ telle que
$\forall k \in [\![1;n]\!], \phi(u_k) = v_k$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent signifie qu'***en dimension finie, il suffit de donner les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ pour définir entièrement une application linéaire***.

Ex. 14.16

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(-1;2)$?..
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(x;y)$?..

Corollaire 14.39

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2.

Corollaire 14.40

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\operatorname{Im} \phi$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$: $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$.

VI.2. Image d'une famille par une application linéaire

Définition 14.41 (Image d'une famille par une application linéaire)

Étant données une famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$, on appelle ***image de la famille*** $\mathcal{E}$ ***par*** f la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{E}$.
Autrement dit, l'image de la famille $\mathcal{E}$ est la famille de vecteurs de F définie par

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = (f(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$$

Notation

On note $f(\mathcal{E})$ l'image de la famille $\mathcal{E}$ par f.

Proposition 14.42 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire)

Étant donnée une application linéaire $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille génératrice de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille génératrice de*** $\operatorname{Im} f$.

Démonstration

Proposition 14.43 (Image d'une famille libre par une injection linéaire)

Étant donnée une application linéaire ***injective*** $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille libre de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille libre de*** F.

Démonstration

Proposition 14.44 (Image d'une base par un isomorphisme)

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ ***une base de*** E et $f : E \to F$ une application linéaire.
f est un ***bijective*** si et seulement si $f(\mathcal{E})$ est ***une base de*** F.

Démonstration

Corollaire 14.45

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un isomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$;
- $\dim E = \dim F$.

E et F sont alors dits isomorphes.

Démonstration

VI.3. Rang d'une application linéaire

Définition 14.46

On appelle ***rang d'une application linéaire*** entre deux espaces vectoriels de dimension finie ***la dimension de son image***.

Notation

On note : $\operatorname{rg}\phi = \dim \operatorname{Im}\phi$.

Remarque

Le rang d'une application linéaire ϕ est d'après le corollaire 14.40 le rang de la famille des images par ϕ des vecteurs d'une base de son espace de départ.

Propriété 14.47

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

Démonstration

Propriété 14.48

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Si u est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.

Si v est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Démonstration

Théorème 14.49 (Théorème du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et

$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi$$

Démonstration

Corollaire 14.50

Si ϕ est une ***forme linéaire*** non identiquement nulle alors. . . . .

VI.4. Caractérisation des isomorphismes

Théorème 14.51

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\phi \text{ injective} \Leftrightarrow \phi \text{ surjective} \Leftrightarrow \phi \text{ bijective}$$

Démonstration

Ex. 14.17 Soients $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1) Montrer que $\deg \phi(P) = \deg P$.
2) En déduire que ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) On note B_i l'image réciproque par ϕ de X^i.
   Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.
5) Montrer que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
6) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée pour $p \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.

Cor. 14.17

VI.5. Exemple : suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Nous allons démontrer le théorème 8.34 dans le cas complexe. La démonstration est similaire dans le cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à valeurs réelles.

Proposition 14.52

On obtient une formule explicite pour le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en résolvant l'équation caractéristique puis

- si $\Delta \neq 0$ en écrivant $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$ où z_1, z_2 sont les deux solutions distinctes de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ doivent être calculées de sorte à ce que $u_0 =$

$\lambda z_1^0 + \mu z_2^0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda z_1 + \mu z_2$;

- si $\Delta = 0$ en écrivant $u_n = (\lambda n + \mu) z_0^n$ où z_0 est l'unique solution double de l'équation caractéristique et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient $u_0 = (\lambda \times 0 + \mu) z_0^0 = \mu$ et $u_1 = (\lambda + \mu) z_0 = (\lambda + u_0) z_0$.

Démonstration

Continuité

I. Programme officiel

Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Limite finie ou infinie en $\pm\infty$.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} l$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle l en majorant $\lvert f(x)-l\rvert$.
Unicité de la limite. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = l$
Opérations sur les fonctions admettant une limite en a. Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes des gendarmes, théorème de la limite monotone.	
b) Continuité en un point	
Continuité de f en un point a de I. Continuité à droite, à gauche. Prolongement par continuité en un point.	
Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a.	Application aux suites récurrentes.
Opérations sur les fonctions continues.	

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
c) Continuité sur un intervalle	
Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle.	
Théorème des valeurs intermédiaires.	$\leftrightarrow I$: algorithme de recherche d'un zéro par dichotomie.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa bijection réciproque est continue, strictement monotone, de même monotonie que f.	

II. Limites de fonctions

II.1. Introduction

La notion de ***continuité d'une fonction réelle (ou complexe) de la variable réelle*** trouve une formalisation rigoureuse au XIX$^{\text{ème}}$ siècle bien qu'elle intervienne de façon souvent confuse beaucoup plus tôt dans l'histoire des mathématiques occidentales. En effet, deux caractéristiques de cette notion ont retardé sa formalisation :

- il s'agit en apparence d'une notion géométriquement très intuitive et fondamentale sur le plan logique ;
- pour cette raison, il semble difficile de la définir, c'est-à-dire de la subordonner à des notions plus fondamentales encore.

Elle ne voit le jour qu'à partir du moment où les notions de nombres réels et complexes sont bien comprises et permettent d'expliciter ce que l'intuition géométrique de continuité signifie au niveau logique.

À cause du lien logique entretenu par les notions de continuité et de nombres réels, les définitions générales sur les fonctions énoncées aux chapitres 1 et 3 ***doivent être révisées et connues***, notamment les propriétés du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$ totalement ordonné par $\leqslant$ (propriété de la borne supérieure, etc...). Les fonctions usuelles du chapitre 5 sont aussi supposées connues et nous utiliserons fréquemment les développements limités pour calculer des limites en des points où elles sont indéterminées. On rappelle par exemple la définition suivante donnée au chapitre 9 :

Définition 15.1 (Voisinages d'un réel, voisinages de $\pm\infty$)

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$).
On dit que I est ***un voisinage de*** x_0 si :

- $x_0 = +\infty$ et I est un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- $x_0 = -\infty$ et I est un intervalle de la forme $]-\infty; A]$ avec $A \in \mathbb{R}$;

- $x_0 \in \mathbb{R}$ et I est un intervalle de la forme $[x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon]$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Notation

On note $V(x_0)$ tout voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dans tout le chapitre, on notera D une partie de $\mathbb{R}$, f, g, h des applications de D dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Les applications de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sont appelées ***fonctions réelles d'une variable réelle.*** La plupart des théorèmes de ce chapitre portant sur des fonctions définies sur ***un intervalle réel***, on cherchera souvent à décomposer D en une réunion finie d'intervalles. Enfin, la notion de continuité ne prend tout son sens que lorsqu'il est possible de ***faire tendre la variable vers un point donné*** ce qui justifie l'introduction de la notion d'***intervalle réel non trivial***, c'est-à-dire comportant une infinité de points :

Définition 15.2 (Intervalle réel non trivial)

On dit qu'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est ***non trivial*** s'il est non vide et non réduit à un point. Autrement dit, si $a < b$ sont des réels, les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ sont de la forme

....

Concernant les démonstrations de ce chapitre, beaucoup sont des redites de celles faites au chapitre 8 sur les suites réelles et, conformément au programme officiel, ne seront pas faites en cours.
Ce qu'il faut comprendre et retenir de ce chapitre :

1) connaître les définitions générales concernant les limites et la continuité et être capable de donner la définition formelle d'une limite ;
2) savoir calculer des limites, notamment consolider les techniques de calcul permettant de lever une indétermination, par exemple à l'aide d'un développement limité ;
3) connaître les théorèmes concernant les limites de fonction (théorème de la limite monotone par exemple) et savoir les utiliser ;
4) notamment connaître et savoir utiliser les différentes formes du ***théorème des valeurs intermédiaires*** et du théorème caractérisant l'image d'un segment par une fonction continue.

II.2. Droite numérique achevée

Définition 15.3 (Rappel : droite numérique achevée)

On appelle ***droite numérique achevée*** l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Notation

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Définition 15.4 (Fermeture d'un intervalle)

On appelle ***fermeture*** ou ***adhérence*** d'un intervalle $I \neq \emptyset$ l'ensemble obtenu en adjoignant à I ses bornes supérieures et inférieures si elles existent, $+\infty$ ou $-\infty$ si elles n'existent pas.

Notation

On note $\bar{I}$ la fermeture de I.

Ex. 15.1
$I = [3, 7[\quad \bar{I} =$............ $\quad I =]-1, +\infty[\quad \bar{I} =$............ $\quad I = \mathbb{R} \quad \bar{I} =$................

Dans cette partie I est un intervalle réel non trivial, $a \in \bar{I}$ et f, g, h sont des éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

II.3. Définition générale de la limite d'une fonction

Définition 15.5

On dit que $f(x)$ a pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \bar{I}$ si et seulement si ***pour tout voisinage*** $V(l)$ ***il existe un voisinage*** $V(a)$ ***tel que*** $f(V(a)) \subset V(l)$.

Notation

On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Ex. 15.2 Traduire la définition précédente en utilisant les quantificateurs dans les cas suivants

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers α en $-\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si
  ....
- On dit que f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si
  ....

  Soit $a \in I$ ou $a = \sup I$ ou $a = \inf I$ si elles existent.
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers α en a si
  ....
- On dit que f tend vers $-\infty$ en a si
  ....

II.4. Limites à droite, limites à gauche en $a \in \mathbb{R}$

Définition 15.6

- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne inférieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^+ (ou à droite de a ou quand x tend vers a par valeurs supérieures) si
  ....

- On suppose que a appartient à la réunion de I et de sa borne supérieure si elle existe. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f ***tend vers*** α ***en*** a^- (ou à gauche de a ou quand x tend vers a par valeurs inférieures) si

  ....

Définition 15.7

On dit qu'une fonction f définie sur $I \backslash \{a\}$ possède une limite en a si

- elle possède une limite ***à droite*** et une limite ***à gauche*** en a ;
- ces deux limites sont égales.

Notation

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$ la limite à droite et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \alpha$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \alpha$ la limite à gauche.
On note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \alpha$ ou plus simplement $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ la limite en a d'une fonction définie sur un voisinage de a privé de a.

Ex. 15.3

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

....
....
....

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

....
....
....

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

....
....
....

II.5. Propriétés

Propriété 15.8

Si f admet une limite finie en $a \in \overline{I}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 15.9

La limite (finie ou infinie) d'une fonction est unique si elle existe.

De plus pour $a \in I$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \alpha \end{cases}$

Propriété 15.10

$\forall a \in I, \forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}, \lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \alpha$

II.6. Limites et suites

Théorème 15.11

Soient $a \in \bar{I}$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, u une suite d'éléments de I.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lim\limits_{n \to +\infty} u_n & = & a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & = & \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \alpha$$

II.7. Interprétation graphique

Proposition 15.12 (Asymptote verticale)

Pour $a \in \mathbb{R} \cap \bar{I}$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale au graphe de f.

Proposition 15.13 (Asymptote horizontale)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha$ alors la droite d'équation $y = \alpha$ est asymptote horizontale au graphe de f.

Proposition 15.14 (Asymptote oblique)

S'il existe $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ux + v) = 0$ alors la droite d'équation $y = ux + v$ est asymptote oblique au graphe de f.
Le signe de $f(x) - (ux + v)$ permet alors de connaître la position de cette droite par rapport au graphe de f.

II.8. Opérations sur les limites

Proposition 15.15 (Somme de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

Proposition 15.16 (Produit de fonctions)

$a \in \bar{I}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$	$\alpha \in \mathbb{R}_-^*$	$\alpha = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha' \in \mathbb{R}_+^*$					
$\alpha' \in \mathbb{R}_-^*$					
$\alpha' = 0$					
$+\infty$					
$-\infty$					

Proposition 15.17 (Inverse d'une fonction)

$a \in \bar{I}$.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\alpha}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, alors il existe un voisinage $V(a)$ sur lequel f ne s'annule pas et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ sur $V(a)\setminus\{a\}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $f(x) < 0$ sur $V(a)\setminus\{a\}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition 15.18 (Composition de limites)

f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in \overline{\mathbb{R}}^3$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x) = c$

Ex. 15.4

$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ possède-t-elle une limite en 0^+ ? en 0^- ? en 0 ?

Cor. 15.4

III. Limites et relation d'ordre

III.1. Passage à la limite dans une inégalité

Théorème 15.19

$a \in \bar{I}$, α et $\alpha' \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \\ \text{et si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = \alpha' \end{array}\right. \quad \text{alors } \alpha \leq \alpha'.$$

III.2. Théorème(s) des gendarmes

Théorème 15.20 (Théorème des gendarmes)

$a \in \bar{I}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\left\{\begin{array}{l}\text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \text{et si } \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \alpha\end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \alpha$.

Théorème 15.21

$\left\{\begin{array}{l}\text{Si pour tout } x \text{ au voisinage de } a \text{ on a } |f(x)| \leq g(x) \\ \text{et si } \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0\end{array}\right.$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Théorème 15.22

Si pour tout x au voisinage de a on a $f(x) \leq g(x)$ et

- si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
- si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

III.3. Limites aux bornes pour une application monotone

Théorème 15.23 (Théorème de la limite monotone)

$(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Si f est ***définie et croissante*** sur $]a, b[$,
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
- si f est minorée, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf f$.

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$;
- si f est majorée, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup f$.

Si f est ***définie et décroissante*** sur $]a, b[$,
alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

De même $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ existe et vaut :

- si f .... ;
- si f ....

IV. Continuité en un point

IV.1. Définition

Définition 15.24

On dit que f ***est continue en*** $a \in I$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)$.

En revenant à la définition de la limite en un point, on a donc :

f continue en a si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.

Si f n'est pas continue en a, on dit que f est ***discontinue en*** a.

IV.2. Continuité à droite et à gauche

Définition 15.25

Si a n'est pas l'extrémité gauche de I, on dit que f est ***continue à gauche en*** a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
Si a n'est pas l'extrémité droite de I, on dit que f est ***continue à droite en*** a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Théorème 15.26

Si a n'est pas une extrémité de I,
f continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

IV.3. Prolongement par continuité

Définition 15.27

Soit a une extrémité de l'intervalle I n'appartenant pas à I.
Autrement dit, on considère une fonction f définie sur un intervalle ***ouvert*** en son extrémité a.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, on dit que f ***est prolongeable par continuité en*** a

et on pose : $g : \begin{cases} I \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x \in I & \mapsto & g(x) = f(x) \\ a & \mapsto & g(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \end{cases}$

g est appelée ***prolongement par continuité de*** f ***en*** a.

Ex. 15.5 Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{\sin x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

Cor. 15.5

IV.4. Opérations sur les fonctions continues en un point

Proposition 15.28

Si f et g sont des fonctions continues en a et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

- $f + g$ est continue en a ;
- fg est continue en a ;
- αf est continue en a ;
- $|f|$ est continue en a ;
- $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues en a ;
- si $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas et $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ et si $g \circ f$ est définie sur un voisinage de a alors

$g \circ f$ est continue en a.

IV.5. Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a

Théorème 15.29

Si f est continue en $a \in I$ alors l'image de toute suite de $I^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a est une suite convergeant vers $f(a)$.

V. Continuité sur un intervalle

V.1. Définition

Définition 15.30

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Notation

On note $\mathcal{C}^0(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont continues sur I.

V.2. Propriétés

Proposition 15.31

Si f et g sont des fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a :

- ***Combinaison linéaire*** : $\alpha f + \beta g$ est continue sur I ;
- ***Produit*** : fg est continue sur I ;
- ***Quotient*** : si f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I ;
- ***Valeur absolue*** : $|f|$ est continue sur I ;
- ***Max et min*** : $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont continues sur I.

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, $g \in \mathcal{C}^0(J)$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(I)$.

Exemples :

- Les applications constantes sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$;
- les applications rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition ;
- les applications usuelles (ln,exp,sin,cos,$x \mapsto x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque

Dans la pratique, pour démontrer la continuité d'une fonction, on utilise les théorèmes opératoires. Les cas où un retour à la définition de la continuité et de la limite sont nécessaires sont rares et sont considérés comme difficiles.

V.3. Restrictions

Définition 15.32

Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $J \subset I$, on dit que f est continue sur J si la restriction de f à J est continue.

Ex. 15.6 Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto \frac{x}{|x|} \\ x = 0 & \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur $[0; +\infty[$ mais pas en 0.

Cor. 15.6

VI. Théorèmes des valeurs intermédiaires

Théorème 15.33 (Théorème de Bolzano)

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors $\exists c \in [a; b], f(c) = 0$.

Démonstration

Remarque

Si l'on impose $f(a)f(b) < 0$, on peut conclure que $c \in]a; b[$ puisque $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$.

Méthode : Utilisation du TVI

Dans les exercices où on cherche à montrer qu'une fonction f ***continue*** vérifie une propriété de la forme

$$\exists c \in I, f(c) = cte$$

on introduira une fonction auxiliaire $g : x \mapsto f(x) - cte$ et on montrera que g s'annule.

Ex. 15.7 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

1) Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.
2) Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{3}\right) = f(c)$.
3) Montrer que quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\exists c \in [0; 1], f\left(c + \frac{1}{p}\right) = f(c)$.

Théorème 15.34 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction continue sur I, a et b deux éléments de I tels que $f(a) < f(b)$, alors $\forall y \in]f(a); f(b)[, \exists x \in]a; b[, f(x) = y$.

Démonstration

Théorème 15.35 (Image continue d'un intervalle)

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$, alors $f(I)$ est un intervalle.

Démonstration

Ex. 15.8 Soit $I =]0;2[$. Calculer $f(I)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$;
2) $f : x \mapsto \sin(\pi x)$;
3) $f : x \mapsto (x-1)^2$;
4) $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.

Que peut-on en conclure sur l'image par une fonction continue d'un intervalle de type ouvert/ouvert ?

VII. Fonctions continues sur un segment

Théorème 15.36 (Image continue d'un segment)

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [m;M]$ où $m, M \in \mathbb{R}$.

Démonstration hors programme

Corollaire 15.37

Toute application continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes :

- $\exists x_0 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_0) = m \leq f(x)$
- $\exists x_1 \in [a;b], \forall x \in [a;b], f(x_1) = M \geq f(x)$

Théorème 15.38

Soit f une fonction continue sur I.
f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration

Théorème 15.39 (Théorème de la bijection continue)

Si f est injective et continue alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur J, strictement monotone, de même monotonie que f.

Démonstration

Remarque

Ce théorème a permis de construire les fonctions Arcsin, Arccos, etc...

Corollaire 15.40

Si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a;b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ alors $\exists! c \in]a;b[, f(c) = 0$.

Maths - Chapitre 16

Ensembles, applications et dénombrement

I. Programme officiel

Dénombrement

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notation Card A, $\|A\|$ ou $\#A$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.	
Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque de deux parties, complémentaire, produit cartésien.	La formule du crible est hors-programme.
Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis, cardinal de l'ensemble des parties.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n. Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.	
Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme de Newton.

Raisonnement et vocabulaire ensembliste

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
b) Ensembles	
Ensemble des parties d'un ensemble.	
c) Relations d'équivalence	
Fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$.
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme.

II. Ensembles et applications

II.1. Rappel

Cardinal d'un ensemble fini

Le nombre d'élément(s) d'un ensemble E fini est appelé ***cardinal de*** E.
C'est l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe des bijections $e : E \to [\![1; n]\!]$.
Chacune de ces bijections représente ***un ordre possible*** pour le dénombrement des éléments de E : c'est une ***numérotation de ces éléments***.
Le cardinal de E est noté $\operatorname{Card} E$ ou $|E|$ ou encore $\#E$.
On a $\operatorname{Card} \emptyset = 0$.

Ex. 16.1 Soit E l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$ et dont les coefficients valent 0 ou 1.
Calculer $\operatorname{Card} E$.

Cor. 16.1

II.2. Ensemble des parties d'un ensemble

Notation

Étant donné un ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
Autrement dit $\mathcal{P}(E) = \{K, K \subset E\}$.
Notamment $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ***possède un élément***
et $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset; \{a\}\}$ ***possède deux éléments***.

Remarque

Pour écrire que A est une partie d'un ensemble E on peut écrire
$A \subset E$: A **est inclus dans** E

ou

$A \in \mathcal{P}(E)$: A **appartient aux parties de** E

Ex. 16.2 Soit $E = \{a; b; c\}$. Que vaut $\mathcal{P}(E)$?

Cor. 16.2

II.3. Image directe, image réciproque d'une partie

Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une application.

Définition 16.1 (Image directe)

Pour une partie A de E, on appelle **image directe de** A **par** u le sous-ensemble de F défini par $\{u(x), x \in A\} = \{y \in F, \exists x \in A, u(x) = y\}$

Autrement dit, c'est **l'ensemble des images par** u **des éléments de** A.

Notation

On note $u(A)$ l'image directe de A par u.

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u(\emptyset) = \emptyset$
- Si $A = E$, on obtient $u(E) = \operatorname{Im} u$ l'ensemble image de u.

Important !

Ne pas confondre l'ensemble image $u(E) = \operatorname{Im} u$ et l'ensemble d'arrivée F d'une application.

En effet $u(E) = F \Leftrightarrow$ ....

Ex. 16.3 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$. Que valent $f(\{b, c\})$ et $f(E)$?

Cor. 16.3

Définition 16.2 (Image réciproque)

Si B est une partie de F, on appelle **image réciproque de** B **par** u le sous-ensemble de E défini par $\{x \in E, u(x) \in B\}$

Autrement dit, c'est **l'ensemble de tous les antécédents des éléments de** B.

Notation

On note $u^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par u.

Important !

Cette notation prête à confusion puisque $u^{-1}(B)$ est toujours défini tandis que u^{-1}, bijection réciproque de u, n'est définie que si ....

Remarque

Avec les notations précédentes :

- $u^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $u^{-1}(F) = E$

Ex. 16.4 Soient $E = \{a; b; c\}$, $F = \{r; s; t\}$ et $f : E \to F$ définie par $f(a) = r$, $f(b) = t$ et $f(c) = t$. Que valent $f^{-1}(\{r\})$, $f^{-1}(\{s\})$ et $f^{-1}(\{t\})$.

Cor. 16.4

II.4. Fonction indicatrice

Définition 16.3 (Fonction indicatrice d'une partie)

Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle ***fonction indicatrice de la partie*** A ***de*** E l'application

$$\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \to & \{0;1\} \\ x \in A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ x \notin A & \mapsto & \mathbb{1}_A(x) = 0 \end{cases}$$

Propriété 16.4

Étant donné un ensemble E et deux parties A et B de E, on a

1) $\mathbb{1}_E$ est l'application constante égale à 1.
2) $\mathbb{1}_\emptyset$ est l'application constante égale à 0.
3) $\forall x \in E, 0 \leqslant \mathbb{1}_A(x) \leqslant 1$.
4) $A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$
5) $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$
6) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
7) $\mathbb{1}_{A\cup B} + \mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
8) $\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
9) L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0;1\}) \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{cases}$ est bijective.

Démonstration

II.5. Partition, relation d'équivalence

Définition 16.5 (Partition d'un ensemble)

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille de parties de E.
On dit que cette famille forme ***une partition de*** E ***si***

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E \quad \text{et} \quad \forall i \neq j \in [\![1;p]\!], A_i \bigcap A_j = \emptyset$$

Définition 16.6 (Relation d'équivalence sur un ensemble)

Étant donné un ensemble E, on dit d'une relation $\asymp$: $\begin{cases} E\times E & \rightarrow & \{\,\mathrm{VRAI}\,;\,\mathrm{FAUX}\,\} \\ (x;y) & \mapsto & x\asymp y \end{cases}$ que c'est une ***relation d'équivalence*** si elle est

- ***réflexive*** : $\forall x\in E, x\asymp x$ (est vrai) ;
- ***symétrique*** : $\forall (x;y)\in E^2, x\asymp y \Rightarrow y\asymp x$;
- ***transitive*** : $\forall (x;y;z)\in E^3, (x\asymp y\,\textbf{et}\,y\asymp z) \Rightarrow x\asymp z$.

Ex. 16.5 Nous connaissons déjà de nombreuses relations d'équivalences. L'égalité (de réels, de complexes, d'ensembles, d'applications, etc...) en est toujours une.
En citer d'autres.

Cor. 16.5

Définition 16.7 (Classes d'équivalence)

Étant donnés un ensemble E, une relation d'équivalence $\asymp$ sur E et un élément x de E, on appelle ***classe d'équivalence de*** x l'ensemble $\{y\in E, y\asymp x\}$.

Notation

On note souvent $\dot{x} = \{y\in E, y\asymp x\}$ la classe d'équivalence de x.

Proposition 16.8

L'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E forme une partition de E.

Démonstration

III. Cardinal d'une partie d'un ensemble

III.1. Cardinal et fonction indicatrice d'une partie

Lemme 16.9

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

$$\text{Card}\, A = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

Conformément au programme officiel, cette propriété, très intuitive, est admise sans démonstration.

III.2. Cardinal d'une partie

Proposition 16.10

Si E est un ensemble fini et $A \subset E$ alors

$$\text{Card}\, A \leqslant \text{Card}\, E \qquad \text{et} \qquad \text{Card}\, A = \text{Card}\, E \Leftrightarrow A = E$$

Démonstration

III.3. Opérations sur les cardinaux

Proposition 16.11

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}(A \cap B)$$

En particulier,
$\text{Card}(A \cup B) \leqslant \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
et $\text{Card}\, \overline{A} = \text{Card}\, E - \text{Card}\, A$.

Démonstration

Proposition 16.12

Si $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est une partition d'un ensemble E fini, alors

$$\text{Card}\, E = \sum_{i=1}^{p} \text{Card}\, A_i$$

Démonstration

Proposition 16.13

Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}\, E \times \text{Card}\, F$.

Démonstration

Corollaire 16.14

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Card}(E^p) = (\operatorname{Card} E)^p$.

III.4. Principe additif, principe multiplicatif

Méthode

Le ***principe additif*** de dénombrement est l'utilisation des formules 16.11 et 16.12 aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles vérifiant ***une ou plusieurs propriétés données*** : choisir les éléments vérifiant une première propriété **ou** une seconde propriété **ou**...
Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***diagrammes de Venn*** (cf. chapitre 1 section III.7.).

Le ***principe multiplicatif*** de dénombrement est l'utilisation de la propriété 16.13 et de son corollaire aux problèmes de dénombrement. Il s'utilise lorsque l'on cherche à dénombrer des ensembles résultant ***de choix successifs*** : on choisit un premier élément PUIS un deuxième élément PUIS...
Graphiquement, on représente ces problèmes par des ***arbres de choix***.

Ex. 16.6 Combien y a-t-il de mots possibles formés avec 2 lettres de l'alphabet ?
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres commençant par la lettre `a` ou se terminant par la lettre `z`.
Combien y a-t-il de mots de 2 lettres distinctes ?

Cor. 16.6

IV. Cardinal et applications entre ensembles finis

IV.1. Applications entre ensembles finis

Théorème 16.15 (Cardinal et applications)

Soient E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

- $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} f(E)$ et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E) \Leftrightarrow f$ est injective.
- Si f est surjective, alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est injective, alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.
- Si f est bijective, alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.

Démonstration

Théorème 16.16 (Applications entre ensembles de même cardinal)

Soient E et F deux ensembles ***finis***, $f \in \mathcal{F}(E, F)$. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors
$(f$ injective$) \Leftrightarrow (f$ surjective$) \Leftrightarrow (f$ bijective$)$.

Démonstration

Important !

Ce théorème est faux si E et F n'ont pas le même cardinal ou s'ils sont infinis.

Méthode

Le théorème 16.15 s'utilise de la façon suivante : pour dénombrer un ensemble fini, on peut montrer qu'il existe une ***bijection*** entre cet ensemble et un ensemble dont on connaît le nombre d'éléments.
En pratique, on ne justifie pas qu'il s'agit effectivement d'une bijection et on rédige simplement par
« ***Il y a autant de...*** »

Ex. 16.7 Combien un n-gone (c'est-à-dire un polygone à n côtés) convexe (c'est-à-dire sans angle « rentrant ») possède-t-il de diagonales ?

Cor. 16.7

IV.2. Corollaire : principe des tiroirs ou principe de Dirichlet

Méthode

On appelle ***principe des tiroirs ou principe de Dirichlet*** le principe selon lequel
« Si on range n objets dans p tiroirs avec $n > p$, alors il y a au moins un tiroir contenant deux objets ou plus. »
Ce principe est la contraposée du théorème 16.15 :
E et F deux ensembles finis, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, si $\operatorname{Card} E > \operatorname{Card} F$ alors f n'est pas injective.
En pratique, dans des exercices aux énoncés similaires, on démontrera la contraposée de

l'énoncé.

Ex. 16.8 Montrer que dans un groupe de 25 personnes, il en existe au moins 3 qui sont nées le même mois.

Cor. 16.8

IV.3. Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Théorème 16.17

Si E et F sont deux ensembles finis non vides, alors $\mathcal{F}(E,F)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}\mathcal{F}(E,F) = \operatorname{Card} F^{\operatorname{Card} E}$$

Démonstration

Remarque

C'est la raison pour laquelle $\mathcal{F}(E,F)$ est aussi noté F^E.

IV.4. Cardinal de l'ensemble des parties

Théorème 16.18

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et son cardinal vaut

$$\operatorname{Card}\mathcal{P}(E) = 2^n$$

Démonstration

V. Listes

V.1. p-listes d'éléments distincts d'un ensemble

Définition 16.19

Soit E un ensemble et p un entier.
p-liste d'éléments de E, ***p-uplet d'éléments de*** E et ***famille de*** p ***éléments de*** E sont des synonymes.
On appelle ***p-liste d'éléments distincts*** de E tout p-uplet $(x_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ de E vérifiant $\forall(i;j)\in[\![1;n]\!]^2, i\neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$.

Théorème 16.20

Le nombre de p-listes d'éléments distincts d'un ensemble E de cardinal n vaut

$$A_n^p = 0 \text{ si } p > n \qquad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ si } p \leq n$$

Démonstration

V.2. Nombre d'injections entre deux ensembles finis

Théorème 16.21

Soient E et F deux ensembles finis non vides. On note $n = \operatorname{Card} E > 0$ et $p = \operatorname{Card} F > 0$. Alors le nombre d'injections de $F \to E$ est A_n^p.

Démonstration

V.3. Nombre de bijections entre deux ensembles finis

Théorème 16.22

Soient E et F deux ensembles non vides finis de même cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de bijections de E dans F vaut $A_n^n = n!$

Démonstration

Définition 16.23

Dans le cas particulier où $E = F$, les bijections sont appelées ***permutations*** de E. Le nombre de permutations d'une ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est donc $n!$.

Notation

L'ensemble des permutations d'un ensemble fini E est noté $\mathfrak{S}(E)$.
L'ensemble des permutations de $[\![1; n]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est noté $\mathfrak{S}_n$.
Les permutations d'un ensemble fini se notent de la façon suivante : on écrit sur une ligne les éléments de E, et sous chaque élément, son image.

Ex. 16.9 Soient l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ et la permutation $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
Calculer $\phi \circ \phi(a)$, $\phi \circ \phi(b)$, $\phi \circ \phi(c)$. Que vaut $\phi \circ \phi$?

Cor. 16.9

VI. Combinaisons

VI.1. Définition

Définition 16.24

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
On appelle ***combinaison*** de E tout sous-ensemble de E.
De même, on appelle ***combinaison de*** p ***éléments*** de E tout sous-ensemble de E de cardinal p.

VI.2. Expression du nombre de combinaisons

Proposition 16.25

Pour $\operatorname{Card} E = n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0; n]\!]$, il y a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

combinaisons de p éléments de E.

Démonstration

Propriété 16.26

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [\![1; n]\!], \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Corollaire 16.27

$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$: démonstration combinatoire.

Démonstration

Ex. 16.10 On appelle ***partition d'un entier*** n ***strictement positif*** toute écriture de n comme somme d'entiers strictement positifs.
Par exemple, il y a quatre partitions de 3 qui sont : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$.
Ou encore, il y a huit partitions de 4 qui sont : $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+3 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$.
Montrer qu'il y a 2^{n-1} partitions de $n \in \mathbb{N}^*$.

Cor. 16.10

Ex. 16.11 Dénombrement des mains de poker
Dénombrer l'ensemble de toutes les mains de 5 cartes choisies parmi 52, l'ensemble des mains comportant une unique paire, comportant deux paires, comportant un brelan, etc...

Maths - Chapitre 17

Dérivabilité

I. Programme officiel

Dérivabilité

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
B - Dérivabilité a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	$\rightleftharpoons$ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité.	
Dérivabilité à gauche, à droite.	
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Propriétés des fonctions dérivables	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométriques et cinématiques.
Inégalité des accroissements finis.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à ce stade ; elle n'appelle aucun développement supplémentaire. Application aux suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes.	
Théorème de la limite de la dérivée.	
c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Définition et opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.	
Formule de Leibniz.	

II. Dérivabilité en un point

II.1. Introduction

Ce chapitre a de multiples objectifs :

- faire une synthèse sur la construction de la notion de dérivée et l'obtention de ses propriétés opératoires notamment : nous démontrerons les différentes formules (somme, produit, composée, etc.) pour calculer une dérivée en un point puis nous en tirerons les conséquences concernant les fonctions dérivables sur un intervalle ;
- établir un lien entre la notion de dérivée qui est à priori locale (valable au voisinage d'un point) et d'autres notions (croissance d'une fonction, etc...) qui sont des notions globales (valables sur un intervalle) : c'est par exemple le cas du théorème donnant le sens de variation d'une fonction lorsque sa dérivée est de signe constant sur un intervalle ;
- faire une synthèse des différents outils du programme de classes préparatoires permettant l'étude des ***suites récurrentes*** : nous verrons en effet qu'on peut déduire de la continuité et/ou dérivabilité d'une fonction f des conséquences concernant le comportement d'une suite récurrente vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$.

Par commodité, on utilisera la notation suivante.

Définition 17.1 (Intérieur d'un intervalle)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$. ***L'intérieur*** de I est l'intervalle obtenu en privant I de ses bornes. On note $\mathring{I}$ l'intérieur de I. Un point est dit ***intérieur à*** I si c'est un point de $\mathring{I}$.

Ex. 17.1 Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour $I = [a, b]$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$ ou encore $I =]a, b[$, on a toujours .... Pour $I = [a, +\infty[$ on a ....

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes. On désigne par I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire contenant une infinité de points.
De plus on notera $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

II.2. Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 17.2

On appelle ***taux d'accroissement*** ou ***taux de variation*** de f en $a \in I$ la fonction

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{lcl} I \backslash \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

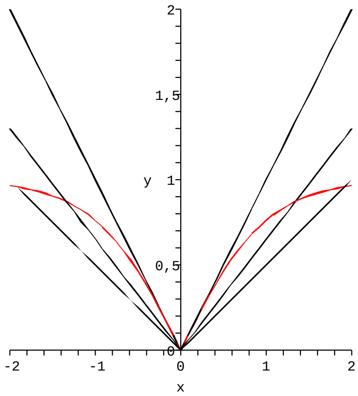
Géométriquement, le taux d'accroissement représente la pente de la droite passant par les points $A(a; f(a))$ et $M(x; f(x))$.

Définition 17.3 (Nombre dérivé)

On dit que f est dérivable en a si τ_a possède une limite finie lorsque x tend vers a. La limite est alors appelée ***nombre dérivé*** de f en a.

On dit que f est dérivable à gauche en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x < a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à gauche*** de f en a.

On dit que f est dérivable à droite en a si τ possède une limite finie lorsque x tend vers a, $x > a$. La limite est alors appelée ***nombre dérivé à droite*** de f en a.



Notation

On note $f'(a)$ le nombre dérivé, $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les nombres dérivés à gauche et à droite.

Proposition 17.4

$$f \text{ est dérivable en } a \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \end{array} \right. \quad \textbf{et } f'_g(a) = f'_d(a)$$

II.3. Nombre dérivé, développement limité et tangente

Théorème 17.5

f est dérivable en a si et seulement si ***au voisinage de*** $x \to a$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 9 proposition 9.13.

Corollaire 17.6

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$ si f est dérivable en a ;

$x = a$ si le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en a.

Remarque

Interprétation cinématique

Dans le cas où la variable représente le temps, le taux d'accroissement représente une ***vitesse moyenne***. La dérivée s'interprète alors comme une ***vitesse instantanée***.

Théorème 17.7 (Dérivable implique continue)

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Important ! Continue n'implique pas dérivable

La réciproque est fausse. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Si $x < 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut $\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$. Si $x > 0$, le taux d'accroissement entre 0 et x vaut 1. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$. Ces limites étant différentes, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Ex. 17.2 Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$.

Cor. 17.2

II.4. Théorèmes opératoires

Proposition 17.8 (Opérations pour la dérivée en un point)

Soit f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en un point a de I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$
- Le produit fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a avec $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration

Proposition 17.9 (Composition de fonctions dérivables en un point)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux applications et a un point de I. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.

Démonstration

Remarque

La démonstration qui consisterait à écrire que pour $x \neq a$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\left(\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x)-f(a)}\right)$$

puis à dire que la première parenthèse tend vers $f'(a)$ et la deuxième vers $g'(f(a))$ est naturelle, mais fausse. Il est possible que $f(x) - f(a)$ s'annule sur tout voisinage de a pour des valeurs différentes de a. Par exemple, $f : x \to x^2 \sin \frac{1}{x}$ s'annule une infinité de fois sur tout voisinage de 0. La fonction auxiliaire ψ évite ce problème.

Théorème 17.10 (Dérivée de la bijection réciproque en un point)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue, b un point de J et $a = f^{-1}(b)$. On suppose f dérivable en a. Alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en b si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Démonstration

II.5. Sens de variation et dérivée

Proposition 17.11 (Croissante implique dérivée positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et a un point de I.

- Si f est dérivable à gauche en a, on a $f'_g(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable à droite en a, on a $f'_d(a) \geqslant 0$.
- Si f est dérivable en a, on a $f'(a) \geqslant 0$.

Démonstration

Définition 17.12 (Point anguleux)

Si f est dérivable à gauche et à droite en a avec $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, le point $A(a, f(a))$ s'appelle un ***point anguleux***.

Remarque

En un point anguleux $A(a, f(a))$, on définit
une demi-tangente à gauche d'équation $y = f(a) + f'_g(a) \times (x-a)$ et
une demi-tangente à droite d'équation $y = f(a) + f'_d(a) \times (x-a)$.

III. Dérivabilité sur un intervalle

Dans tout ce qui suit I et J sont des intervalles réels.

III.1. Définitions

Définition 17.13 (Fonction dérivée)

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
La fonction $\begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$ est alors appelée ***fonction dérivée*** ou plus simplement ***dérivée*** de f.

Notation

Elle est noté f' (notation de Newton) ou encore $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (notation de Leibniz).

Ex. 17.3

- Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^n$ a pour dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

- Par définition (voir chapitre sur les fonctions usuelles) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{\mathrm{d}\left(\ln|x|\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$
- Nous avons aussi démontré dans le chapitre sur les fonctions usuelles
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x), \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$
  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{\mathrm{d}\left(a^x\right)}{\mathrm{d}x} =$ .... et $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{\mathrm{d}\left(x^r\right)}{\mathrm{d}x} =$ ....
  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$ et
  $\forall x \neq \frac{\pi}{2}[\pi], \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- Dérivées des bijections réciproques des fonctions trigonométriques :
  ....
  ....
  ....

Définition 17.14

Si f est une fonction dérivable sur I ***et que*** f' ***est continue sur*** I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition 17.15

Si f est dérivable, et si sa dérivée est elle aussi ***dérivable de dérivée continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et $f'' = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ la dérivée de f'.

Définition 17.16

De même, si f est $n \in \mathbb{N}$ fois dérivable sur I ***de dérivée n-ième continue sur*** I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ la dérivée n-ième de f.
On retrouve notamment pour $n = 0$ les fonctions $\mathcal{C}^0$ sur I c'est-à-dire continue sur I.

Définition 17.17

Enfin, si f est indéfiniment dérivable sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Notation

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Ex. 17.4 Si f est dérivable et si elle est paire ou impaire, sa dérivée f' a-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

Cor. 17.4

Ex. 17.5 Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est-elle aussi bornée ? Justifier.

Cor. 17.5

III.2. Théorèmes opératoires

Proposition 17.18 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soit f et g deux fonctions dérivables sur I.

- Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$
- Le produit fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si g ne s'annule pas sur I, l'inverse $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
- Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration

Proposition 17.19 (Composition)

Si $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{K}$ sont deux fonctions dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.

Démonstration

Théorème 17.20 (Bijection réciproque)

Soit $f : I \to J$ une application bijective et dérivable. L'application f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I ; de plus $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

Remarque

On peut retrouver cette formule en écrivant $f \circ f^{-1} = Id_J$ puis en dérivant comme une composée. On obtient en effet $(f^{-1})' \cdot (f' \circ f^{-1}) = 1$.
Une autre façon de retenir cette formule sans effort est d'utiliser la notation de Leibniz : on pose $y = f(x)$ donc $x = f^{-1}(y)$ et on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Ex. 17.6 Si $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont n fonctions dérivables sur I avec $n \geqslant 1$, que vaut la dérivée du produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i = u_1 u_2 \dots u_n$?

Cor. 17.6

Ex. 17.7 Calculer la dérivée, sur un ensemble à préciser, de $f : x \mapsto x^x$.

Cor. 17.7

Ex. 17.8 Existe-t-il des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$?

Cor. 17.8

III.3. Théorèmes opératoires pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$

Proposition 17.21 (Combinaison linéaire)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Pour tous α et β éléments de $\mathbb{K}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Démonstration

Proposition 17.22 (Produit, formule de Leibniz)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. La fonction fg est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) f^{(k)} g^{(n-k)} \qquad \text{(formule de Leibniz)}$$

Démonstration

Proposition 17.23 (Quotient)

Soit n un entier naturel. Soit $f, g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec g qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Démonstration

Proposition 17.24 (Composition)

Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux fonctions. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Théorème 17.25 (Bijection réciproque)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to J$ une application bijective de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. L'application f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Les démonstrations de la proposition 17.24 et du théorème 17.25 sont hors-programme.

Remarque

- Il est immédiat que ces théorèmes se généralisent aux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Les fonctions de référence vues au chapitre 5 sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité. ***Attention cependant*** : leur ensemble de dérivabilité n'est pas toujours leur ensemble de définition. Par exemple, ...
....
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $\sin^{(k)}(x) =$ .... et $\cos^{(k)}(x) =$ ....

Ces deux dernières formules se démontrent aisément en écrivant :
$\dfrac{\mathrm{d}^k e^{ix}}{\mathrm{d}x^k} = \cos^{(k)}(x) + i\sin^{(k)}(x)$ ....

Ex. 17.9 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 - x + 1)e^{-x} \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}$.

Cor. 17.9

IV. Éléments de calcul différentiel pour les fonctions à valeurs réelles

Dans cette section, on note $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec $a < b$ et les fonctions envisagées sont ***à valeurs réelles***. Le but de cette section est de démontrer des propriétés énoncées (sans démonstration) au chapitre 3 et d'énoncer en les démontrant des théorèmes généraux valables pour les fonctions définies sur I, dérivables sur $\overset{o}{I}$ et ***à valeurs réelles***. Nous verrons ultérieurement comment ces résultats peuvent être (ou non) étendus aux fonctions à valeurs complexes.

IV.1. Extremums

Définition 17.26 (Extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et a un point de I.

- On dit que f admet un ***minimum local*** m en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que m soit le minimum de f restreinte à $I \cap V(a)$.
- On dit que f admet un ***maximum local*** M en a s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que M soit le maximum de f restreinte à $I \cap V(a)$.

Proposition 17.27 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point a intérieur à I. Si $f(a)$ est un extremum local de f, alors $f'(a) = 0$ (la réciproque est fausse).

Démonstration

Remarque

- Si a est une borne de I, on peut avoir un extremum pour f en a et $f'(a) \neq 0$. Par exemple, $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ admet $f(1) = 1$ comme maximum et pourtant $f'(1) = 2$.
- La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est dérivable, $f'(0) = 0$, mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local.

IV.2. Théorème de Rolle

Théorème 17.28 (Théorème de Rolle)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

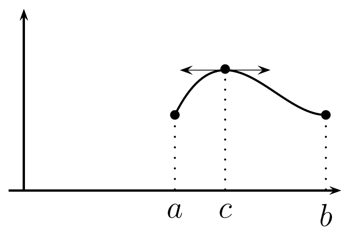


FIGURE 17.1 – Théorème de Rolle

Remarque

- Le théorème de Rolle, comme le théorème des valeurs intermédiaires, est un théorème d'existence. Il précise que sous certaines conditions la dérivée d'une fonction s'annule au moins une fois. Mais il ne donne ni la valeur du (ou des) points où cette dérivée s'annule, ni leur nombre exact.
- On notera bien qu'il n'est pas nécessaire pour f d'être dérivable en a et en b.
- La conclusion du théorème de Rolle est en défaut, si l'on supprime une seule des trois hypothèses.
  - ⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ si $0 \leqslant x < 1$ et $f(1) = 0$ est dérivable sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 0$. Mais f n'est pas continue en 1 et la dérivée de f sur $]0,1[$ qui est constante à 1 ne s'annule pas.
  - ⋆ La fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ est continue sur $[-1,1]$ et $f(-1) = f(1) = 1$. Mais f n'est pas dérivable en 0 et f', lorsqu'elle existe, ne prend que les valeurs -1 et 1, donc ne s'annule pas.
  - ⋆ La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$. Mais $f(0) \neq f(1)$ et $f' = 1$ ne s'annule pas sur $]0,1[$.

Ex. 17.10 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-3)(x-1)x(x+2)(x+4)$. Montrer que f' possède quatre racines distinctes.

Cor. 17.10

Ex. 17.11 On reprend l'exercice précédent. Montrer que f'' possède trois racines distinctes, calculer les racines de $f^{(3)}$ puis préciser la position des racines de f''.

Cor. 17.11

Ex. 17.12 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2}(b-a)^2.$$

Cor. 17.12

IV.3. Théorème des accroissements finis

Théorème 17.29 (Théorème des accroissements finis)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Démonstration

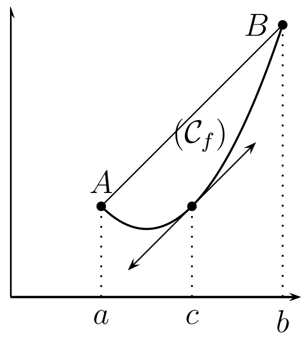


FIGURE 17.2 – Théorème des accroissements finis

Théorème 17.30 (Utilisation : primitivation d'un développement limité)

Si f est dérivable sur I et si f' admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant celui de f'.

Plus précisément, si $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

Démonstration

Remarque

L'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ s'écrit aussi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. Le théorème des accroissements finis relie une notion globale (le taux d'accroissement entre deux points éloignés) et une notion locale (la dérivée en un point). Géométriquement, ce théorème affirme qu'il existe un point $C(c, f(c))$ de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à la corde joignant les points

$A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Ex. 17.13 Établir que pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$.

Cor. 17.13

Corollaire 17.31 (Inégalité des accroissements finis : version réelle)

Si l'application $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[, m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.

Démonstration

Ex. 17.14 Donner une valeur approchée rationnelle de $\sqrt[4]{80}$ et majorer l'erreur commise.

Cor. 17.14

IV.4. Variation, extremums et dérivabilité

Proposition 17.32 (Fonction constante)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. La fonction f est constante sur I ***si et seulement si*** sa dérivée f' est nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

Proposition 17.33 (Variation et dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- Si $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est croissante sur I.
- Si $f' \leqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors f est décroissante sur I.

Démonstration

Voici un corollaire qui complète la proposition 17.27.

Proposition 17.34 (Condition suffisante d'existence pour un extremum local)

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point intérieur à I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors $f(a)$ est un extremum local.

Démonstration

Ex. 17.15 Trouver tous les réels a strictement positifs tels que $\forall x > 0, a^x \geqslant x^a$.
En déduire lequel des deux nombres e^π et π^e est le plus grand.

Cor. 17.15

Proposition 17.35 (Condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie)

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ avec f' de signe constant sur $\overset{\circ}{I}$. Alors f est strictement monotone si et seulement si f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide.

Démonstration

Ex. 17.16 Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.16

Ex. 17.17 Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto \operatorname{ch} x + \cos x$.

Cor. 17.17

IV.5. Limite de la dérivée

Proposition 17.36 (Limite de la dérivée)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
Si f est une fonction continue sur I, dérivable sur $I\backslash\{a\}$ et si $f'(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$ alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

En particulier, si $l \in \mathbb{R}$, f est alors dérivable en a et $f'(a) = l$.

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent permet d'éviter de vérifier « à la main » qu'une fonction est dérivable en un point où elle a été prolongée par continuité ***lorsque sa dérivée possède une limite en ce point***. L'exemple suivant permettra de mieux comprendre sa portée.

Ex. 17.18 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Cor. 17.18

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 8 sur les suites, le chapitre 15 sur la continuité et le TD 5 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle*** I ***stable par*** f c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est décroissante***.

  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 8.51 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 15.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f. Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a; b]$ où a ***et*** b ***sont deux points fixes de*** f ***tels que*** $a < b$ est stable par f.
  En effet, $\forall x \in [a; b], a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b$.
- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- ***Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par*** f.

Méthode : Monotonie *de la suite*

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \mathrm{id}$:
  - ⋆ si g est ***positive sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est croissante ;
  - ⋆ si g est ***négative sur l'intervalle stable par*** f ***considéré***, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.
Les points fixes de f ***sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !***
Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.
De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 17.31) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».

Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.

Ex. 17.19 Nous avons déjà étudié (exercice 15.22, TD d'informatique) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$ et nous avons montré que

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.
En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

Cor. 17.19

V.3. Fonctions lipschitziennes

Définition 17.37 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Proposition 17.38

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration

Proposition 17.39

Si $I = [a; b]$ est un segment et si $f : I \to I$ est continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration

Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k-lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f.

Matrices

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre le calcul matriciel d'une part et les espaces vectoriels et applications linéaires d'autre part. Ce lien sera assuré en particulier par le théorème 14.38. Les chapitres 12, 14, 10 et 11 sont à réviser. Notamment, dans le chapitre 11, le paragraphe II.5. sur le produit matriciel, le paragraphe II.9. sur les propriétés du produit matriciel et le suivant sur les règles qui ne sont plus valables pour ce produit doivent être connus, ainsi que les méthodes sur le calcul de l'inverse d'une matrice inversible par exemple.
De même, les paragraphes III., IV. et VI. du chapitre 14 doivent être parfaitement connus.
Dans tout ce qui suit, n et p sont deux entiers naturels non nuls, E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps - pour nous $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Matrices et déterminants

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (espaces vectoriels et applications linéaires) et la représentation numérique (matrices) dans le cadre de la dimension finie. [...] Il est attendu des élèves qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Matrices a) Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.	Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.
Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.	
b) Noyau, image et rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Interprétation en termes de systèmes linéaires.
Rang d'une matrice A.	Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes, ou comme le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A, ou comme le nombre de pivots de son échelonnée réduite.
Théorème du rang.	
Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image et de rang.	
Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.	Deux matrices équivalentes par ligne ou par colonne ont même rang.
Rang de la transposée.	Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice.

II. Rappels et compléments

II.1. Matrices diagonales

Définition 18.1 (Centre (hors-programme))

On appelle ***centre*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non vide puisqu'il contient la matrice identité.

Théorème 18.2

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

Démonstration hors programme

Soit M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisqu'elle commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute notamment avec les matrices élémentaires.
En écrivant cela pour les matrices de dilatation, on montre que M est une matrice diagonale.
Puis en l'écrivant pour les matrices de transvection, on montre que tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
Réciproquement, une matrice de cette forme commute avec toute matrice donc appartient au centre.

Remarque

En particulier les matrices diagonales ne commutent pas avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>**Ex.** 18.1</u> Calculer AB et BA pour :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Cor. 18.1

Propriété 18.3

Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à gauche*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque ligne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de ligne.
Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à droite*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque colonne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de colonne.

II.2. Applications linéaires : rappels

Théorème 14.38 : définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E (qui est donc de dimension ....) et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace vectoriel F, supposé ici de dimension quelconque, finie ou infinie.
Alors ....

<u>**Ex.** 18.2</u> Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(i; j; k)$ vérifiant

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(i) & = & 2i & - & 3j & & \\ f(j) & = & 3i & + & j & - & 4k \\ f(k) & = & & & 11j & - & 8k \end{array}$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Cor. 18.2

Théorème 14.51 : caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors ....

II.3. Matrices et systèmes linéaires : rappels

Soit $\mathcal{S}$ un système de n équations à p inconnues $(x_1; x_2 ...; x_p) \in \mathbb{K}^p$.
Alors il existe deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que

$(x_1; x_2 ...; x_p)$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifie $AX = B$.

A est appelée matrice associée au système et $(A|B)$ matrice ***augmentée*** associée au système.
Pour résoudre ce système, l'une des méthodes possibles est d'utiliser l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée $(A|B)$ de sorte à obtenir l'unique matrice $(A'|B')$ réduite par lignes équivalente par lignes à $(A|B)$. On a alors :

- le système ne possède aucune solution si et seulement si ....;
- le système possède une unique solution si et seulement si .... Généralement, ces système ont le même nombre de lignes et d'inconnus, auquel cas .... ;
- on appelle inconnues principales .... et inconnues secondaires ou paramètres les autres.
  On appelle rang du système ....
  Si le système possède des solutions, les inconnues secondaires ***peuvent prendre toute valeur dans*** $\mathbb{K}$ et les inconnues principales ....

II.4. Sous-espaces vectoriels et notion de dimension : synthèse

Il faut connaître tous les espaces vectoriels de référence dont un résumé se trouve dans le chapitre 14, section II.3..

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

- On peut montrer que
  - ⋆ $F \subset E$;
  - ⋆ $0_E \in F$;
  - ⋆ F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (u; v) \in F^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F$$

- On peut montrer que $F = G \cap H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = G + H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E.
- On peut montrer que $F = \mathrm{Ker}\, u$ où $u \in \mathcal{L}(E, E')$.
- On peut montrer que $F = v(A)$ où $v \in \mathcal{L}(E'', E)$ et A est un sous-espace vectoriel de E''.

Notion de dimension

- On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie ***s'il existe une famille finie génératrice de*** E.
  Dans ce cas, le théorème d'extraction de base garantit que l'on peut extraire de cette famille une sous-famille ***à la fois génératrice et libre*** : E possède donc une .....
- Le lemme fondamental permet alors de montrer que ***toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même nombre de vecteurs*** : ce nombre est caractéristique de l'espace vectoriel et s'appelle ....
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et s'ils sont tous les deux de dimension finie alors
  $$\dim F \leqslant \dim E$$
  De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
- ***Formule de Grassmann*** : F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie),
  $$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$
- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  - ⋆ Par définition, $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de F.
    Donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim F$.
  - ⋆ L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
    Donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim E$.
  - ⋆ u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.
    Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim F \leqslant \dim E$.
  - ⋆ ***Théorème du rang*** : $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.
  - ⋆ u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
    Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim E \leqslant \dim F$.
  - ⋆ Une application linéaire bijective est appelée ***isomorphisme*** lorsque $E \neq F$, ou ***automorphisme*** lorsque $E = F$.
    Deux espaces vectoriels sont dits ***isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.***
  - ⋆ Si E et F sont isomorphes, alors il existe une application linéaire bijective de E dans F : d'après ce qui précède, on a donc
    $\dim E \leqslant \dim F \leqslant \dim E$ c'est-à-dire $\dim E = \dim F$.
  - ⋆ u est bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

Ex. 18.3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \in E \mapsto P(X+1) \in E$.

1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?
2) Montrer que ϕ est linéaire.
3) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de E.
4) Montrer que ϕ est un automorphisme.
5) Calculer $\phi(Q)$ où $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. En déduire des propriétés des coefficients

binomiaux.

III. Les *diverses* interprétations vectorielles des matrices

III.1. Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 18.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et u un vecteur de E.
On appelle ***matrice de*** u ***dans*** $\mathcal{B}$ la matrice

$$(x_i)_{i \leq n} \qquad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la matrice colonne composée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.4 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $u = (7; 3; -2)$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$.

Ex. 18.5 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $P = (X+1)^n$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{i \in [\![1; n+1]\!]}$.

III.2. Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 18.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E.
On appelle ***matrice de*** $\mathcal{S}$ ***dans*** $\mathcal{B}$ la matrice

$$(u_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}} \qquad \text{avec } \forall j \in [\![1; p]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ est la matrice $(U_1 | U_2 | ... | U_p)$ des colonnes U_j composées des coordonnées des u_j dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$.
Lorsque la famille $\mathcal{S}$ ne contient qu'un seul vecteur u, la matrice de la famille est celle du vecteur.

Ex. 18.6 Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{S} = ((1;0;3);(-1;-1;2))$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ & \\ & \end{pmatrix}$.

Ex. 18.7 Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $\mathcal{F} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{\substack{i\in[\![1;n+1]\!] \\ j\in[\![1;n+1]\!]}}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. En déduire une propriété vérifiée par les colonnes de M.

Important !

La matrice d'une famille $\mathcal{S}$ ***dépend de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle on décompose les vecteurs de $\mathcal{S}$***. Pour cette raison, il ne faut pas oublier de préciser dans quelle base s'effectue la décomposition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

III.3. Matrice d'une application linéaire

Définition 18.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.
D'après le théorème 14.38, ***il existe une unique application linéaire*** ϕ telle que

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

On appelle ***matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*** la matrice $(a_{i,j})_{\substack{i\le n \\ j\le p}}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ la matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(e_1), \phi(e_2), ..., \phi(e_p)) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \cdots & \phi(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Ex. 18.8
Quelle est la matrice associée à $\psi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y; -2x + 3y) \in \mathbb{R}^2$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Quelle est l'application linéaire $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ donnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
$\chi : (x; y; z) \mapsto$

Ex. 18.9 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X + 1)$ de l'exercice 18.3.
Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.4. Cas particuliers

Notation

Lorsque ϕ est un ***endomorphisme de*** E rapporté à une base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire lorsque $\phi : ... \to ...$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$.

Important !

Il est cependant possible de rapporter un même espace vectoriel E à deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et d'écrire la matrice d'un endomorphisme ϕ de E rapporté à $\mathcal{B}$ pour les vecteurs de départ et à $\mathcal{B}'$ pour leurs images : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$. ***Nous verrons même plus loin que cette possibilité offre une excellente interprétation géométrique aux matrices carrées inversibles !***

Définition 18.7

On appelle ***application linéaire canoniquement associée*** à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application $\phi \in \mathcal{L}(..., ...)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ de ... et $\mathcal{B}'$ de ... est A.

Ex. 18.10 Quelle est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$? Est-elle injective ? Quel est son rang ?

III.5. Remarques

1) Si on change les bases des ensembles de départ ou d'arrivée d'une application linéaire, la ***matrice associée à l'application linéaire est complètement modifiée !***
2) La matrice de l'application nulle est la matrice nulle quelles que soient les bases des espaces de départ et d'arrivée.
3) ***MAIS***, la matrice de l'application identité $E \to E$ ***n'est la matrice identité que si*** E ***est rapporté à la même base au départ et à l'arrivée !***
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ pour $\dim E = n$.

Ex. 18.11 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ et les bases $\mathcal{B} = (1; X; X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X(X-1); X(X+1); (X-1)(X+1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

Cor. 18.11

III.6. Théorème d'isomorphisme

Théorème 18.8 (Admis)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
L'application $\Theta : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \Theta(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 18.9

Pour E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p = \dim E \times \dim F$.

III.7. Image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition 18.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $u \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$.
Alors les coordonnées de $\phi(u) \in F$ dans $\mathcal{B}'$ sont les coefficients de MX.

Démonstration

Ex. 18.12 Quelle est l'image du vecteur $(-2;1)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

III.8. Deuxième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$.
Soit par ailleurs $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_q)$ une famille de $q \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E associée à la matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.
Alors

$$MS = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(u_1), \phi(u_2), ..., \phi(u_q)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\big(\phi(\mathcal{S})\big)$$

Démonstration

En vertu du théorème précédent, il s'agit simplement de la traduction du théorème 11.9 affirmant que pour si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (U_1|U_2|...|U_q) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ on a

$$AB = (AU_1|AU_2|...|AU_q)$$

III.9. Troisième interprétation du produit matriciel

Proposition 18.12

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q, p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_q)$, $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_p)$ et $\mathcal{B}'' = (g_1, g_2, ..., g_n)$.
Soient $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(\psi \circ \phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(\psi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$$

Démonstration

Ex. 18.13 On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3.
On définit de plus $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X-1)$.
Que peut-on dire de $\phi \circ \psi$? de $\psi \circ \phi$?
Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi)$ puis calculer AB et BA.

III.10. Cas particuliers

1) Si ϕ et ψ sont des endomorphismes de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi \circ \phi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\psi)$: le produit matriciel n'est pas commutatif car ....
2) Si ϕ est une forme linéaire de E rapporté à $\mathcal{B}$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B},(1)}(\phi) = (\text{............................})$: une matrice-ligne s'interprète naturellement comme ....

IV. Isomorphismes et changements de bases

IV.1. Caractérisation des isomorphismes par leur matrice

Théorème 18.13

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$.
$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
On a de plus dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\left(\phi^{-1}\right) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)^{-1}$$

Démonstration

IV.2. Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 18.14

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$.

Démonstration

IV.3. Matrices de passage

Définition 18.15

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E.
On appelle ***matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$*** la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Autrement dit, ***la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$.***

Notation

On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Remarque

On a aussi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.

Notamment, toutes les matrices de passage sont ....

En effet, ...

IV.4. Propriétés des matrices de passage

Propriété 18.16 (Inverse d'une matrice de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ deux bases de E. Alors :

$$\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$$

Démonstration

Propriété 18.17 (Produit de deux matrices de passage)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E. Alors :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$$

Démonstration

<u>**Ex.** 18.14</u> • Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{B}' = ((1;1);(2;3))$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ car

• Dans $\mathbb{R}_2[X]$, avec $\mathcal{B}$ la base canonique, $\mathcal{B}' = (X(X+1); X(X+2); (X+1)(X+2))$ et $\mathcal{B}'' = (1; X; 2X^2-1)$.

$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ car

Calculer les autres matrices de passage entre les différentes bases données.

Cor. 18.14

IV.5. Formules de changement de bases

Proposition 18.18 (Formule de changement de bases pour un vecteur)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\forall u \in E, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Démonstration

Ex. 18.15 Exprimer les coordonnées du polynôme $P = 3X^2 + 5X - 4$ dans les trois bases de l'exemple précédent.

Cor. 18.15

Proposition 18.19 (Formule de changement de bases pour une application linéaire)

Soient E de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et F de bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E, F), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\phi) = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Démonstration

Proposition 18.20 (Formule de changement de bases pour les formes linéaires)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi) P$$

Proposition 18.21 (Formule de changement de bases pour les endomorphismes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)$.

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P^{-1} A P$$

IV.6. Matrices inversibles : résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = I_n$;
3) $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), BA = I_n$;
4) l'application linéaire $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A est bijective ;
5) A est une matrice de passage entre deux bases de $\mathbb{K}^n$;
6) $\forall W \in \mathbb{K}^n, AV = W$ admet une unique solution $V \in \mathbb{K}^n$;
7) $AV = 0_{\mathbb{K}^n}$ admet une unique solution $0_{\mathbb{K}^n} \in \mathbb{K}^n$.

Méthode

En pratique, pour déterminer l'inverse d'une matrice A, on utilise l'avant-dernière propriété qui revient à résoudre un système de n équations à n inconnues : ou bien $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (I_n|B)$ et A est alors inversible et $A^{-1} = B$, ou bien le système est de rang strictement inférieur à n et A n'est pas inversible.
Une autre méthode fructueuse est l'interprétation de la matrice A comme matrice d'une application linéaire ou comme matrice de passage.

Méthode

Pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base d'un espace vectoriel de dimension n, il suffit de montrer que la ***matrice des coordonnées de cette famille*** dans une base donnée est une ***matrice inversible***.

Ex. 18.16 Résoudre le système $\begin{cases} 3x - 5y + z = u \\ -2x + y - z = v \\ 4x - y + 2z = w \end{cases}$ et en déduire l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Cor. 18.16

V. Noyau, image et rang d'une matrice

V.1. Noyau et image d'une matrice

Définition 18.22

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\phi : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
On appelle ***noyau de la matrice*** A le noyau de ϕ.
On appelle ***image de la matrice*** A l'image de ϕ.

Notation

On note, comme pour les applications linéaires, $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.

Remarque

Avec les notations de la définition, $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\ldots$ et $\mathrm{Im}(A)$ un sous-espace vectoriel de $\ldots$.

V.2. Conservation de la dimension du noyau et de l'image par multiplication par des matrices inversibles

Proposition 18.23

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $N \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors

$$\dim \operatorname{Ker}(A) = \dim \operatorname{Ker}(MA) = \dim \operatorname{Ker}(AN)$$

et

$$\dim \operatorname{Im}(A) = \dim \operatorname{Im}(MA) = \dim \operatorname{Im}(AN)$$

Démonstration

V.3. Rang d'une matrice : rappel

Nous avons défini au chapitre 11 section V.5. le rang d'une matrice de la façon suivante :

Définition 18.24

On appelle ***rang*** d'une matrice A le nombre de pivots de l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A.

Or le nombre de pivots d'une matrice échelonnée réduite par lignes est de façon évidente égale à la dimension de l'image de cette matrice. D'après la proposition précédente, c'est aussi la dimension de l'image de A puisque on passe de A à l'unique matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A en multipliant par des matrices élémentaires inversibles. Donc une définition alternative du rang d'une matrice est :

Définition 18.25

On appelle ***rang*** d'une matrice A la dimension de son image : $\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$.

Remarque

Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc aussi le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

V.4. Théorème du rang : version matricielle

Théorème 18.26 (Théorème du rang)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{rg}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = p$$

V.5. Caractérisations des matrices inversibles

Théorème 18.27

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) A est inversible ;
2) $\mathrm{rg}(A) = n$;
3) $\dim \mathrm{Ker}(A) = 0$.

Démonstration

En remarquant que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que les dimensions des espaces de départ et d'arrivée sont égales pour l'application linéaire canoniquement associée à A, il s'agit d'une conséquence directe du théorème 14.51 énonçant des équivalences similaires pour les applications linéaires.

V.6. Rang et transposition

Propriété 18.28

Quelle que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$;
- $\mathrm{rg}\, A \leq \min(n,p)$.

Démonstration

Remarque

Ce théorème permet d'affirmer que le rang d'une matrice est aussi bien égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes que de celle de ses vecteurs colonnes. Plus généralement, il autorise à faire aussi bien des opérations sur les lignes que sur les colonnes pour obtenir de façon algorithmique le rang d'une matrice.

Ex. 18.17 $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} =$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 1 & -3 \\ 6 & -9 & -6 & 0 \end{pmatrix} =$

Maths - Chapitre 19

Probabilités

La théorie des probabilités naît dans un premier temps d'une réponse que **Galilée**[1] donne à une question du Prince de Toscane : « Lorsqu'on lance 3 dés et qu'on additionne les résultats, il y a 6 manières d'obtenir 9 et 6 manières d'obtenir 10. Pourquoi alors leur somme est plus souvent égale à 10 qu'à 9 ? »

FIGURE 19.1 – Décompositions de 9 et 10 en sommes de 3 dés.

$$9 = \begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ 1+4+4 \\ 2+2+5 \\ 2+3+4 \\ 3+3+3 \end{cases} \qquad 10 = \begin{cases} 1+3+6 \\ 1+4+5 \\ 2+2+6 \\ 2+3+5 \\ 2+4+4 \\ 3+3+4 \end{cases}$$

On considère cependant que le véritable point de départ de la théorie des probabilités est la correspondance entre **Blaise Pascal** (voir note 1 page 38) et **Pierre de Fermat**[2]au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Elle se développe ensuite progressivement autour des travaux de **Christian Huyghens**[3], **Pierre-Siméon de Laplace**[4], etc...

Mais ce n'est qu'au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle que la théorie des probabilités prend sa forme moderne grâce au livre *Fondements de la théorie des probabilités* d'**Andreï Kolmogorov**[5].

Ce chapitre a pour but d'introduire le vocabulaire de base de l'axiomatique de Kolmogorov et de l'utiliser pour la modélisation et la résolution de problèmes simples issus d'***expériences aléatoires*** qui n'ont qu'un nombre ***fini d'issues possibles***. Les notions et résultats du chapitre 16 doivent être ***révisés et maîtrisés***.

1. **Galilée**(1564 ;1662), italien, est considéré comme le fondateur de la physique moderne. Il invente la lunette astronomique et, en étudiant le mouvement des planètes du système solaire, en vient à soutenir la thèse de Copernic que la Terre tourne autour du Soleil. Il découvre le ***principe de Galilée*** et à ce titre est l'un des précurseurs qui permettront à **Newton** (voir note 2 page 39) de jeter les bases de la mécanique des solides et des lois de la gravitation. Il a aussi contribué au progrès des mathématiques, notamment en géométrie.
2. **Pierre de Fermat**(∼1600 ;1665), mathématicien et physicien français ayant notamment contribuer avec Pascal à la fondation du calcul des probabilités. Il s'intéressa aussi à l'optique et surtout à l'arithmétique, domaine dans lequel il excellait.
3. **Christian Huyghens**(1629 ;1695), mathématicien et physicien néerlandais. Il découvre notamment le principe de conservation de l'énergie cinétique, la nature ondulatoire de la lumière et publie en mathématiques le premier traité consacré à la théorie des probabilités.
4. **Pierre-Siméon de Laplace**(1749 ;1827), mathématicien et physicien français. On lui doit notamment un traité *Essai philosophique sur les probabilités* qui fera référence pendant un siècle, des travaux sur les polynômes et les équations polynomiales, et plusieurs contributions majeures pour la résolution d'équations différentielles
5. **Andreï Kolmogorov**(1903 ;1987), mathématicien russe dont l'œuvre est considérable. En dehors des probabilités dont il développe l'axiomatisation moderne, il apporte notamment des contributions majeures à l'étude des ***systèmes dynamiques***, c'est-à-dire - en simplifiant un peu - à l'étude des suites récurrentes de nombres complexes.

Enfin, concernant les notions d'expérience aléatoire et de probabilité que nous étudierons et manipulerons tout au long du chapitre, elles seront essentiellement fondées sur notre seule intuition. Précisons simplement que :

- il revient au même de dire que « ***j'ai*** 1 ***chance sur*** 19 068 840 ***de gagner au loto*** » ou de dire « ***ma probabilité de gagner au loto est de*** $\dfrac{1}{19\ 068\ 840}$ » ;
- par conséquent, la probabilité d'un événement est un nombre (réel) compris entre 0 et 1, et dans le cas fini le calcul d'une probabilité revient souvent à dénombrer deux ensembles ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 0, cet événement a une ***très faible de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 1, cet événement a une ***très forte de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire.

I. Programme officiel

Probabilités

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Généralités a) Expériences aléatoires et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé ***univers***. Événement, événement élémentaire (singleton),événement contraire, événement « A **ou** B », événement « A **et** B », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où l'univers est fini.
b) Espace probabilisé fini	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$, et pour toutes parties disjointes A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Équiprobabilité (ou probabilité uniforme). Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
c) Probabilité conditionnelle	

Pour deux événements A et B tels que $P(B) > 0$, probabilité conditionnelle de A sachant B.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique.
L'application P_B définit une probabilité sur Ω.	
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	
Formules de Bayes.	On donnera plusieurs utilisations issues de la vie courante.
d) Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance des A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

II. Univers et événements

II.1. Univers

Définition 19.1 (Univers)

Étant donnée une expérience aléatoire on appelle :

- ***issues*** ou ***réalisations*** les ***résultats possibles*** de cette expérience aléatoire ;
- ***univers*** ou ***univers des possibles*** l'ensemble des tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Notation

Généralement, on note Ω l'univers.

Ex. 19.1

1) On lance une pièce de monnaie et on observe sur quelle face elle tombe.
   Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
2) Même question lorsqu'on lance un dé à 6 faces.
3) Même question lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces.

Cor. 19.1

Remarque

On se limitera dans ce chapitre au cas où Ω est un ensemble fini conformément au programme. On peut cependant facilement imaginer des expériences aléatoires pour lesquelles l'univers est infini. Par exemple, dans une chaine de production d'écrous, on tire aléatoirement un écrou pour vérifier si son diamètre et son pas de vis sont bien conformes aux spécifications imposées.

L'univers est ici l'ensemble des diamètres possibles pour l'écrou, et il s'agit à priori d'une partie infinie de $\mathbb{R}_+^*$.

Dans tout ce qui suit, on se donne une expérience aléatoire avec un univers Ω fini.

II.2. Événement

Définition 19.2 (Événement)

On appelle ***événement*** toute partie de Ω.
On appelle ***événement élémentaire*** ou ***singleton*** tout événement ***avec un unique élément***.
Lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire, on dit qu'un événement A ***se produit*** si l'issue de l'expérience aléatoire ***appartient à*** A.

Remarque

Un événement est par définition une partie de Ω donc un ***élément*** de ......

Ex. 19.2 On lance un dé à 6 faces. Expliciter les événements suivants et dire s'ils sont élémentaires ou non :

1) A :« le résultat du lancer est pair ».
2) B :« le résultat du lancer est inférieur ou égal à 2 ».
3) $C = A \cap B$.

Cor. 19.2

Définition 19.3 (Événement contraire)

Étant donné un événement A, on appelle ***événement contraire de*** A le complémentaire de A dans Ω.
Autrement dit, l'événement contraire de A est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***ne se produit pas***.

Notation

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Ex. 19.3 Quels sont les événements contraires des événements A, B et C de l'exercice précédent ?

Cor. 19.3

II.3. Conjonction, disjonction d'événements

Définition 19.4 (Conjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** A **et** B ou encore ***conjonction des événements*** A, B l'événement $A \cap B$.
Autrement dit, l'événement A **et** B est ***celui qui se produit si et seulement si*** A ***et*** B ***se produisent*** (en même temps).

Définition 19.5 (Disjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** A **ou** B ou encore ***disjonction des événements*** A, B l'événement $A \cup B$.
Autrement dit, l'événement A **ou** B est ***celui qui se produit si et seulement si l'un ou l'autre des deux événements*** A, B ***se produit***.

Ex. 19.4 Que vaut l'événement A **et** B de l'exercice 19.2 ?

Cor. 19.4

II.4. Événement impossible, événements incompatible

Définition 19.6 (Événement impossible)

On dit qu'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est ***impossible*** si $A = \emptyset$.

Définition 19.7 (Événements incompatibles)

On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***incompatibles*** si A **et** B est impossible.
Autrement dit, deux événements A, B sont incompatibles si ....

Ex. 19.5 On lance deux dés à 6 faces et on note Ω l'ensemble des issues possibles. Expliciter les événements suivants (pour les quatre premiers, on les donnera en extension) :

1) A : « la somme des deux dés est paire ».
2) B : « chacun des dés est pair ».
3) C : « chacun des dés est impair ».
4) $D = \overline{A}$: ....
5) $E = A \cap B$.
6) $F = D \cap \overline{C}$.
7) $G = \overline{B} \cap \overline{C}$.
8) $H = G \cap A$.

Cor. 19.5

II.5. Système complet d'événements

Définition 19.8

On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de $n \in \mathbb{N}^*$ événements forme un ***système complet d'événements*** si c'est une ***partition*** de Ω.

Autrement dit, une famille $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'événements si $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et si les événements de la famille sont ***deux à deux*** incompatibles.

Ex. 19.6 Montrer que la famille (B, C, G) de l'exercice 19.5 forme un système complet d'événements.

Cor. 19.6

III. Espaces probabilisés

III.1. Probabilité

Définition 19.9 (Probabilité)

On appelle ***probabilité sur un univers*** Ω toute ***application*** $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0; 1]$ vérifiant les propriétés :

1) $P(\Omega) = 1$;
2) pour tout couple $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ d'événements ***incompatibles***,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Autrement dit, la seconde propriété s'écrit

$$\forall (A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Définition 19.10 (Espace probabilisé)

On appelle ***espace probabilisé*** (Ω, P) la donnée d'un univers et d'une probabilité définie sur cet univers.

Définition 19.11 (Probabilité d'un événement)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On appelle ***probabilité d'un événement*** $A \subset \Omega$ le réel $P(A) \in [0; 1]$.

Propriété 19.12

Soient (Ω, P) un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ une famille d'événements ***deux à***

deux incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} P\left(A_i\right).$$

Démonstration

Propriété 19.13

Étant donné un univers ***fini*** $\Omega = \{\omega_1; ...; \omega_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de donner les images de $n-1$ événements élémentaires de Ω pour définir une probabilité sur Ω.

Démonstration

Ex. 19.7 On jette un dé truqué tel que $\forall i \in [\![1;5]\!]$, $P\big(\{i\}\big) = \dfrac{1}{7}$.

1) Calculer $P\big(\{6\}\big)$.
2) Calculer $P\big($« l'issue est paire »$\big)$.

Cor. 19.7

III.2. Hypothèse d'équiprobabilité

Définition 19.14

Soit Ω un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'on fait ***l'hypothèse d'équiprobabilité*** lorsqu'on munit Ω de la probabilité P telle que pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, $P\left(\{\omega\}\right) = \dfrac{1}{n}$.

La probabilité P est alors bien définie puisque les probabilités des événements élémentaires sont données et que $P(\Omega) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.

La probabilité P ainsi définie est appelée ***probabilité uniforme*** sur Ω et (Ω, P) ***espace probabilisé uniforme***.

Ex. 19.8 On jette simultanément deux dés non truqués (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse d'équiprobabilité).
Pour chaque entier $i \in [\![2;12]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i.

Cor. 19.8

Propriété 19.15

Soit A un événement. ***Sous l'hypothèse d'équiprobabilité***, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

Démonstration

III.3. Propriétés d'une probabilité

Lemme 19.16

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Quels que soient les événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est A et

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Propriété 19.17 (Probabilité de A ou B)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Démonstration

Remarque

La démonstration précédente fait apparaître comme résultat intermédiaire que pour toutes parties A, B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A)$.
Bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, il est souvent utile.

Propriété 19.18 (Probabilité de l'événement contraire)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

Démonstration

Propriété 19.19 (Croissance d'une probabilité)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors quel que soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A \cup B) \geqslant P(A)$$

Démonstration

Ex. 19.9 (Cor.) ***Problème du prince de Toscane***
On jette simultanément trois dés non truqués.
Calculer la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 9 puis la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 10.
Comparer les probabilités.
Indications : on pourra se référer au début de chapitre pour les décompositions de 9 et 10 en somme de trois dés et utiliser au besoin les résultats de l'exercice 19.8.

IV. Probabilités conditionnelles

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

IV.1. Définition

Définition 19.20 (Probabilité de A sachant B)

Soit A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(B) > 0$.
On appelle ***probabilité conditionnelle de*** A ***sachant*** B ou plus simplement ***probabilité de*** A ***sachant*** B le quotient

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0; 1]$$

Notation

On note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Remarques

- ***L'hypothèse*** $P(B) > 0$ est absolument nécessaire sans quoi le quotient $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ n'est pas défini.
- Une probabilité étant croissante et $A \cap B$ étant inclus dans B, on a bien comme l'affirme la définition $P_B(A) \leqslant 1$. Il est par ailleurs évident que ce quotient de deux nombres positifs est positif.

Remarques

- Une probabilité conditionnelle s'interprète comme suit : si l'on sait que l'événement B s'est produit, l'univers est réduit à cet événement, notamment $P_B(B) = 1$. Par ailleurs, les issues de A n'appartenant pas à B sont impossibles, donc l'événement A est réduit à $A \cap B$.

  Pour calculer la probabilité d'un événement A sachant que B s'est produit il faut donc :

- ⋆ se restreindre à l'événement $A \cap B$, les autres issues de A étant impossibles;
- ⋆ ramener la probabilité de l'événement ainsi obtenu à la probabilité d'obtenir B, c'est-à-dire effectuer le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

- Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, l'interprétation est encore plus simple : le nombre d'issues favorables est $\text{Card}(A \cap B)$, le nombre total de cas possibles est $\text{Card}\, B$ donc

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\, B} = \frac{\frac{\text{Card}(A\cap B)}{n}}{\frac{\text{Card}(B)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ex. 19.10 On jette deux dés non truqués.
Pour chaque entier $i \in [\![6;8]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i sachant que l'un des deux dés au moins a donné un résultat pair.

Cor. 19.10

Propriété 19.21

Étant donné un événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$, l'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration

Remarque

P_B étant une probabilité sur Ω, elle possède notamment toutes les propriétés de la section III.3.

IV.2. Formule des probabilités totales

Théorème 19.22 (Formule des probabilités totales)

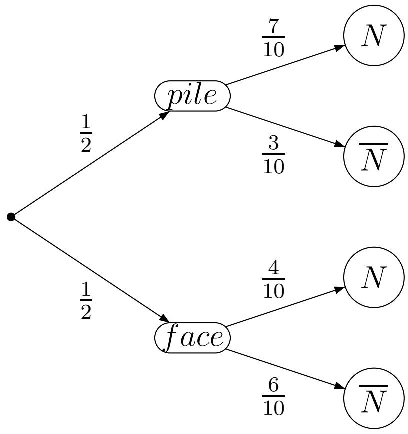
Étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ tel que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $P(A_i) > 0$, on a pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i)P(B|A_i)$$

Démonstration

Méthode

La formule des probabilités totales est utile lorsque plusieurs expériences aléatoires successives sont effectuées.
Imaginons la situation suivante : deux sacs numérotés contiennent pour le premier 7 boules noires et 3 boules rouges, pour le second 4 boules noires et 6 boules rouges.
On tire à pile ou face, si la pièce tombe sur Pile, on tire une boule dans le premier sac, sinon on tire une boule dans le second sac.
Le schéma ci-contre représente l'enchaînement de ces deux expériences aléatoires.
On cherche à calculer la probabilité de tirer une boule noire et on note N l'événement correspondant. La formule des probabilités totales donne



$$\begin{aligned} P(N) &= P(pile)P(N|pile) + P(face)P(N|face) \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Ex. 19.11 Dans un lycée comptant 51% de filles, 12% des filles et 15% des garçons sont en classes préparatoires.
Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en classes préparatoires ?

Cor. 19.11

Ex. 19.12 On place dans un sac 3 boules noires et 7 boules rouges. On effectue trois tirages aléatoires successifs d'une boule dans le sac.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules noires en supposant que l'***on remet la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage avec remise***).
2) Même question en supposant que l'***on ne remet pas la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage sans remise***).

Cor. 19.12

IV.3. Formule des probabilités composées

Théorème 19.23 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'événements telle que $\forall i \in [\![1;n-1]\!]\,, P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$.

On a alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Démonstration

Remarque

Pour que la formule soit valide, on pose que l'intersection d'une famille vide est Ω. Ceci est cohérent avec les conventions identiques prises pour la somme d'une famille vide ou le produit d'une famille vide.

En effet, dans tous les cas, la convention est de choisir comme résultat d'une opération appliquée à une famille vide .... de l'opération concernée :

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0 \qquad \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1 \qquad \bigcap_{i\in\emptyset} A_i = \Omega \qquad \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \dots.$$

Notamment on rappelle que $0! = 1$.

Méthode

La formule des probabilités composées permet une généralisation de la formule obtenue dans l'exercice 19.12 pour les tirages sans remise dans le cas où l'on effectue un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque d'expériences aléatoires successives.

Ex. 19.13 Dans un sac, on place $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et une boule blanche. On effectue n tirages sans remise. Quelle est la probabilité qu'une boule noire reste dans le sac à la fin des tirages ?

Cor. 19.13

V. Formules de Bayes

V.1. Formule de Bayes simple

Théorème 19.24 (1re formule de Bayes)

Pour tous événements A, B de probabilité non nulle,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une probabilité conditionnelle $P(A|B)$ doit être calculée, ***avant tout calcul***, se demander si $P(B|A)$ n'est pas déjà connue. Dans ce cas, la formule de Bayes simple devrait conduire rapidement au résultat.

Ex. 19.14 Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice 19.11, calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'il est en classes préparatoires.

Cor. 19.14

V.2. Formule de Bayes généralisée

Théorème 19.25 (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle alors

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\,, P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Démonstration

Ex. 19.15 Un nouveau test de dépistage d'une maladie rare est trouvé par une équipe médicale.
Pour un individu malade, le test donne un résultat positif avec une probabilité a.
Pour un individu sain il donne un résultat positif avec une probabilité b.
On estime à 1% la probabilité qu'un individu soit atteint par cette maladie.
On dit que le test est ***acceptable*** si 99% des individus testés positifs sont effectivement malades.
Donner une condition sur a, b pour que le test soit acceptable.

Cor. 19.15

VI. Événements indépendants

VI.1. Définition

Définition 19.26 (Couple d'événements indépendants)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B, on dit qu'ils sont ***indépendants*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques

- Si $P(B) > 0$, les événements A et B sont indépendants si et seulement si
$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$$
Autrement dit, pour un événement B possible, l'indépendance des événements A et B signifie ***que la connaissance de B ne renseigne en rien sur la probabilité de A***.
- Si $P(B) = 0$, quel que soit l'événement A, les événements A et B sont indépendants.

VI.2. Famille finie d'événements mutuellement indépendants

Définition 19.27 (Indépendance mutuelle)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements mutuellement indépendants*** lorsque
$$\forall J \subset [\![1;n]\!]\,, P\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} P(A_i)$$

Définition 19.28 (Indépendance deux à deux)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements indépendants deux à deux*** lorsque
$$\forall i,j \subset [\![1;n]\!]\,, i\neq j \Rightarrow P\left(A_i\cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j)$$

Ex. 19.16 Donner un exemple d'espace probabilisé et trois événements A, B, C tels que les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais non mutuellement indépendants.

Cor. 19.16

Correction des exercices

Cor. 9.8 :

1) $\mathrm{DL}_2(0)$: $f(x) = \frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc prolongeable par continuité en 0, et prolongement dérivable de dérivée $1/6$.
2) Sur $]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\,\mathrm{Arcsin}^2(x)\sqrt{1-x^2}} \times \left(x^2 - \mathrm{Arcsin}^2(x)\sqrt{1-x^2}\right)$.

Cor. 19.9 : ***1re méthode :*** on note $T = i$ l'événement « la somme des trois dés vaut i ».
$P\big(T = i\big) = \sum_j \sum_k P\big(\{(k; j-k; i-j)\}\big)$ où j est la somme des deux premiers dés et où la somme doit être effectuée de sorte à ce que

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1 & \leqslant & k & \leqslant & 6 \\ 1 & \leqslant & j-k & \leqslant & 6 \\ 1 & \leqslant & i-j & \leqslant & 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lllll} 1 & \leqslant & k & \leqslant & 6 \\ j-6 & \leqslant & k & \leqslant & j-1 \\ i-6 & \leqslant & j & \leqslant & i-1 \end{array}\right.$$

Donc en utilisant l'hypothèse d'équiprobabilité,

$$P(T=i) = \frac{1}{216}\sum_{j=i-6}^{i-1}\sum_{k=\max(1;j-6)}^{\min(6;j-1)} 1 = \frac{1}{216}\sum_{j=i-6}^{i-1}(\min(6;j-1)-\max(1;j-6)+1).$$

$P(T=9) = \dfrac{1}{216}\displaystyle\sum_{j=3}^{8}(\min(6;j-1)-\max(1;j-6)+1) = \dfrac{2+3+4+5+6+5}{216} = \dfrac{25}{216}$ en utilisant l'exercice 19.8. De même,

$$P(T=10) = \frac{1}{216}\sum_{j=4}^{9}(\min(6;j-1)-\max(1;j-6)+1) = \frac{3+4+5+6+5+4}{216} = \frac{27}{216}.$$

On a donc bien $P(T=10) > P(S=9)$.

2ème méthode : on utilise la table de décomposition de 9 et 10 comme somme de trois dés du début de chapitre en remarquant que

- si une somme fait intervenir ***trois termes distincts***, elle correspond à $3! = 6$ événements élémentaires ;
- si une somme fait intervenir ***deux termes distincts***, elle correspond à $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$ événements élémentaires ;
- si une somme ne fait intervenir qu'un seul terme répété trois fois, elle correspond à un unique événement élémentaire.

D'où : $P(T=9) = \dfrac{6+6+3+3+6+1}{216} = \dfrac{25}{216}$ et $P(T=10) = \dfrac{6+6+3+6+3+3}{216} = \dfrac{27}{216}$.

Question : obtenir une formule générale donnant la probabilité que la somme de $n \in \mathbb{N}^*$ dé(s) soit égale à $i \in [\![n;6n]\!]$.

Séries

La notion de série repose sur l'idée que pour obtenir une approximation d'un nombre (irrationnel par exemple), on peut partir d'une approximation déjà obtenue et lui ajouter un terme suffisamment petit pour obtenir une approximation plus fine. C'est une notion d'une importance fondamentale en mathématiques non seulement à cause de l'importance pratique de la notion d'approximation des nombres irrationnels, mais encore parce qu'elle est une synthèse des notions de suites, de sommes finies et -comme nous le verrons- fait aussi intervenir les notions d'intégrales ou de développements limités.
Dans tout ce qui suit, u, v et w sont des suites réelles ou complexes définies sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Intégration

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Formule de Taylor avec reste intégral	
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	

Séries numériques

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Généralités	
Séries à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence.	
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	

Pour f continue et monotone, encadrement des sommes partielles $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique des sommes partielles.
Séries de Riemann	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$	Cas où l'inégalité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang. Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors-programme.
Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, si de plus $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc converge.	
d) Application au développement décimal d'un nombre réel	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un élément de $[0;1[$.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal propre à partir d'un certain rang.

II. Introduction

II.1. Formules de Taylor

Théorème 20.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ex. 20.1 Écrire ce théorème pour $n = 0$ et $n = 1$

....

....

Théorème 20.2 (Formule de Taylor-Young)

Soit $f \in \mathcal{C}^n(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

Démonstration

Remarque

Toutes les formules précédentes peuvent se réécrire en utilisant $h = x - x_0$ à la place de x et le signe $\sum$ à la place des pointillés.

Par exemple, la formule de Taylor avec reste intégral pour $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ se réécrit :

$$f(x_0 + h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + t)\mathrm{d}t$$

Réécrire la formule de Taylor-Young de cette façon :

....

II.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 20.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$.

Si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$ (autrement dit $f^{(n+1)}$ est bornée sur I), alors

$$\left| f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) - \cdots - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) \right| \leqslant M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration

Ex. 20.2 Écrire ce théorème pour $n = 0$

....

....

Quel nom porte ce théorème ? ....

Ex. 20.3 Montrer que $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Cor. 20.3

II.3. Définition

Définition 20.4 (Série numérique)

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, on appelle ***série de terme général*** u_n la suite S définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La définition s'étend au cas où le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les termes de la suite S sont appelés ***sommes partielles*** de la série.

Notation

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition 20.5 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite S de ses sommes partielles converge.
Dans le cas contraire, on dit que la série ***diverge***.

Notation

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S.

Définition 20.6 (Somme et restes d'une série convergente)

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée ***somme de la série***.

La suite R définie par $R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée suite des ***restes de la***

série.

Ex. 20.4 $\sum \frac{x^n}{n!}$ est-elle convergente ? Si oui, que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$?

Cor. 20.4

II.4. Propriétés

Propriété 20.7 (Linéarité de la somme)

Si les séries de termes généraux u_n et v_n convergent toutes les deux, alors $\forall(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ la série $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Démonstration

Propriété 20.8

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite u converge vers 0.

Démonstration

Méthode : Divergence grossière d'une série

La propriété précédente est utilisée pour montrer qu'une série ***diverge*** en passant par sa contraposée : si la suite u ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.
On dit dans ce cas que la série ***diverge grossièrement***.

Important !

La réciproque de cette propriété est fausse !

Ex. 20.5 (Cor.) Nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$.

Ex. 20.6 Nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$.

Cor. 20.6

II.5. Série géométrique

Définition 20.9 (Série géométrique)

On appelle ***série géométrique*** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Propriété 20.10 (Rappel)

Si u est une suite géométrique de raison r différente de 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Si u est une suite géométrique de raison 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.

Théorème 20.11 (Convergence d'une série géométrique)

Une série géométrique converge si et seulement si son terme général est nul ou de raison r vérifiant $|r| < 1$.
De plus, si elle est non nulle et convergente, alors sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-r}$$

Démonstration

Méthode

Les séries géométriques ***sont d'une importance primordiale*** !
En voici deux utilisations très fréquentes :

- lorsqu'une série est de la forme $\sum f(n)r^n$, il peut être fructueux de considérer la fonction $S_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \sum f(n)x^n$ et de tenter d'exprimer S_n à l'aide de la série géométrique $\sum x^n$ puis d'évaluer S_n pour $x = r$;
- nous verrons une autre utilisation de la comparaison à des séries géométriques -notamment de la majoration d'une série à termes positifs par une série géométrique- au paragraphe III..

Ex. 20.7 Nature (et somme si convergence) de la série $\sum \frac{n}{2^n}$.
Même question pour la série $\sum \frac{n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$.

Cor. 20.7

II.6. Suites et séries télescopiques

Proposition 20.12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Démonstration

Méthode : Sommation d'une série en utilisant des sommes télescopiques

Le théorème précédent paraît anodin mais est souvent utilisé pour calculer la valeur de la somme d'une série, notamment lorsque celle-ci a pour terme général une fraction rationnelle. En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, il apparaît parfois une série télescopique dont la somme peut être calculée.
Nous verrons aussi à l'exercice 20.11 une utilisation directe de cette proposition.

Ex. 20.8 Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Cor. 20.8

Ex. 20.9 (Cor.) En utilisant l'exercice précédent, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

III. Séries à termes positifs

III.1. Définition

Définition 20.13 (Série à termes positifs)

On dit que $\sum u_n$ est ***une série à termes positifs*** ou plus simplement est ***à termes positifs*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

III.2. Théorème de convergence monotone

Théorème 20.14

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

III.3. Comparaison entre séries et intégrales

Théorème 20.15

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Méthode

Nous avons déjà utilisé le théorème précédent pour déterminer la nature de la ***série harmonique*** $\sum \frac{1}{n}$.
En pratique, comme dans l'exemple 20.6, ce théorème permet dans le cas où la série est divergente d'obtenir ***non seulement la divergence de la série***, mais aussi ***un équivalent*** de $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.
Dans le cas des séries convergentes en revanche, ce théorème permet de majorer la série donc de prouver sa convergence, mais ne donne pas la valeur de sa somme.

Ex. 20.10 Soit $r \in \mathbb{R}$.

Déterminer suivant la valeur de r la nature de la série $S = \sum \frac{1}{n^r}$ et donner un équivalent de S_n lorsqu'elle diverge.

Cor. 20.10

III.4. Séries de Riemann

Définition 20.16 (Séries de Riemann)

On appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 20.17

La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

La démonstration a été faite à l'exercice 20.10.

III.5. Théorèmes de comparaisons entre séries *à termes positifs*

Proposition 20.18 (Majoration/minoration)

Si u et v sont positives à partir d'un certain rang et si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang alors

- $\sum v_n$ converge$\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge$\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Démonstration

Remarque

Dans la proposition précédente, si l'inégalité est vérifiée à partir du rang 0, on peut de plus affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ en cas de convergence.

Proposition 20.19 (Nature de séries à termes *positifs équivalents*)

Si u et v sont positives et si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

III.6. Exemples

Ex. 20.11 Soit x la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que x_n converge et en déduire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Cor. 20.11

Ex. 20.12 Nature des séries suivantes :

$S = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3-1}}$ $\quad T = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $\quad U = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+\ln n}$ $\quad V = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ $\quad W = \sum n^3 e^{-n}$

Cor. 20.12

III.7. Complément : comparaison à une série géométrique

Proposition 20.20 (Critère de d'Alembert)

Soit $S = \sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $r \in]0;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1$ alors S converge ;
- si à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors S diverge.

Démonstration

Ex. 20.13

1) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{(2n)!}$?
2) On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
   Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.

IV. Séries absolument convergentes

IV.1. Définition

Définition 20.21 (Convergence absolue)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

IV.2. Propriété

Théorème 20.22

Toute série absolument convergente est convergente. De plus, on a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Méthode

Lorsqu'une série ***n'est pas à termes positifs***, le théorème précédent donne souvent un moyen simple de démontrer sa convergence.
Attention cependant ! Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes !

Ex. 20.14 Soit $S = \sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

1) S est-elle absolument convergente ?

2) Montrer que S est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Cor. 20.14

Ex. 20.15 (Cor.) Nature et somme en cas de convergence de $S_n = \sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

Ex. 20.16 Soient $z \in \mathbb{C}$ et $S(z) = \sum n^2 z^n$.

1) Pour quelles valeurs de z la série est-elle absolument convergente ?

2) Calculer, dans le cas où elle est absolument convergente, sa somme.

Cor. 20.16

IV.3. Corollaire

Corollaire 20.23

Si (u_n) est une suite complexe, (v_n) une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

V. Applications

V.1. Développement décimal d'un nombre réel

Définition 20.24 (Développement décimal)

On appelle ***développement décimal*** d'un nombre réel r toute écriture de r sous la forme

$$r = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant n_0$, $a_n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Remarque

Le développement décimal d'un nombre réel n'est rien d'autre que son écriture décimale habituelle à l'aide des chiffres arabes.

Ex. 20.17 Que valent $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n}$ et $b = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 142857.10^{-6n}$?

Cor. 20.17

Définition 20.25 (Développement décimal propre)

On dit que le développement décimal d'un nombre réel est ***propre*** si pour tout $N \geqslant n_0$, il existe $n \geqslant N$ tel que $a_n \neq 9$.

Remarque

Autrement dit, le développement décimal d'un nombre réel est propre s'il ne se termine pas par une suite infinie de 9.

Théorème 20.26 (Admis conformément au programme)

Tout nombre réel possède un unique développement décimal propre.

Ex. 20.18 Montrer que le développement décimal d'un nombre réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce nombre réel est rationnel.

V.2. Pour le plaisir : formule de Stirling

Ex. 20.19 On appelle intégrales de Wallis les intégrales de la forme

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer W_0, W_1, W'_0 et W'_1.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n = W'_n$.
3) Obtenir une formule de récurrence à l'aide d'une intégration par partie.

Cor. 20.19

Ex. 20.20 Les exercices 20.19 et 20.11 ont conduit aux résultats suivants :

- $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ vérifie pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$;
- il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exprimer W_{2n} à l'aide de factoriels puis montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

VI. Correction des exercices

Cor. 20.5 : La suite $u_n = \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ est 7−périodique, donc la suite extraite $\left(\sin\left((7n+1)\frac{2\pi}{7}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$. Donc,
Ou bien la suite u ne possède pas de limite,
Ou bien sa limite vaut $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$.
Dans les deux cas la série $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ ***diverge grossièrement*** puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Cor. 20.9 : Pour tout entier $n > 1$, $0 < \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{(n-1)n}$ (E_1).

Or, d'après l'exercice 20.8, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)n}$ converge vers 1 en croissant (puisqu'on somme des termes positifs).

De plus, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est aussi une série croissante (puisque son terme général est positif) qui converge ***si et seulement si elle est majorée*** (par théorème de convergence monotone).

En utilisant l'encadrement (E_1), on a donc

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n-1)n} \leqslant 1+1$$

Donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente et l'encadrement (E_1) permet d'affirmer que

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$$

Cor. 20.15 : Soit $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ les séries extraites de S de rangs pairs et impairs.
$\forall n \in \mathbb{N}$,

- $S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{-1}{2(2n+1)+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$;
- $S_{2n+2} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2(2n+2)+1} + \frac{-1}{2(2n+1)+1} + S_{2n} = S_{2n} + \frac{4n+3-4n-5}{(4n+3)(4n+5)}$
  donc la série $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
- On démontre de même que la série $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Les deux séries extraites sont donc adjacentes, donc convergentes et ont même somme.

Comme il s'agit des séries extraites de rangs pairs et impairs, la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est elle aussi convergente.

Pour obtenir la valeur de la limite, on utilise $\operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$:

on a donc $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ car $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$

c'est-à-dire $\left|\dfrac{\pi}{4} - S_n\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3}$.

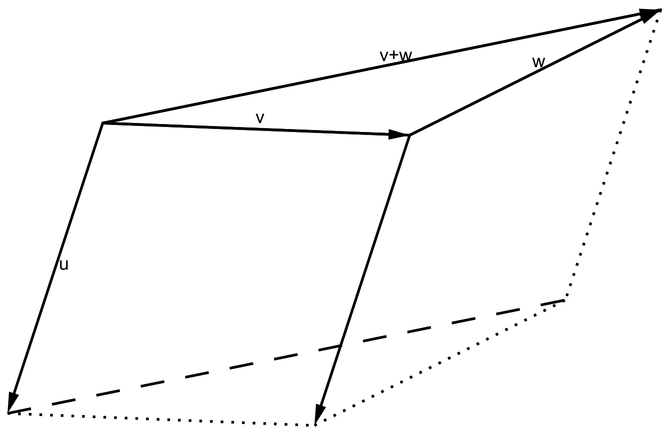
Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Maths - Chapitre 21

Déterminant

Ex. 21.1 Soit $ABCD$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_1$ et $BCEF$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}_2$. Quelles sont les valeurs possibles de l'aire du parallélogramme $AFED$?

La notion de déterminant est une généralisation des notions d'aire et de volume. Comme dans les précédents chapitres d'algèbre, nous allons le définir ***par ses propriétés opératoires***. Il est cependant important de comprendre que ces propriétés résultent de l'origine géométrique de cette notion. Pour comprendre cela, intéressons-nous à la notion d'aire.
Considérons le plan $E = \mathbb{R}^2$ et u, v deux vecteurs de E. Notons $\mathcal{A}(u, v)$ l'aire ***algébrique*** (c'est-à-dire que cette aire peut-être positive ou négative) du parallélogramme formé par les vecteurs u et v.



- ***L'aire est bilinéaire***
  $\mathcal{A}(u, v + w) = \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w)$: ....
  $\mathcal{A}(u, \lambda v) = \lambda \mathcal{A}(u, v)$: ....
- ***L'aire d'un parallélogramme aplati est nulle*** : $\mathcal{A}(u, u) =$.
- ***Ceci a pour conséquence que l'aire est antisymétrique*** :
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .. d'une part et
  $\mathcal{A}(u + v, u + v) =$ .... d'autre part, d'où l'on déduit que
  ....

Le but de ce chapitre est de montrer que cette notion, si on l'envisage comme nous venons de le faire au travers de ses propriétés opératoires, se généralise non seulement aux calculs de

volumes de l'espace $\mathbb{R}^3$ mais aussi aux ***espaces de dimensions supérieures*** : c'est la notion de déterminant d'une matrice carrée.
Nous verrons ensuite les propriétés opératoires de cette notion, conduisant notamment à un certain nombre de méthodes de calcul pour le déterminant d'une matrice carrée. Enfin, nous verrons que cette notion se généralise davantage encore en définissant le déterminant des endomorphismes en dimension finie.
Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Déterminant

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Déterminant d'une matrice carrée de taille n	
Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes : • f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ; • f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ; • $f(I_n) = 1$.	La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors-programme. On motivera géométriquement cette définition pour $n \in \{2; 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera $\det(A)$ le nombre $f(A)$ pour toute matrice carrée A.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.	
Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.	Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.
Application : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.	
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.	La formule de changement de bases est hors-programme.
Caractérisation des bases. Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.	
Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.	Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes et des colonnes.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. Comatrice hors-programme.
c) Déterminant d'un endomorphisme	
Traduction pour les déterminants d'endomorphisme des propriétés vues pour le déterminant d'une matrice.	

II. Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

II.1. Théorème-définition

Théorème 21.1

Il existe une ***unique*** application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- f est linéaire par rapport à ***chaque colonne de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|\lambda C_i + \mu C_i'|...|C_n\right) = \lambda f\left(C_1|..|C_i|...|C_n\right) + \mu f\left(C_1|..|C_i'|...|C_n\right)$
- f est antisymétrique par rapport aux ***colonnes de sa variable*** :
  $f\left(C_1|..|C_i|...|C_j|...|C_n\right) = -f\left(C_1|..|C_j|...|C_i|...|C_n\right)$
- $f(I_n) = 1$

Démonstration hors programme

Notation

Cette application est notée det.

Remarque

La dernière condition revient en fait à se donner ....

II.2. Propriétés

Propriété 21.2

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration

Corollaire 21.3

Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul.

Propriété 21.4

Quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration

Propriété 21.5

Ajouter à une colonne d'une matrice ***une combinaison linéaire des autres colonnes*** ne change pas la valeur de son déterminant.

Démonstration

Corollaire 21.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux.

Démonstration

Ex. 21.2 (Cor.)

1) Vrai ou faux : soit A une matrice carré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont on note $C_1, C_2, ..., C_n$ les colonnes. Alors

$$\det A = \det(C_1 - C_2|C_2 - C_3|...|C_{n-1} - C_n|C_n - C_1)$$

2) Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$.

3) Calculer $\det \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$.

II.3. Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 21.7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Démonstration

Ex. 21.3

1) Calculer $\det \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$.

2) Donner les valeurs de x pour lesquelles $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

3) Dans les cas où A_x n'est pas inversible, calculer $\operatorname{Ker}(A_x)$ et $\operatorname{rg}(A_x)$.

II.4. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 21.8

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle ***déterminant de la famille $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$*** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ le déterminant de la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$.
Autrement dit,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})\right)$$

Théorème 21.9 (Caractérisation des bases)

Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

Démonstration

II.5. Déterminant d'un produit de matrices

Propriété 21.10

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration

Corollaire 21.11

Quelle que soit la matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration

II.6. Déterminant de la transposée

Propriété 21.12

Quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

Démonstration

Corollaire 21.13

Les théorèmes et propriétés du déterminant énoncées sur les colonnes de sa variable sont aussi valables pour les lignes de sa variable.

II.7. Développement suivant une ligne ou une colonne

Notation

Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A en ôtant à A sa i-ème ligne et sa j-ème colonne.
Autrement dit, $A_{i,j} = (a_{k,l})_{\substack{(k,l)\in[\![1;n]\!]^2 \\ k\neq i, l\neq j}}$.

Propriété 21.14 (Développement suivant une ligne ou une colonne)

Quel que soit $i \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

De même, quel que soit $j \in [\![1;n]\!]$ et quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\left(A_{i,j}\right)$$

Démonstration hors programme

Ex. 21.4 Calculer le déterminant de la matrice $M_n(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{pmatrix}$.

Donnons à titre d'exemple l'application de cette formule au calcul des matrices d'ordre 3 :

Méthode : Techniques de calcul du déterminant

1) Développement par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) Développement par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3) Développement par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4) Développement par rapport aux lignes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5) En pratique on mémorise le développement suivant une ligne ou une colonne en retenant le schéma

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots & \\ - & + & - & \ddots & \\ + & - & + & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & - \\ & & & - & + \end{vmatrix}$$

Méthode : Calcul pratique du déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n quelconque, les propriétés précédentes sont ***généralement*** utilisées selon l'une des deux méthodes suivantes :

1) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener, à l'aide de la propriété précédente, au calcul du déterminant d'une matrice d'ordre inférieur (souvent $n-1$) et on fait une récurrence :

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \lambda \det(A_{n-1})$$

2) on effectue des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes pour se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire qui est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Une des combinaisons linéaires des lignes ou des colonnes que l'on rencontre souvent est d'effectuer la somme des lignes (ou des colonnes) dans l'une des lignes (respectivement colonne) de la matrice de départ :

$$\det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|C_n\right) = \det\left(C_1|C_2|...|C_{n-1}|\sum_{j=1}^{n} C_j\right)$$

Ex. 21.5 Soit $A(X) = \begin{pmatrix} 1+X^2 & X & 0 & \cdots & 0 \\ X & 1+X^2 & X & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & X & 1+X^2 & X \\ 0 & \cdots & 0 & X & 1+X^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $D(X) = \det A(X)$ est un polynôme, donner son degré.
Calculer $D(X)$.

III. Déterminant d'un endomorphisme

III.1. Définition

Théorème 21.15 (Indépendance vis-à-vis de la base choisie)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_n)$ deux bases de E, f un endomorphisme de E.
Alors

$$\det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)\big)$$

Démonstration

Définition 21.16 (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un espace vectoriel de dimension fini. On appelle ***déterminant d'un endomorphisme*** le déterminant de sa matrice ***dans une base quelconque de*** E (on choisit la même base au départ et à l'arrivée).

Notation

On note $\det f$ le déterminant de l'endomorphisme f.

III.2. Propriétés

Propriété 21.17

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.
On a les propriétés suivantes :

- $\det(f) \neq 0 \Leftrightarrow f$ est un automorphisme de E ;
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$;
- $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$;
- soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E :
$$\det_{\mathcal{B}}\big(f(\mathcal{F})\big) = \det(f)\det_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}\big)$$

Démonstration

Ex. 21.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\psi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array} \right.$.
Calculer $\det \psi$.

Corrections

Cor. 21.2 :

1) $$\begin{aligned} \det(C_1 - C_2, ..., C_{n-1} - C_n, C_n - C_1) &= \det\left(C_1 - C_2, ..., C_{n-1} - C_n, \sum_{k=1}^{n} C_k - \sum_{k=1}^{n} C_k\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
Les deux déterminants sont égaux si et seulement si A est non inversible.

2) On utilise la multilinéarité du déterminant :
$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & n & n \end{pmatrix} &= n\det\begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & 1 \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \\ &= n\det\begin{pmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} n! \end{aligned}.$$

3) $$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} &= a_1\det\begin{pmatrix} 1 & a_1 - a_2 & a_1 - a_3 & \cdots & a_1 - a_n \\ 1 & 0 & a_2 - a_3 & \cdots & a_2 - a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_3 - a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \\ &= a_1 \prod_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \end{aligned}$$

Maths - Chapitre 22

Variables aléatoires

Lors d'une expérience aléatoire, il est fréquent que l'on souhaite étudier une ***variable dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire***. De telles variables sont appelées ***variables aléatoires***. L'objet de ce chapitre est d'en décrire leurs principales utilisations et propriétés. Il va de soi que le chapitre 19 sur les probabilités est un pré-requis au présent chapitre, ainsi que le chapitre 16 sur le dénombrement.

Les variables aléatoires peuvent prendre des valeurs diverses, notamment des valeurs non numériques. Par exemple, on peut imaginer un dé ***bien équilibré*** à 6 faces dont une des faces est rouge, deux autres bleues et les trois dernières jaunes. ***L'hypothèse d'équiprobabilité*** (dé bien équilibré) s'écrit - en supposant qu'on a attribué un numéro à chaque face - sur l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ des résultats possibles pour chaque événement élémentaire :

$$\forall i \in [\![1;6]\!], \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

La notion de variable aléatoire permet alors de définir de façon simple et efficace ***les événements que l'on cherche à étudier***. Sur l'exemple précédent, on peut par exemple définir la variable aléatoire C donnant la couleur obtenue lors du jet de dé de la façon suivante :

> La variable aléatoire C est la ***fonction*** qui à chaque événement élémentaire associe la couleur de la face obtenue :
> $$C : \begin{cases} \Omega = [\![1;6]\!] & \rightarrow & \{rouge; bleu; jaune\} \\ \omega = 1 & \mapsto & rouge \\ \omega \in \{2;3\} & \mapsto & bleu \\ \omega \geqslant 4 & \mapsto & jaune \end{cases}$$

Une autre numérotation des faces du dé conduirait ***à une autre variable aléatoire modélisant la même expérience***.

Les ***événements sont***, on le rappelle, ***des parties de l'univers*** Ω. L'événement « la face est jaune » est par exemple la partie $E = \{4;5;6\} \subset \Omega$. Autrement dit, $E = C^{-1}(jaune)$: les événements correspondant à des valeurs données d'une variable aléatoire ***sont les images réciproques de ces valeurs par la variable aléatoire***.

Une première partie du chapitre consistera à définir de la façon la plus générale possible les notions que nous venons d'entrevoir. Nous y étudierons notamment certaines situations conduisant à des variables aléatoires dont les propriétés sont fréquemment observées.

Dans une seconde partie, nous étudierons le cas particulier de situations conduisant à la définition de deux variables aléatoires distinctes (ou plus).

Enfin, nous préciserons le cas particulier et cependant très important des ***variables aléatoires à valeurs réelles***, c'est-à-dire celles dont les valeurs sont des nombres réels.

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini. On rappelle qu'un événement E est ***une partie de*** Ω, c'est-à-dire $E \subset \Omega$ ou encore $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ et que $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans

$[0;1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour deux événements ***incompatibles*** A et B - c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$ -, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

I. Programme officiel

Variable aléatoire sur un univers fini

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notations $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.	L'application $\mathbb{P}_X$ est entièrement définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
b) Lois usuelles	
Loi uniforme.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ où $E = X(\Omega)$.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès/échec d'une expérience.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remises dans un modèle d'urne.
c) Couples de variables aléatoires	
Couples de variables aléatoires.	
Loi conjointe, lois marginales.	La loi conjointe de X et de Y est la loi de $(X;Y)$. Les lois marginales de $(X;Y)$ sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couples de variables aléatoires indépendantes.	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.	

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une famille (finie) de n variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1+X_2+...+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.	
Si X et Y sont indépendantes et si f est une application définie sur $X(\Omega)$, g une application définie sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire X.	Interprétation en terme de moyenne pondérée.
Relation $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$.	
Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie de Ω, d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, une loi de Bernoulli, une loi binomiale.	
Propriétés de l'espérance : linéarité, croissance.	Application au calcul de $\mathbb{E}(X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
Théorème de transfert : $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
f) Variance et écart-type	
Variance, écart-type.	Interprétation comme indicateur de dispersion.
Relation $\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Relation $\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	

II. Variables aléatoires

II.1. Définitions

Définition 22.1

Soit U un ensemble. On appelle ***variable aléatoire*** toute application de Ω dans U.
Lorsque U est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.

Notation

Soit $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire. Soit V une partie de U et u un élément de U.
On note $(X \in V)$ l'événement $X^{-1}(V)$ et $(X = u)$ l'événement $X^{-1}(\{u\})$.
Ici $X^{-1}(V)$ et $X^{-1}(\{u\})$ désignent ....
Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $(X \leqslant u)$ l'événement $X^{-1}(\{x \in U, x \leqslant u\})$.

Exemple : dans l'exemple donné en introduction, $(C = rouge)$ désigne l'événement $\{1\}$.
$(C = jaune)$ désigne l'événement ....

Remarque

L'ensemble d'arrivée est rarement précisé. Généralement, on le notera simplement $X(\Omega)$.
Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est aussi un ensemble fini dont le cardinal est ....
....
Notamment, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ de sorte à ce que $\Omega = \{\omega_i, i \in [\![1;n]\!]\}$, $X(\Omega) = \{x_k, k \in [\![1;p]\!]\}$ avec ......

II.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition 22.2

Soit X une variable aléatoire de (Ω, P) dans $X(\Omega)$.
On appelle ***loi de la variable aléatoire*** X que l'on note généralement $\mathbb{P}_X$, l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{lll} X(\Omega) & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

On a donc : $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x\}\right) = \displaystyle\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\omega)$

Exemple : donner la loi de la variable aléatoire C définie en introduction.

Propriété 22.3

$\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$ est un espace probabilisé. Notamment $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration

Remarque

IMPORTANT : plusieurs expériences aléatoires, pour lesquelles on définit plusieurs variables aléatoires, peuvent conduire ***aux mêmes espaces probabilisés*** $\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$.
Par exemple, on jette une pièce de monnaie et on note X_1 la variable aléatoire qui vaut 0 si la pièce tombe sur *face* et 1 si elle tombe sur *pile*. Ou encore, on lance un dé et on note X_2 la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat est inférieur ou égal à 3 et qui vaut 1 si le résultat est supérieur ou égal à 4.
Dans les deux cas, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$. Les deux expériences aléatoires et les deux variables aléatoires ont beau être différentes, ***les lois sont identiques***.
Pour cette raison, les lois des variables aléatoires seront souvent étudiées indépendamment de toute expérience aléatoire concrète.

Ex. 22.1 On lance un dé, bien équilibré, n fois d'affilée. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers.

1) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2) Le dé étant bien équilibré, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Expliquer comment elle se traduit pour les événements élémentaires de Ω.
3) Préciser l'ensemble image $X(\Omega)$.
4) Donner la loi de X, c'est-à-dire, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$.

Ex. 22.2 Soit n un entier strictement positif, soit S une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que

- $S(\Omega) = [\![1; 2n]\!]$;
- $\forall s \in [\![1; 2n]\!], \mathbb{P}(S = s) = \dfrac{s}{n(2n+1)}$.

1) Pourquoi peut-on affirmer que la loi de S est bien définie ?
2) Calculer les probabilité suivantes :
   $\mathbb{P}(S \leqslant n)$ $\quad$ $\mathbb{P}(S > n)$ $\quad$ $\mathbb{P}(S \text{ est pair})$ $\quad$ $\mathbb{P}\left((S \leqslant n/2) \cup (S > 3n/2)\right)$
3) Pour chacune des probabilités de l'exercice précédent, donner un développement asymptotique en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

II.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 22.4

Soit U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire et $f : U \to V$ une fonction.
$Y = f \circ X : \Omega \to V$ est une variable aléatoire appelée ***image de la variable aléatoire*** X ***par la fonction*** f.
On note habituellement $f(X)$ cette variable aléatoire et $\mathbb{P}_{f(X)}$ la loi associée.

Remarque

$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \mathbb{P}_X\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}_X(x)$ mais aussi

$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f \circ X = y\big) = \mathbb{P}\big((f \circ X)^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{\omega \in (f\circ X)^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(\omega).$

Ex. 22.3 Soit n un entier strictement positif. Une urne contient n boules noires et n boules rouges.
On tire toutes les boules, une à une, sans remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir la dernière boule rouge et Y le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.

1) Que vaut Ω ?
2) Que vaut $X(\Omega)$?
3) Donner la loi de X.
4) Donner Y en fonction de X et en déduire la loi de Y.

II.4. Exemples usuels

a) Loi uniforme

Définition 22.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X ***suit la loi uniforme sur*** $[\![1;n]\!]$ si

$$X(\Omega) = [\![1;n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([\![1;n]\!]\big)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on tire au hasard (avec équiprobabilité) un objet numéroté parmi*** n ***objets*** : la variable aléatoire donne ***le numéro de l'objet tiré***. Les exemples classiques sont la variable aléatoire donnant la face d'un dé (bien équilibré) lancé, ou donnant le numéro d'une boule tirée dans une urne, etc...

Ex. 22.4 On lance $k \in \mathbb{N}^*$ dés bien équilibrés, et on suppose que les résultats obtenus sur les dés sont mutuellement indépendants.
On note X_k la variable aléatoire donnant la somme des résultats obtenus sur chaque dé.

1) Quelle est la loi suivie par X_1 ?
2) Que vaut $X_k(\Omega)$?
3) Exprimer, pour $i \in [\![k+1;6k+6]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = i\right)$ en fonction des $\left(\mathbb{P}\left(X_k = j\right)\right)_{j \in X_k(\Omega)}$.
Indication : on pourra traiter séparément les cas $i \in [\![k+1;k+5]\!]$, $i \in [\![k+6;6k+1]\!]$ et $i \in [\![6k+2;6k+6]\!]$.
4) Donner la loi de X_2 et celle de X_3.

b) Loi de Bernoulli

Définition 22.6

Soit $p \in [0;1]$. On dit que X ***suit la loi de Bernoulli de paramètre*** p si

$$X(\Omega) = \{0;1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X=1) = p, \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***la probabilité de réussir une expérience aléatoire vaut*** p : la variable aléatoire vaut 1 (VRAI) en cas de réussite, 0 (FAUX) en cas d'échec.

c) Loi binomiale

Définition 22.7

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$. On dit que X ***suit la loi binomiale de paramètres*** n ***et*** p si

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque

Cette loi modélise les situations où ***on effectue*** n ***fois une expérience aléatoire dont la probabilité de succès vaut*** p : la variable aléatoire donne ***le nombre de succès***. Un exemple classique est la variable aléatoire donnant le nombre de lettres A dans un mot formé de n lettres choisies dans $\{A;B\}$: dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$ la plupart du temps. Cet exemple est par ailleurs souvent utilisé dans d'autres situations (marche aléatoire sur une droite, évolution du score de deux joueurs à un jeu de hasard, tirages avec remise dans une urne contenant deux types d'objets, etc...).

Ex. 22.5 On lance n fois d'affilée un dé bien équilibré.
Lorsque le dé tombe sur 1 ou sur 2, on considère ce lancer comme un ***échec*** - noté E.
Lorsque le dé tombe sur 6, on considère ce lancer comme un ***coup critique*** - noté C.
Sinon, on considère le lancer comme un ***lancer standard*** - noté S.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre d'échecs, Y la variable aléatoire comptant le nombre de coups critiques et Z la variable aléatoire comptant le nombre de lancers standards.

1) Donner la loi de X.
2) Donner la loi de Y.
3) Donner, de deux manières différentes, la loi de Z : en l'interprétant comme une variable aléatoire suivant une loi binomiale, ou en remarquant que $Z = n - X - Y$.
4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], 3^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k} 2^i$.

III. Variables aléatoires multiples, indépendance

III.1. Couple de variables aléatoires

Définition 22.8

Soient U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ et $Y : \Omega \to V$ deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω.
On appelle ***couple de variables aléatoires*** $(X;Y)$ la variable aléatoire

$$(X;Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & U \times V \\ \omega & \mapsto & (X(\omega);Y(\omega)) \end{array} \right.$$

Par définition, un couple de variables aléatoires définies sur un même univers Ω est une variable aléatoire définie sur Ω elle aussi.

Définition 22.9 (Loi conjointe, lois marginales)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω, $(X;Y)$ le couple de variables aléatoires qu'elles définissent.
On appelle ***loi conjointe de*** X ***et de*** Y la loi de $(X;Y)$.
On appelle ***lois marginale de*** $(X;Y)$ les lois de X et de Y.

Ex. 22.6

1) on lance un dé bien équilibré.
On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est pair, et qui vaut 1 si le résultat est impair.
On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du lancer est strictement inférieur à 4, et qui vaut 1 sinon.
Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X;Y)$.
Où trouve-t-on la loi conjointe ? Où trouve-t-on les lois marginales ?

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

2) on lance successivement deux pièces de monnaie bien équilibrées.
On note X la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du premier lancer est "*pile*", et qui vaut 1 sinon.
On note Y la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat du second lancer est "*pile*", et qui vaut 1 sinon.
Remplir le tableau suivant donnant les lois de X, de Y et de $(X;Y)$.

$Y = ...$ / $X = ...$	0	1	$\mathbb{P}(X = ...)$
0			
1			
$\mathbb{P}(Y = ...)$			

Remarque

Comme le prouve l'exercice précédent, la donnée des lois marginales de $(X;Y)$ .... En effet, deux lois conjointes distinctes, peuvent se traduire par les mêmes lois marginales.

III.2. Loi conditionnelle

Définition 22.10

Soient $(X;Y)$ un couple de variables aléatoires définies sur Ω
et $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.
On appelle ***loi conditionnelle de Y sachant que*** $(X = x)$ la probabilité

$$\forall i \in Y(\Omega), \mathbb{P}_{(X=x)}(Y = i) = \mathbb{P}(Y = i|X = x) = \frac{\mathbb{P}\big((X;Y) = (x;i)\big)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

III.3. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 22.11

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont ***indépendantes*** si

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}\big((X;Y) = (x;y)\big) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

Propriété 22.12

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\forall A \in \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big), \forall B \in \mathcal{P}\big(Y(\Omega)\big), \mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Démonstration

Propriété 22.13

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et si f et g sont deux applications respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Démonstration

III.4. Indépendance mutuelle

Définition 22.14

Soit n un entier strictement positif et $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille (finie) de variables aléatoires sur un même univers Ω.
On dit que la famille $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est formée de ***variables aléatoires mutuellement indépendantes*** lorsque

$$\forall (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque

On pourrait, comme pour la notion d'indépendance mutuelle d'événements (voir section VI.2. du chapitre 19) définir aussi une notion d'***indépendance deux à deux*** pour une famille de variables aléatoires.
On montrerait alors, comme dans le cas des événements, que l'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance mutuelle.

Ex. 22.7 (Cor.) Donner un exemple d'expérience aléatoire, où trois variables aléatoires X, Y, Z sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.

Propriété 22.15

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors

$\forall (A_1, ..., A_n) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P}\left(X_i(\Omega)\right),$ les événements $(X_i \in A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Propriété 22.16

Si $(X_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, chacune suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$, alors

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$$

Démonstration

IV. Espérance, variance, écart-type

IV.1. Espérance

Définition 22.17

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***espérance de*** X et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

L'espérance est une ***moyenne***, plus précisément la moyenne des valeurs prises par X, pondérée par sa probabilité d'apparition.
En cela, l'espérance donne la valeur moyenne prise par la variable aléatoire lorsqu'on effectue un grand nombre d'expérience aléatoire.

Ex. 22.8 Pour chacune des lois ci-dessous, définies dans les précédents exercices, calculer son espérance :
22.4 : $\forall i \in [\![1; 6]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{6}$.
22.4 : $\forall i \in [\![2; 12]\!], \mathbb{P}(X_2 = i) = \frac{\min(i-1; 13-i)}{36}$.
22.5 : $\forall k \in [\![0; n]\!], \mathbb{P}(Z = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.
22.1 : $\forall i \in [\![0; n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \binom{n}{i}\frac{5^{n-i}}{6^n}$.
22.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0; n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \frac{\binom{2n-i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.
22.6 : $\forall i \in [\![0; 1]\!], \forall j \in [\![0; 1]\!], \mathbb{P}((X; Y) = (i; j)) = \frac{3 + (-1)^{i+j+1}}{12}$ en travaillant dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

Propriété 22.18

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$$

Démonstration

Ex. 22.9 Calculer à nouveau l'espérance, en utilisant la seconde expression de l'espérance :
22.4 : $\Omega = [\![1; 6]\!]^2$, $X((i; j)) = i + j$, $\mathbb{P}((i; j)) = \frac{1}{36}$.

IV.2. Exemples

Proposition 22.19

Si X est une variable aléatoire constante, égale à x, alors $\mathbb{E}(X) = x$.

Démonstration

Proposition 22.20

Soit $A \subset \Omega$ et $X = \mathbb{1}_A$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$$

Démonstration

IV.3. Propriétés de l'espérance

Propriété 22.21 (Linéarité)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 22.22 (Croissance)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On suppose de plus que $X \geqslant Y$, c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant Y(\omega)$.
Alors

$$\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Propriété 22.23 (Produit de variables aléatoires indépendantes)

Si X et Y sont ***deux variables aléatoires indépendantes*** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration

Remarque

La propriété précédente est fausse si les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.
Sa réciproque est fausse.

Ex. 22.10 Donner un exemple de couple de variables aléatoires $(X;Y)$ telles que $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Donner un exemple de couple de variables aléatoires ***non indépendantes*** $(U;V)$ telles que $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)$.

Ex. 22.11 Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $a = \min(X(\Omega))$ et $b = \max(X(\Omega))$.
Justifier l'existence de a et b.
Montrer que $a \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant b$.

IV.4. Théorème de transfert

Théorème 22.24

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, f une fonction réelle définie sur $X(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration

IV.5. Variance et écart-type

Définition 22.25

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.
On appelle ***variance de*** X, et on note $\mathbf{V}(X)$, l'espérance du carré de la différence entre X et son espérance. Autrement dit :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

On appelle ***écart-type de*** X, et on note $\sigma(X)$ ou σ_X, la racine carrée de la variance de X :

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

Propriété 22.26

Avec les hypothèses de la définition précédente :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration

Propriété 22.27

Avec les hypothèses de la définition précédente, quels que soient les réels a et b :

$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

Démonstration

Ex. 22.12 Pour chacune des lois ci-dessous, calculer sa variance :

22.4 : $\forall i \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X_1 = i) = \frac{1}{n}$.

22.4 : $X_2 = A + B$ où A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

22.5 et 22.1 : $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$.

22.3 : soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall i \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{\binom{2n-i-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

IV.6. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Lemme 22.28 (Inégalité de Markov)

Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ ***à valeurs positives***.
Autrement dit $I = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
Alors

$$\forall u > 0, \mathbb{P}(Y \geqslant u) \leqslant \frac{\mathbb{E}(Y)}{u}$$

Démonstration

Théorème 22.29

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$.
Quel que soit le réel ***strictement positif*** α, on a

$$\mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \alpha\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

Démonstration

Remarque

Le théorème précédent précise le rôle de l'écart-type comme indicateur de la dispersion d'une variable aléatoire : la probabilité que la distance entre la valeur d'une variable aléatoire et son espérance soit supérieure à $\alpha > 0$ est majorée par le quotient $\dfrac{\sigma^2}{\alpha^2}$. Plus α est grand, plus cette probabilité est faible.
Pour $\alpha = 2\sigma$ par exemple, elle est inférieure à $\frac{1}{4}$.

V. Lois usuelles

V.1. Variable aléatoire constante

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

V.2. Fonction indicatrice d'une partie de Ω, loi de Bernoulli

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

V.3. Loi uniforme

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : ....

Écart-type : ....

V.4. Loi binomiale

Définition : ....

Utilisation : ....

Loi : ....

Espérance : ....

Variance : . . . .
Écart-type : . . . .

VI. Correction des exercices

Cor. 22.7 : On lance deux pièces et on note
X la variable aléatoire qui vaut 1 si la première pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la seconde pièce donne *pile*, 0 sinon ;
Z la variable aléatoire qui vaut 1 si les deux lancers sont identiques, 0 sinon.
On vérifie que les trois v.a. sont deux à deux indépendantes mais non mutuellement indépendantes.
Par exemple $\mathbb{P}\big((X;Y;Z)=(0;0;0)\big)=0\neq\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$.

Maths - Chapitre 23

Produit scalaire et espace euclidien

Tout comme la notion de vecteur, la notion de produit scalaire arrive tardivement en mathématiques, au tournant des XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles.
Cependant, nombre de théorèmes de ce chapitre ont une interprétation géométrique simple et étaient connus bien avant l'apparition du produit scalaire. En effet, comme pour les espaces vectoriels, il faut comprendre d'emblée que le principal changement par rapport à la géométrie traditionnelle concerne la nature des objets qui sont considérés comme fondamentaux :

- les notions de ***vecteurs et de scalaires***, ainsi que les ***opérations*** entre eux, sont les objets fondamentaux de la théorie des ***espaces vectoriels***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : points, droites, plans, parallélisme.
- Les notions de ***produit scalaire et de norme*** sont les notions fondamentales de la théorie des ***espaces euclidiens***. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : ***distance, angle et orthogonalité***.

Le principal avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est qu'il se généralise à des objets qui sortaient jusque-là du cadre de la géométrie traditionnelle. Comme nous l'avons vu, $(\mathcal{F}(I,\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes aussi, de même que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. L'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, l'ensemble des n-uplet, etc... munis des opérations habituelles en sont d'autres exemples.
Comme nous allons le voir, si l'on parvient à définir sur ces espaces vectoriels des produits scalaires, les notions géométriques de distance, d'angle ou d'orthogonalité pourront elle-même y être définies et généralisées.
Dans tout ce qui suit, $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

I. Programme officiel

Produit scalaire et espaces euclidiens

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens.	Notations $< x, y >$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$. $\leftrightarrows$ PC, SI : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire.	Les étudiants doivent savoir développer $\\|u \pm v\\|^2$.
Inégalité de Cauchy-Schwartz et cas d'égalité.	Cas particuliers des exemples de référence.
Séparation, homogénéité, inégalité triangulaire (avec cas d'égalité).	
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, orthonormales/orthonormées. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées d'un espace euclidien	
Existence de bases orthonormées. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions de la norme et du produit scalaire dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace V de dimension finie. Projecteur orthogonal P_V.	Les étudiants doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de V ou en résolvant le système linéaire découlant de $u_i \perp (x - P_V(x))$ pour tous les vecteurs u_i d'une famille génératrice de V.

Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$,

$$\|P_V(x)\| \leqslant \|x\|$$

$P_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V réalisant le minimum de

$$\{\|x-y\|, y \in V\}$$

La distance de x à V, notée $d(x, V)$, est définie comme étant égale à la valeur de ce minimum.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie.
En dimension finie, dimension de $V^{\perp}$.

II. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

II.1. Produit scalaire

Définition 23.1 (Produit scalaire)

On dit qu'une application $s : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes :

1) ***Symétrie*** : $\forall u, v \in E, s(u, v) = s(v, u)$.
2) ***Bilinéarité*** : $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   - $s(\lambda u + \mu v, w) = \lambda s(u, w) + \mu s(v, w)$;
   - $s(w, \lambda u + \mu v) = \lambda s(w, u) + \mu s(w, v)$.
3) ***Définition*** : $\forall u \in E, s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
4) ***Positivité*** : $\forall u \in E, s(u, u) \geqslant 0$.

En résumé, un produit scalaire sur E est donc une ***forme bilinéaire symétrique définie positive***.

Notation

Plusieurs notations sont utilisée pour un produit scalaire :

$$s(u, v) = (u|v) = \langle u, v\rangle = u \cdot v$$

La notation utilisée dans ce chapitre sera le plus souvent $(u|v)$.

Remarques

- Un produit scalaire étant ***symétrique***, il suffit, après avoir démontré cette symétrie, de vérifier qu'il est linéaire à droite ou à gauche pour démontrer qu'il est bilinéaire.
  En pratique, on vérifiera donc d'abord la symétrie avant de vérifier la linéarité (à droite ou à gauche) dans les exercices visant à exhiber un produit scalaire sur un

espace vectoriel donné.

- Il arrive que l'on définisse plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel. Cette possibilité ne sera que peu utilisée dans ce chapitre mais sera très utilisée en seconde année pour démontrer par exemple une propriété fondamentale des matrices symétriques réelles.

Ex. 23.1 Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (i; j)$ et $\mathcal{B}' = (i'; j')$ deux bases de E.

1) Pour $(u, v) \in E^2$, on note $u = x_1 i + y_1 j$, $v = x_2 i + y_2 j$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}$.
Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$ associe $(u|v) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer qu'il en est de même de l'application $\langle u, v \rangle = x_1' x_2' + y_1' y_2'$, $x_1', y_1', x_2', y_2' \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans $\mathcal{B}'$.
3) Que valent $(i|j)$ et $\langle i', j' \rangle$?
4) On donne $i' = 2i + j$ et $j' = i - 2j$.
Calculer $(i'|i')$, $(i'|j')$ et $(j'|j')$ puis exprimer pour $u, v \in E$ $\langle u, v \rangle$ en fonction de $(u|v)$.

Cor. 23.1

II.2. Espaces préhibertiens réels et espaces euclidiens

Définition 23.2 (Espace préhilbertien réel)

On appelle ***espace préhilbertien réel*** tout $\mathbb{R}$-***espace vectoriel muni d'un produit scalaire***.

Définition 23.3 (Espace euclidien)

On appelle ***espace euclidien*** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** muni d'un produit scalaire.

II.3. Exemples de référence

a) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

Définition 23.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ associe

$$(u|v) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

Ex. 23.2 Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est bien un produit scalaire.

Cor. 23.2

b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$

Ex. 23.3 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et h une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$.
Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Cor. 23.3

Définition 23.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u,v) \in \left(\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})\right)^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 23.4 Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0;3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.
2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

Cor. 23.4

III. Norme associée à un produit scalaire

III.1. Définition

Définition 23.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{cases}$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 23.5 Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.
2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Cor. 23.5

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

III.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 23.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Ex. 23.6 Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$.

Cor. 23.6

III.3. Propriétés de la norme

Propriété 23.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Ex. 23.7

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

III.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\|\,\|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 23.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs u et v*** le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right) \in [0;\pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc...

IV. Orthogonalité en dimension quelconque

Dans cette section, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

IV.1. Définitions

Définition 23.10 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs u, v de E sont ***orthogonaux*** si

$$(u|v) = 0$$

Définition 23.11 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels G et H de E, on dit qu'ils sont ***orthogonaux*** si ***tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre***.
Autrement dit, G et H sont orthogonaux si

$$\forall u \in G, \forall v \in H, (u|v) = 0$$

Définition 23.12 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E, on appelle ***orthogonal de*** G l'***ensemble des vecteurs de*** E ***qui sont orthogonaux à tout vecteur de*** G.
Autrement dit, l'orthogonal de G est l'ensemble

$$\{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$$

Notation

Si deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux, on note $u \perp v$.
Si deux sous-espaces vectoriels G et H de E sont orthogonaux, on note $G \perp H$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel G de E est noté $G^\perp = \{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$.

IV.2. Propriété

Propriété 23.13 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Soit G un sous-espace vectoriel de E. $G^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

IV.3. Familles orthogonales, orthonormales

Définition 23.14 (Famille orthogonale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthogonale*** ou une ***famille de vecteurs orthogonaux*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$$

Remarque

Si $n = 1$, c'est-à-dire si la famille est formée d'un unique vecteur, elle est considérée comme orthogonale.

Définition 23.15 (Famille orthonormale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** ou une ***famille orthonormée*** ou encore une ***famille de vecteurs orthonormés*** si elle est ***orthogonale*** et que ***tout vecteur est de norme égale à 1***.
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!], (u_i|u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ex. 23.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \in [-\pi;\pi] \mapsto \cos(kx)$. On note $\mathcal{F} = (f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ la famille de l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([-\pi;\pi];\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale ?
2) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthonormale ?
   Si ce n'est pas le cas, construire à partir de $\mathcal{F}$ une famille orthonormale.

Cor. 23.8

IV.4. Propriété d'une famille orthogonale

Propriété 23.16 (Liberté d'une famille orthogonale)

Toute famille orthogonale de vecteurs ***non nuls*** est libre.

Démonstration

IV.5. Théorèmes de Pythagore

Théorème 23.17 (Théorème de Pythagore : 1$^{\text{ère}}$ version)

Soient u et v deux vecteurs de E.
$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration

Théorème 23.18 (Théorème de Pythagore : 2ème version)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Démonstration

Important ! Réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore n'est valable que dans le cas de la somme de deux vecteurs. Dans le cas de trois vecteurs ou plus, on peut trouver des contre-exemples.

Ex. 23.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on donne les trois vecteurs $u = (1; 2)$, $v = (0; 2)$ et $w = (0; -1)$.
Que valent $\|u + v + w\|^2$ et $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$?
La famille (u, v, w) est-elle orthogonale ?
Donner un exemple d'une famille de quatre vecteurs qui vérifie l'identité de Pythagore mais qui n'est pas orthogonale.

Cor. 23.9

IV.6. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 23.19

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E.

Quel que soit le vecteur v de E, $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}$.

Démonstration

Méthode : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le théorème précédent permet de construire à partir d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ libre de vecteurs non nuls de E une nouvelle famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ orthonormale.
L'algorithme qui en découle est appelé ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*** et se décompose comme suit :

- ***Initialisation*** : $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ est un vecteur unitaire et forme donc (à lui seul) une famille orthonormale.
- ***Propagation et hérédité*** : pour i allant de 2 à n, on suppose que la famille $\mathcal{F}'_{i-1} =$

$(v_k)_{k\in[\![1;i-1]\!]}$ est orthonormale

- $\star$ calculer $u_i' = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k|u_i)\, v_k$. D'après le théorème précédent u_i' est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}_{i-1}'$. De plus u_i' est non nul car $\mathcal{F}$ est libre (par l'absurde si l'on n'est pas convaincu).
- $\star$ Le vecteur $v_i = \dfrac{u_i'}{\|u_i'\|}$ est donc unitaire et orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}_{i-1}'$. La famille $\mathcal{F}_i' = (v_k)_{k\in[\![1;i]\!]}$ est donc orthonormale.

- ***Conclusion*** : à l'arrêt de l'algorithme, la famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ obtenue est orthonormale.

Ex. 23.10

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2) Même question pour $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3) Trouver une base orthonormale de E dans les deux cas précédents.

V. Orthogonalité en dimension finie

Dans cette section, $(F,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un ....

V.1. Bases orthonormées

Définition 23.20 (Base orthonormée)

On appelle ***base orthonormée*** ou ***base orthonormale*** d'un espace euclidien F toute famille libre, génératrice et orthonormale de F.

Théorème 23.21 (Existence de bases orthonormées)

Tout espace euclidien F possède au moins une base orthonormée.

Démonstration

V.2. Coordonnées en base orthonormée

Propriété 23.22 (Propriété fondamentale des espaces euclidiens)

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la coordonnée suivant u_i de tout vecteur v de F est

$$x_i = (u_i|v)$$

Démonstration

V.3. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 23.23

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors quels que soient les vecteurs $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $w = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a

- $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration

V.4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 23.24

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

Quel que soit le vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $v = p_F(u) \in F$ tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Démonstration

Définition 23.25 (Projection orthogonale sur un espace euclidien)

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

On appelle ***projection orthogonale*** sur F la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Autrement dit, la projection orthogonale sur F est l'application p_F qui à tout vecteur u de E associe l'unique vecteur v de F tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Corollaire 23.26

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^{\perp}$.

V.5. Remarque importante

Les théorèmes de la sous-section précédente ne sont valables que pour un sous-espace vectoriel F de ***dimension finie***. L'exercice suivant donne un contre-exemple dans le cas où F est de dimension infinie.

Ex. 23.11

1) Montrer qu'une application continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, qui s'annule sur tout intervalle ouvert non vide $I \subset [0;1]$, est l'application nulle.
   Indication : pour une application $f \in \mathcal{F}(E, F)$, ***s'annuler*** et ***être nulle*** ont des significations (très) différentes...
2) Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.
   a) Montrer que $F^{\perp} = \{x \in [0;1] \mapsto 0\}$.
   b) En déduire que si $f \in E \backslash F$, il n'existe pas de fonction $g \in F$ telle que $f - g \in F^{\perp}$.
   c) Que vaut $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$?

V.6. Propriétés

Propriété 23.27

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
La projection orthogonale p_F sur F est un projecteur, autrement dit $p_F \circ p_F = p_F$.

Démonstration

Propriété 23.28 (Inégalité de Bessel)

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$,

$$\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$$

Démonstration

Propriété 23.29

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$, $v = p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant

$$\|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|$$

Démonstration

V.7. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace euclidien

Théorème 23.30

Soient E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Alors $F^{\perp}$ et F sont supplémentaires.

Démonstration

Théorème 23.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^{\perp} = n - p$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Démonstration

Maths - Chapitre 24

Intégration

LE théorème fondamental du calcul intégral vu au chapitre 3 (proposition 3.35) s'énonce ainsi :

Théorème 24.1 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. La fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a et toute primitive de f s'écrit $F + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Ce théorème peut paraître paradoxal dans la mesure où, jusqu'en classes préparatoires, l'intégrale est définie à l'aide de la notion de primitive.

Ce théorème au contraire garantit l'existence d'une primitive pour une fonction continue à l'aide de la notion d'intégrale. Pour comprendre le sens de cette affirmation, et comprendre notamment qu'il ne s'agit en rien d'un ***cercle vicieux logique***, il faut donner une définition fondamentale et géométrique de l'intégrale d'une fonction, qui puisse notamment se généraliser à certaines fonctions n'admettant pas de primitives. C'est l'objet de ce chapitre.

Il convient donc, pour bien comprendre ce que nous allons faire, de distinguer d'emblée les notions de primitives et d'intégrales. Dans tout ce qui suit, on considèrera deux réels a, b et une fonction f définie sur le ***segment*** $[a; b]$:

- on dit que F est une ***primitive*** de f sur $[a; b]$ si F est ***dérivable*** sur $[a; b]$ et vérifie

$$\forall x \in [a; b], F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$$

- on ***souhaite définir la notion d'intégrale*** de sorte à ce que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ représente ***l'aire géométrique comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'équation*** $x = a$***,*** $x = b$ ***et la représentation graphique de*** f lorsque f est une fonction positive.
  Quelles sont les propriétés que doit alors vérifier l'intégrale ?

La construction que nous allons donner de la notion d'intégrale est due à **Bernhard Riemann**[1] et est historiquement la première à avoir vu le jour. D'autres théories de l'intégration sont possibles, comme par exemple la théorie de **Henri Lebesgue**[2].

1. **Bernhard Riemann**(1826 ;1866), mathématicien allemand dont les travaux en géométrie ont contribué de façon majeure aux progrès des mathématiques. En théorie des nombres, il émit aussi une des plus célèbres conjectures encore non résolue, la ***conjecture de Riemann***, portant sur la loi de répartition des nombres premiers.
2. **Henri Lebesgue**(1875-1941), mathématicien français, connu pour ses travaux dans le domaine de l'intégration et des probabilités.

I. Programme officiel

Intégration

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Fonctions en escaliers	
Subdivision d'un segment. Fonctions en escaliers définies sur un segment à valeurs réelles.	
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a;b]$ à valeurs réelles.	Aucune construction n'est imposée. Les fonctions continues par morceaux sont hors-programme. ⇆[PC][SI]: valeur moyenne.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. $\left\vert\int_{[a;b]} f\right\vert \leqslant \int_{[a;b]} \vert f\vert$.	Les élèves doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
c) Sommes de Riemann	
Si f est continue sur $[a;b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$	Interprétation géométrique des sommes de Riemann. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. ⇆ I : méthode des rectangles, méthode des trapèzes.
d) Calcul intégral	
Si f est continue sur I et si $x_0 \in I$, alors $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en x_0. Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$,

$$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

Intégration par parties, changement de variable.	Application au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu.

II. Construction de l'intégrale

II.1. Définitions

Définition 24.2 (Subdivision)

On appelle ***subdivision*** de l'intervalle $[a;b]$ tout ***sous-ensemble fini*** de réels de $x_i \in [a;b]$ contenant a et b.
On classe généralement les éléments d'une subdivision par ordre croissant : $a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Définition 24.3 (Fonction en escalier)

Une fonction $\phi : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dite ***en escalier*** s'il existe un entier $n \geqslant 2$,une subdivision $s = \{x_i \in [a;b], i \in [\![0;n]\!]\}$ de l'intervalle $[a;b]$ telle que ϕ ***soit constante sur chacun des intervalles*** $]x_i;x_{i+1}[$.
On dit alors que la subdivision s est ***adaptée*** à ϕ.

Notation

On note $\mathcal{E}([a;b])$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur l'intervalle $[a;b]$.

Dans tout ce qui suit, on notera ϕ une fonction en escalier sur $[a;b]$,
$s = \{x_i \in [a;b], i \in [\![0;n]\!]\}$ une subdivision adaptée à ϕ et
$\alpha_i \in \mathbb{R}, i \in [\![0;n-1]\!]$ la valeur prise par ϕ sur l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$.

Ex. 24.1 La fonction partie entière est une fonction en escalier sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
Une subdivision adaptée est par exemple ....

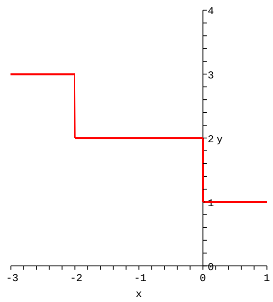
Théorème 24.4

Toute combinaison linéaire de fonctions en escaliers est une fonction en escalier.
$(\mathcal{E}([a;b]), +, .)$ est donc ....

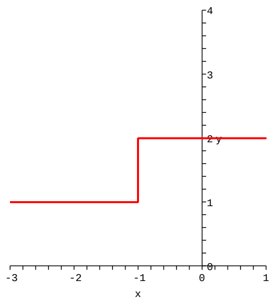
Démonstration

Ex. 24.2 Compléter le graphe de $\phi + \psi$

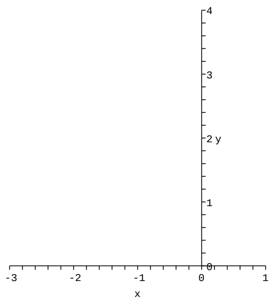
Graphe de ϕ



Graphe de ψ



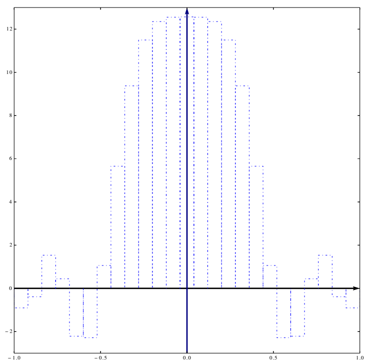
Graphe de $\phi + \psi$



II.2. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 24.5

On appelle ***intégrale de ϕ sur*** $[a;b]$ le réel $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\alpha_i$.



Notation

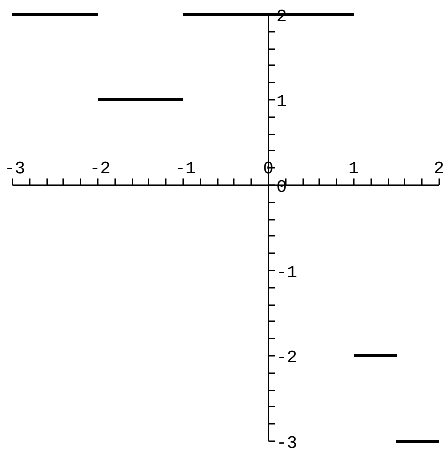
On note cette intégrale $\displaystyle\int_a^b \phi(x)\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi$.

Remarque

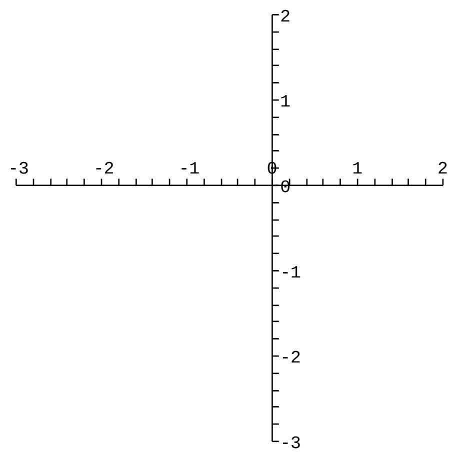
1) Une fonction constante égale à α sur l'intervalle $[a;b]$ est une fonction en escalier dont l'intégrale vaut $\displaystyle\int_{[a;b]} \alpha = (b-a)\alpha$.
2) L'intégrale ne dépend pas des valeurs prises par la fonction ϕ aux points de discontinuité.
3) Par définition, $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi$ représente l'***aire algébrique*** de la surface comprise entre la représentation graphique de ϕ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[a;b]$.

Ex. 24.3

Calculer l'intégrale sur $[-3; 2]$ de la fonction représentée ci-dessous.



Calculer l'intégrale sur $[-3; 2]$ de la fonction partie entière.



Propriété 24.6

ϕ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a; b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \in [a; b]$:

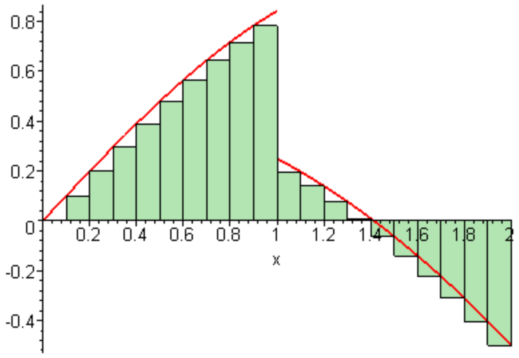
- ***Linéarité*** : $\displaystyle\int_{[a;b]} (\phi + \psi) = \int_{[a;b]} \phi + \int_{[a;b]} \psi$ et $\displaystyle\int_{[a;b]} \alpha\phi = \alpha \int_{[a;b]} \phi$.
- ***Positivité*** : si $\forall x \in [a; b], \phi(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi \geq 0$.
- ***Croissance*** : si $\forall x \in [a; b], \phi(x) \geq \psi(x)$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi \geq \int_{[a;b]} \psi$.
- ***Relation de Chasles*** : $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi = \int_{[a;c]} \phi + \int_{[c;b]} \phi$.

Démonstration

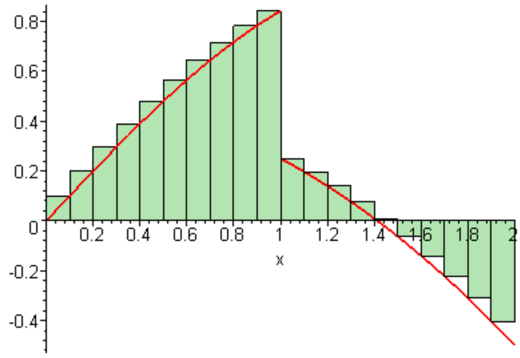
II.3. Intégrale d'une fonction continue

Théorème 24.7 (Approximation uniforme par des fonctions en escalier - Admis)

Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, il existe deux familles $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions en escaliers telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a; b], \begin{cases} \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \\ \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



ϕ_n et f



ψ_n et f

Théorème 24.8 (Convergence des intégrales)

Pour toute fonction f continue sur $[a;b]$, les suites des intégrales $I_n = \int_{[a;b]} \phi_n$ et $J_n = \int_{[a;b]} \psi_n$ convergent vers une même limite indépendante du choix des fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Cette limite s'appelle ***intégrale de la fonction*** f ***sur*** $[a;b]$ et est notée $\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

On a de façon évidente $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ et on pose $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Démonstration hors programme

Soient deux familles $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de fonctions en escaliers telles que* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a;b], \begin{cases} \phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \\ \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$.
Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [a;b]$, $\phi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_p(x)$ *donc* $I_n \leq J_p$. *Donc* $\{I_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une partie (non vide) majorée de* $\mathbb{R}$ *et admet donc une borne supérieure* I. *De la même façon* $\{J_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *minorée par* I_p *pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$ *et admet donc une borne inférieure* J.
Les majorations et minorations étant valables pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, *on a de plus* $I \leq J$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \psi_n(x) - \phi_n(x) \leq \frac{1}{n} \Rightarrow J \leq J_n \leq I_n + \frac{1}{n} \leq I + \frac{1}{n}$. *Donc*
- $I \leq J \leq I + \frac{1}{n} \Rightarrow I = J$ *par passage à la limite ;*
- *d'après le théorème des gendarmes, les suites* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *convergent vers* $I = J$.

Un argument similaire montre que cette limite est indépendante du choix de $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Remarque

Nous venons de donner très rapidement les idées permettant de construire l'intégrale des fonctions continues.
Ce qu'il faut retenir c'est que
- la notion d'intégrale est construite de façon ***géométrique***,
- s'interprète comme une aire algébrique et
- ***ne fait jamais appel à la notion de primitive***. Ce dernier point est très important car

nous verrons que dans certaines conditions, ***c'est l'existence de l'intégrale qui garantira l'existence des primitives***.

II.4. Propriétés élémentaires

f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c \in [a;b]$.

Théorème 24.9 (Linéarité de l'intégrale)

L'intégrale sur le segment $[a;b]$ est une forme linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues :
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Démonstration hors programme

Ces relations sont déjà démontrées pour les fonctions en escalier.
On suppose $a \leq b$. *Soient* $\phi_1 \leq f \leq \psi_1$ *et* $\phi_2 \leq g \leq \psi_2$ *quatre fonctions en escalier.*
D'une part, $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi_1 \leq \int_{[a;b]} f \leq \int_{[a;b]} \psi_1$ *et* $\displaystyle\int_{[a;b]} \phi_2 \leq \int_{[a;b]} g \leq \int_{[a;b]} \psi_2$.
D'autre part, $\displaystyle\phi_1+\phi_2 \leq f+g \leq \psi_1+\psi_2 \Rightarrow \int_{[a;b]} (\phi_1+\phi_2) \leq \int_{[a;b]} (f+g) \leq \int_{[a;b]} (\psi_1+\psi_2)$.
Or pour les fonctions en escalier,
$\displaystyle\int_{[a;b]} (\phi_1+\phi_2) = \int_{[a;b]} \phi_1 + \int_{[a;b]} \phi_2$ *et* $\displaystyle\int_{[a;b]} (\psi_1+\psi_2) = \int_{[a;b]} \psi_1 + \int_{[a;b]} \psi_2$.
Donc $\int_{[a;b]} f + \int_{[a;b]} g$ *et* $\int_{[a;b]} (f+g)$ *appartiennent à un même intervalle dont l'amplitude tend vers* 0 *lorsque la qualité de l'approximation s'améliore. Après passage à la limite, on obtient donc l'égalité souhaitée.*
Si $a > b$, *on écrit*
$\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = -\int_b^a (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x - \int_b^a g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

Théorème 24.10 (Positivité et croissance)

Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Démonstration hors programme

On a $f \geq 0$. *Or la fonction nulle est une fonction en escalier d'intégrale nulle et l'intégrale de* f *est d'après le théorème de convergence des intégrales la borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier qui la minore : donc* $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geq 0$.

Corollaire 24.11

Si $f \geq g$ sur $[a;b]$ alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f \geq \int_{[a;b]} g$.

Démonstration

Corollaire 24.12

$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq \int_{[a;b]} |f|$

Démonstration

Théorème 24.13 (Relation de Chasles)

Si f est continue sur I et si $(a;b;c) \in I^3$ (*quel que soit leur ordre*) alors

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration hors programme

Lorsque $a \leq c \leq b$, on utilise un raisonnement similaire à celui donné dans la démonstration de la linéarité de l'intégrale. Dans les autres cas, par exemple lorsque $c \leq b \leq a$, on écrit $\displaystyle\int_c^a f(x)\mathrm{d}x = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x \Rightarrow -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_c^a f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
$\displaystyle\Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

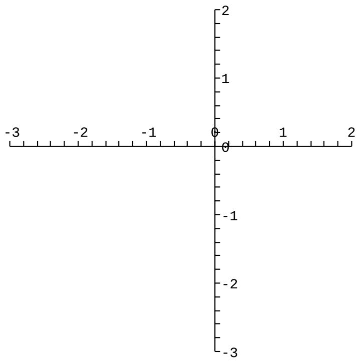
Théorème 24.14 (Inégalité de la moyenne)

Si $b > a$, $\displaystyle\min_{[a;b]} f \leq \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a} \leq \max_{[a;b]} f$

Démonstration

Définition 24.15 (Valeur moyenne)

On appelle ***valeur moyenne*** de f sur $[a;b]$ le nombre $\frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}$.



Remarque

L'inégalité de la moyenne peut se réécrire

....

....

II.5. Théorèmes

Théorème 24.16

Si f est continue sur $[a;b]$ alors $\exists c \in [a;b], f(c) = \frac{\int_{[a;b]} f}{b-a}$

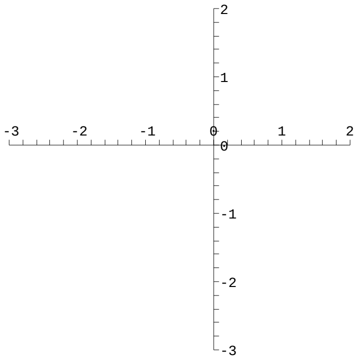
Démonstration

Théorème 24.17 (Intégrale d'une fonction continue positive)

Pour une fonction f continue positive, l'intégrale de f sur un segment est nulle si et seulement si f est la fonction nulle.
Autrement dit, $\forall f \in \mathcal{C}^0\left([a;b];\mathbb{R}_+\right), \int_{[a;b]} f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a;b], f(x) = 0$.

Démonstration

La réciproque est évidente. Pour le sens direct, on démontre la contraposée :
pour une fonction f continue positive, si . . . .
. . . .



III. Primitives d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

III.1. Définition

Définition 24.18

On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est ***une primitive*** de f sur I si F ***est dérivable sur*** I ***et*** $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

III.2. Première propriété

Théorème 24.19

Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ continue alors

- toute primitive de f s'écrit $F + k$, $k \in \mathbb{R}$;
- quels que soient $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f telle que $G(a) = b$.

Démonstration

III.3. Primitives d'une fonction continue

Théorème 24.20 (Théorème fondamental du calcul intégral)

Si f une fonction continue sur I et $a \in I$ alors la fonction $F : \left\{\begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Démonstration

Corollaire 24.21

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Notation

Pour f continue sur I, on note $x \in I \mapsto \displaystyle\int^x f(t)\mathrm{d}t$ toute primitive de f sur I.

III.4. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Nous venons de voir que la notion d'intégrale garantit l'existence de primitives pour une fonction continue. Réciproquement, le théorème suivant permet de calculer simplement l'intégrale d'une fonction continue dont on connaît une primitive.

Théorème 24.22

Si f est continue sur $[a;b]$ alors elle admet une infinité de primitives sur $[a;b]$, et quelle que soit la primitive F choisie on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Démonstration

Notation

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

Corollaire 24.23

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $\forall (a;x) \in I^2, f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

IV. Calcul pratique des primitives

IV.1. Résumé

Nous disposons à présent de la notion d'intégrale d'une fonction (continue) sur un intervalle permettant de formaliser la notion d'***aire algébrique***. Cette notion a été construite sur la base d'intuitions géométriques, ***sans aucun recours à la notion de primitive***.

Nous avons par ailleurs démontré que pour les fonctions continues sur un segment, la notion d'intégrale garantit l'***existence d'une primitive*** et que la connaissance d'une primitive permet ***le calcul d'une intégrale***.

Nous pouvons désormais nous intéresser à l'autre problème du calcul différentiel : comment obtenir ***l'expression d'une primitive lorsque c'est possible***...

Ce problème est de type calculatoire : nous allons donner dans ce paragraphe quelques astuces de calcul des primitives en commençant par des rappels du chapitre 7.

IV.2. Intégration par partie

Théorème 24.24

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et $(a;b) \in I^2$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 7, proposition 7.3.

Remarque

La technique de l'intégration par partie permet d'obtenir les primitives de $x \in]0;+\infty[\mapsto \ln x$. Ce sont les fonctions de la forme ....

IV.3. Changement de variable

Théorème 24.25

Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([a;b])$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f \circ \phi(t)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

Ce théorème a été démontré au chapitre 7, proposition 7.4.

Ex. 24.4 Calculer $I_1(x) = \displaystyle\int^x \frac{\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t$ et $I_2(x) = \displaystyle\int^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

Cor. 24.4

IV.4. Quelques astuces de calcul

Intégration par partie et changement de variable dans une intégrale sont les deux ***outils fondamentaux du calcul de primitives et d'intégrales***. Les méthodes et résultats des chapitres 3, 5 et 7 sont par ailleurs à connaître ***par cœur*** ! Notamment, on révisera le tableau des primitives usuelles.

On pourra aussi penser aux astuces suivantes :

- dans une intégrale dépendant d'un paramètre entier, une intégration par partie peut permettre d'obtenir une relation de récurrence ;
- lorsqu'on cherche un équivalent d'une intégrale, une intégration par partie peut là encore être utile ;
- ***linéariser les polynômes trigonométriques*** à l'aide des formules d'Euler ;
- ***décomposer les fractions rationnelles en éléments simples*** (voir exercice 24.6) ;
- exprimer $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ puis effectuer un changement de variable ;
- exprimer $\operatorname{ch}(x), \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ en fonction de $u = e^x$ puis effectuer un changement de variable.

Ex. 24.5 Montrer que $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

Cor. 24.5

Ex. 24.6 Calculer $J = \displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{(t-1)(t^2+2t+5)}\mathrm{d}t$

Cor. 24.6

IV.5. Règles de Bioche

Enfin, dans le cas de fonctions s'écrivant ne dépendant que d'expressions trigonométriques ou ne dépendant que d'expressions hyperboliques, la méthode suivante est très intéressante :

Méthode : Règles de Bioche

Dans une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$:

- si $t \leftrightarrow -t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \cos(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi - t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \sin(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi + t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \tan(t)$ peut s'avérer intéressant.

Dans le cas d'intégrales de fonctions hyperboliques, les mêmes règles s'appliquent en remplaçant cos par ch, etc...

Ex. 24.7 Calculer des primitives de

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad et \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

en indiquant l'ensemble de validité des primitives obtenues.

Cor. 24.7

V. Compléments

V.1. Sommes de Riemann

Théorème 24.26

Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration hors programme

Ce théorème sera démontré en exercices.

Géométriquement, il s'agit simplement de l'approximation de la fonction f par des fonctions en escalier de pas constant égal à $\frac{b-a}{n}$.

Méthode

Ce théorème peut servir :

- pour calculer une intégrale ;
- pour déterminer la limite d'une somme.

Ex. 24.8 Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n+k}$.

Cor. 24.8

Deuxième partie

Feuilles d'exercices

Maths - Feuille d'exos n° 1

Introduction et rappels

I. Éléments de logique

Ex. 1.1 Soient A, B, C trois énoncés.

a. Démontrer l'équivalence
$(A\,\textbf{et}\,(B\,\textbf{ou}\,C)) \Leftrightarrow ((A\,\textbf{et}\,B)\,\textbf{ou}\,(A\,\textbf{et}\,C))$.

b. Écrire cette équivalence en notation booléenne (le symbole d'équivalence dans cette notation est le signe $=$) puis faire les deux schémas électroniques correspondant à chaque membre de l'équivalence.

c. Écrire en toutes lettres l'équivalence en prenant pour A :« la voiture est une Renault », pour B :« la voiture est rouge » et pour C :« la voiture est bleue ».

Ex. 1.2 Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Écrire chacune d'elles comme une implication.

a. Une condition suffisante pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

b. Une condition nécessaire pour qu'un nombre entier soit strictement supérieur à 2 est qu'il soit supérieur ou égal à 3.

c. Pour qu'un nombre réel soit strictement supérieur à 2, il faut que son carré soit strictement supérieur à 4.

Ex. 1.3 [$*$] On dit d'un opérateur logique qu'il est ***universel*** s'il permet de reconstituer tous les autres opérateurs logiques.
En pratique, il suffit de vérifier qu'il permet de reconstituer les opérateurs **non** , **ou** , **et** pour montrer qu'un opérateur logique est universel.
Montrer que les opérateurs

- NAND : $(A, B) \mapsto A \text{ NAND } B = \textbf{non}\,(A\,\textbf{et}\,B)$ et
- NOR : $(A, B) \mapsto A \text{ NOR } B = \textbf{non}\,(A\,\textbf{ou}\,B)$

sont universels.

Ex. 1.4 [$**$] Soient $x, y \in \mathbb{Q}_+$ tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer (par l'absurde) que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est aussi irrationnel.

Ex. 1.5 [$*$] On dispose de neuf billes visuellement identiques, huit d'entre elles ont même masse mais la neuvième est plus lourde. Comment, en deux pesées sur une balance à deux plateaux, peut-on démasquer l'intrus ?

Ex. 1.6 [$**$] On dispose de neuf billes visuellement identiques, elles ont toutes la même masse sauf une. Comment, à l'aide d'une balance à deux plateaux, démasquer l'intrus en trois pesées ?

II. Ensembles et quantificateurs

Ex. 1.7

a. Donner une définition par compréhension puis comme image directe de l'ensemble I des entiers relatifs impairs.

b. Donner une définition symbolique des ensembles suivants :
- $E = \{-28; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; 28; 35\}$
- $F = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100\}$

Ex. 1.8 Soit E un ensemble, A, B et C trois parties de E. Prouver les égalités suivantes :
•$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ •$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Ex. 1.9 Donner comme réunion d'intervalles les parties de $\mathbb{R}$ constituées des valeurs de x vérifiant les assertions suivantes :

a. $(x > 0\,\textbf{et}\,x < 1)\,\textbf{ou}\,x = 0$;

b. $x > 3\,\textbf{et}\,x < 5\,\textbf{et}\,x \neq 4$;

c. $(x \leqslant 0\,\textbf{et}\,x > 1)\,\textbf{ou}\,x = 4$;

d. $x \geqslant 0 \Rightarrow x > 3$.

III. Applications et fonctions

Ex. 1.10 Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x^2 - x - 1 \end{array} \right.$$

et calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{d}x$.

Ex. 1.11 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1;1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$.
Montrer que f est bijective et donner une expression de sa bijection réciproque.

IV. Équations et systèmes

Ex. 1.12 Vrai ou faux ?

a. Quel que soit la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, l'équation $mx = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.

b. Le système d'équation $\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} - x - \frac{3y}{2} & = & 0 \\ 5(x+y)+3 & = & 8 - 5x - 10y \end{array} \right.$ est équivalent à la seule équation $2x + 3y = 1$.

Ex. 1.13 Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle x :
(a) $(3x+2)(x+1) = -\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$
(b) $(2x+1)(x-3)(x+2) - (2x+1)(x-7) = 0$
(c) $\ln(x+1) - \ln(1-x) = \ln 2$

Ex. 1.14 Résoudre l'équation d'inconnue réelle x et de paramètre réel m :
$(m+1)x + 3 = 2mx + m^2 + 2m$.

Ex. 1.15 Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z - y & = & 1 \\ x - az & = & 2 \\ ay - x & = & 3 \end{array} \right.$$

V. Quelques exercices corrigés

Ex. 1.16 (Cor.) Pour chacune des assertions suivantes, donner sa valeur de vérité, sa contraposée, sa réciproque et leurs valeurs de vérité :

a. $x > 5 \Rightarrow 3x + 2 > 14$

b. Si ce n'est toi, c'est donc ton frère.

c. Si un triangle est rectangle, alors la somme des carrés des côtés de son angle droit est égale au carré de son hypoténuse.

Ex. 1.17 (Cor.) [$**$] Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on définit le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de sorte à ce qu'il ait les propriétés suivantes :
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

On rappelle que $\vec{0}$ est orthogonal et colinéaire à tout vecteur.
Que signifie $((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \vec{0}$?

Ex. 1.18 (Cor.) [$*$] Soit E un ensemble, A, B et X des parties de E.

a. Montrer que si $((A \cup X) \subset (B \cup X))$ **et** $((A \cap X) \subset (B \cap X))$ alors $A \subset B$.

b. Que peut-on déduire si
$((A \cup X) = (B \cup X))$ **et** $((A \cap X) = (B \cap X))$?

Ex. 1.19 (Cor.) [$*$] L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?

Corrections

Cor. 1.16 :

a. $x > 5 \Rightarrow 3x+2 > 14$ est vraie car $x > 5 \Leftrightarrow 3x+2 > 3\times 5+2 \Leftrightarrow 3x+2 > 17 \Rightarrow 3x+2 > 14$.
Sa contraposée : $3x+2 \leq 14 \Rightarrow x \leq 5$ est vraie.
Sa réciproque : $3x+2 > 14 \Rightarrow x > 5$ est fausse ($x = 5$ fournit un contre-exemple).

b. « Si ce n'est toi, c'est donc ton frère. » est fausse : si ce n'est toi, ça peut être ton frère mais aussi quelqu'un d'autre encore.
Sa contraposée : « Si ce n'est pas ton frère, alors c'est toi. » est fausse aussi.
Sa réciproque : « Si c'est ton frère, alors ce n'est pas toi. » est vraie.

c. Il s'agit pour la troisième propriété du théorème de Pythagore : elle est vraie, tout comme sa contraposée et sa réciproque.
Contraposée : Dans un triangle, si la somme des carrés de deux côtés n'est pas égale au carré du troisième côté, alors l'angle formé par les deux premiers côtés n'est pas droit.
Réciproque : Dans un triangle, si la somme des carrés de deux côtés est égale au carré du troisième côté, alors l'angle formé par les deux premiers côtés est droit.

Cor. 1.17 : D'après les propriétés données du produit vectoriel :

$((\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v})\wedge\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
On a alors deux cas :

a. soit $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} = \vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Ceci se produit (toujours d'après les propriétés données) si et seulement si $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Or $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{v}$. Donc $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est un vecteur ***colinéaire et orthogonal*** à $\vec{v}$, c'est donc le vecteur nul.
Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b. soit $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v} \neq \vec{0}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Or $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et à $\vec{v}$. Donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et à $\vec{v}$.
Notamment $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

Réciproquement, on montre que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou orthogonaux, alors $((\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{v})\wedge\vec{u} = \vec{0}$.

Cor. 1.18 :

a. Supposons que $((A\cup X)\subset(B\cup X))$ **et** $((A\cap X)\subset(B\cap X))$ et montrons que $A\subset B$.
Soit $x\in A$: ou bien $x\in X$, ou bien $x\notin X$.
Si $x\in X$, alors $x\in X\cap A \Rightarrow x\in B\cap X \Rightarrow x\in B$.
Si $x\notin X$, alors $x\in A \Rightarrow x\in A\cup X \Rightarrow x\in B\cup X$.
Or $x\in B\cup X$ **et** $x\notin X \Rightarrow x\in B$.
Dans un cas comme dans l'autre, nous avons donc $\forall x\in A, x\in B$, donc $A\subset B$.

b. D'après la première question
$((A\cup X)\subset(B\cup X))$ **et** $((A\cap X)\subset(B\cap X)) \Rightarrow A\subset B$.
De même, $((B\cup X)\subset(A\cup X))$ **et** $((B\cap X)\subset(A\cap X)) \Rightarrow B\subset A$.
La conjonction de ces deux propriétés prouve donc que
$((A\cup X)=(B\cup X))$ **et** $((A\cap X)=(B\cap X)) \Rightarrow A=B$.

Cor. 1.19 : L'application n'est ni injective, ni surjective.

En effet, $f(1,2)=(3,2)=f(2,1)$ donc l'application n'est pas injective.
De plus, montrons qu'il n'existe pas de couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $x+y=0$ et $xy=1$. Comme le produit $xy\neq 0$, x et y sont non nuls. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 0\\ xy=1 & & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 0\\ y &=& \frac{1}{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x+\frac{1}{x} &=& 0\\ y &=& \frac{1}{x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^2+1 &=& 0\\ y &=& \frac{1}{x}\end{array}\right.$$

Or l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solutions réelles, donc f n'est pas surjective.

Maths - Feuille d'exos n° 2

Ensembles finis, calcul littéral

I. Les entiers

Ex. 2.1 (Cor.) Déterminer les valeurs possibles du chiffre a pour que $999999993a4$ soit divisible par 12.

Ex. 2.2 (Cor.) ***Algorithme d'Euclide***
On rappelle que étant donnés deux entiers a et b positifs distincts non nuls, l'algorithme d'Euclide est le suivant :

- on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- tant que c'est possible, on définit $a_{n+1} = b_n$ et b_{n+1} comme le reste de la division de a_n par b_n.

a. Écrire l'algorithme d'Euclide pour $a = 1653$ et $b = 2717$.

b. Montrer que si $n > 0$ alors $a_{n+1} < a_n$ et $b_{n+1} < b_n$ si ces termes sont définis.

c. Montrer que tant que a_n, b_n, a_{n+1} et b_{n+1} sont strictement positifs, $\text{PGCD}\,(a_n; b_n) = \text{PGCD}\,(a_{n+1}; b_{n+1})$
Remarque : ce type d'égalité entre des quantités calculées à chaque pas d'un algorithme est appelé ***invariant de boucle*** en informatique.

d. En déduire que l'algorithme d'Euclide se termine.

e. Montrer que si $b_n = 0$ alors $a_n = \text{PGCD}(a; b)$.

f. Écrire le code Python permettant étant données deux variables `a` et `b` de calculer leur PGCD.

Ex. 2.3 (Cor.) Soit p un nombre premier supérieur à 4. Montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Ex. 2.4 (Cor.) [$*$] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a; b)\,\text{PPCM}(a; b) \leqslant ab$.

Ex. 2.5 (Cor.) [$**$] Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $\text{PGCD}(a; b)\,\text{PPCM}(a; b) = ab$.

II. Sommes et produits finis

Ex. 2.6 Transformer en utilisant le signe $\sum$ puis simplifier pour $n \in \mathbb{N}$:
$I = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1)$
Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Ex. 2.7 (Cor.) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$,
$S_n = 1 \times (n + 1) + 2 \times n + 3 \times (n - 1) + ... + n \times 2 + (n + 1) \times 1$

Ex. 2.8 Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=5}^{30} \frac{k^2 - 2k - 3}{k + 1}$.
Indication : on pourra effectuer le changement d'indice $j = k + 1$ ou remarquer que $\dfrac{k^2 - 2k - 3}{k + 1} = ...$

Ex. 2.9 Simplifier les sommes suivantes (n étant un entier naturel) :

- $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} 2^{k-1}$
- $\displaystyle\sum_{k=-2}^{n} \frac{1}{3^{k+1}}$
- $\displaystyle\sum_{k=-5}^{15} k(10 - k)$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n - k + 1$
- $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n-1} \sin(2k + 1)$

Ex. 2.10 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$S_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i; j)$ et $T_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i; j)$.

Ex. 2.11 ***Nombres de Mersenne***
Soient m et n deux entiers strictement positifs.
Montrer que $2^n - 1$ divise $2^{mn} - 1$.
En déduire qu'***il faut que*** n soit premier pour que $2^n - 1$ soit premier.
La réciproque est-elle vraie ?

Ex. 2.12 Simplifier pour $n \in \mathbb{N}^*$: $P = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Ex. 2.13 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

Ex. 2.14 Calculer et simplifier (pour $n \in \mathbb{N}$) les sommes suivantes :

$$I = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} \qquad J = \sum_{k=1}^{n} k \times (k!)$$

III. Coefficients binomiaux et formule du binôme

Ex. 2.15 ***Petite formule*** Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier $k \in [\![1; n]\!]$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Ex. 2.16 Simplifier les sommes suivantes : étant donnés un entier naturel n, $p \in [\![0; n]\!]$ et un complexe z

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \qquad S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^n \qquad S_5(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{k+1} (1-z)^{n-k}$$

$$T_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

Ex. 2.17 Soient $n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que $\frac{p+1}{\binom{n+p-1}{p}} - \frac{p+1}{\binom{n+p}{p}} = \frac{p}{\binom{n+p}{p+1}}$.

b. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}$.

Corrections

Cor. 2.1 : Soit $N = 99999999304 + a \times 10$. N doit être divisible par 12 or $99999999300 = 12 \times 25 \times 333333331$. Donc $12 | N \Leftrightarrow 12 | (10a + 4)$.
Deux solutions s'offrent alors :

- comme a est un *chiffre*, $a \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. On essaye toutes les valeurs de a et on montre que $12 | (10a + 4)$ pour
  - ⋆ $a = 2$: $20 + 4 = 24 = 2 \times 12$;
  - ⋆ $a = 8$: $84 = 7 \times 12$.
- on écrit : $10a + 4 = (12 - 2)a + 4 = 12a + 4 - 2a$ est divisible par 12 si et seulement si $4 - 2a$ l'est. On retrouve à nouveau les deux cas possibles, $a = 2$ donne $4 - 2a = 0$ et $a = 2 + 6 = 8$ donne $4 - 2a = -12$, de façon plus simple à calculer.

Cor. 2.2 :

a.

a_i	b_i	$a_i = qb_i + r$
1653	2717	$1653 = 0 \times 2717 + 1653$
2717	1653	$2717 = 1 \times 1653 + 1064$
1653	1064	$1653 = 1 \times 1064 + 589$
1064	589	$1064 = 1 \times 589 + 475$
589	475	$589 = 1 \times 475 + 114$
475	114	$475 = 4 \times 114 + 19$
114	19	$114 = 6 \times 19 + 0$
19	0	Impossible

Le PGCD de 1653 et 2717 est 19.

b. À partir du rang $n = 1$, les termes a_n et b_n sont définis par la formule de récurrence $a_n = b_{n-1}$ et b_n est le reste de la division euclidienne de a_{n-1} par b_{n-1} : donc $b_n < b_{n-1} = a_n$.
De plus, comme $a_{n+1} = b_n$, $a_{n+1} < a_n$.

c. Soit d un diviseur commun de a_n et b_n. $d|a_{n+1}$ puisque $a_{n+1} = b_n$.
De plus, la division euclidienne $a_n = qb_n + r$ permet d'écrire $r = a_n - qb_n$ qui est donc divisible par d (comme différence de deux nombres divisibles par d).
Donc d divise $r = b_{n+1}$.
Donc l'ensemble D_n des diviseurs communs à a_n et b_n est inclus dans l'ensemble D_{n+1} défini de même.
Réciproquement, en écrivant que $a_n = qa_{n+1} + b_{n+1}$, on montre que $D_{n+1} \subset D_n$.
Donc $D_n = D_{n+1}$
et $\text{PGCD}\,(a_n; b_n) = \max D_n = \max D_{n+1} = \text{PGCD}\,(a_{n+1}; b_{n+1})$.

d. On a montré que tant que l'algorithme n'est pas terminé $b_n < b_{n-1}$. La suite (b_n) est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs (puisque le reste d'une division euclidienne est positif). Il est donc impossible que cette suite soit infinie (il n'y a qu'un nombre fini d'entiers positifs inférieurs $b_0 = b$).
L'algorithme d'Euclide se termine donc en un nombre fini d'étapes, lorsque le reste de la division euclidienne effectuée dans une boucle est nul.

e. Supposons que $b_n = 0$. Alors $a_{n-1} = qb_{n-1} + 0$ est multiple de b_{n-1}. Donc $\text{PGCD}\,(a_{n-1}; b_{n-1}) = \text{PGCD}\,(qbn - 1; b_{n-1}) = b_{n-1} = a_n$.
Or pour tout n valide $\text{PGCD}\,(a_n; b_n) = \text{PGCD}\,(a; b)$ (c'est un invariant, sa valeur est la même qu'au début de l'algorithme).
Donc $\text{PGCD}\,(a; b) = a_n$ lorsque $b_n = 0$.

f.
```
def euclide(a,b):
    while b>0:
        a,b=b,a%b
        print(a,b)
    return a
```

Cor. 2.3 : Si p premier est supérieur à 4, en particulier $2 \nmid p$ et $3 \nmid p$. Donc $p = 1 + 6k$ ou $p = 5 + 6k$, $k \in \mathbb{N}$ (tous les autres cas donnent un nombre divisible par 2 ou 3).
Donc $p^2-1 = 12k+36k^2 = 12k(1+3k)$ ou $p^2-1 = 24+60k+36k^2 = 24+12k(5+3k)$.
Or si k est pair, alors $12k$ est un multiple de 24.
Et si k est impair, $12(1 + 3k)$ et $12(5 + 3k)$ sont des multiples de 24.
Donc $p^2 - 1$ est divisible par 24 pour tout nombre premier p supérieur à 4.

Cor. 2.4 : Considérons la fraction $F = \dfrac{ab}{\text{PGCD}(a; b)}$.
D'une part, $F = \dfrac{a}{\text{PGCD}(a; b)} \times b$. Comme $\text{PGCD}(a; b)$ divise a, F est un entier multiple de b et de $a' = \dfrac{a}{\text{PGCD}(a; b)} \in \mathbb{N}$.
D'autre part, $F = \dfrac{b}{\text{PGCD}(a; b)} \times a$. Comme $\text{PGCD}(a; b)$ divise b, F est un entier multiple de a et de $b' = \dfrac{b}{\text{PGCD}(a; b)} \in \mathbb{N}$.
F est donc un multiple de a **et** de b. Par conséquent $\text{PPCM}(a; b)$ qui est ***le plus petit*** des multiples de a **et** de b vérifie

$$\text{PPCM}(a; b) \leqslant F$$

En remplaçant F par sa définition on obtient donc
$\text{PGCD}(a; b)\,\text{PPCM}(a; b) \leqslant ab$

Cor. 2.5 : En reprenant les notations et la démonstration de l'exercice 2.4, on a $F = \dfrac{ab}{\text{PGCD}(a; b)} = k\,\text{PPCM}(a; b)$ pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$.
En posant $G = \dfrac{ab}{\text{PPCM}(a; b)}$, on a donc $G = k\,\text{PGCD}(a; b)$. En particulier, G est un entier.
Or $\text{PPCM}(a; b)$ est un multiple (strictement positif) de a donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{PPCM}(a; b) = ia$. De même, il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{PPCM}(a; b) = jb$.
Donc $G = \dfrac{ab}{ia} = \dfrac{b}{i}$ divise b et de même $G = \dfrac{ab}{jb} = \dfrac{a}{j}$ divise a.
Or $\text{PGCD}(a; b)$ est le plus grand diviseur commun à a et b donc $\text{PGCD}(a; b) \geqslant G$.
En remplaçant G par sa définition, on obtient donc $\text{PGCD}(a; b)\,\text{PPCM}(a; b) \geqslant ab$.
Le résultat de l'exercice 2.4 permet alors de conclure que
$\text{PGCD}(a; b)\,\text{PPCM}(a; b) = ab$.

Cor. 2.7 : Le premier travail à faire est d'exprimer cette somme à l'aide d'un signe $\sum$:

$S_n = \sum_{i=1}^{n+1} i(n+2-i)$

Ensuite, on utilise les différentes techniques du cours. Par exemple :

$$\begin{aligned}
S_n &= (n+2)\sum_{i=1}^{n+1} i - \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+2)\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= (n+1)(n+2)\frac{3n+6-2n-3}{6} \\
&= \begin{pmatrix} n+3 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Maths - Feuille d'exos n° 3

Techniques de calcul différentiel

I. Généralités

Ex. 3.1

- Montrer que $\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2, ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$.
- Montrer que $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3, ab+bc+ac\leq a^2+b^2+c^2$.
- Montrer que $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3, 3ab+3bc+3ac\leq(a+b+c)^2$.

Ex. 3.2 $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1\dots,a_n$ des réels.

- Montrer que si $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_i^2=n$ alors $\forall i\in[\![1;n]\!], a_i=1$.
- Est-il possible que $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_i^2>n$?
- Trouver un exemple où $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_i^2<n$.

Ex. 3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $|x+1|\leq 1$ b. $|x-1|\leq|x-2|$ c. $|2x-1|-|x+1|<|3x+5|$

Ex. 3.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ et représenter l'ensemble des solutions :
a. $(y+1)(y-1)>(y+1)^2$ b. $(y+2)(y+3)\leq 2y+6$
c. $\lambda\in\mathbb{R}$ donné, $\lambda y+7\geq 3y-5\lambda$

Ex. 3.5 (Cor.) Les musiciens d'une fanfare sont disposés en rectangle. On repère le plus grand musicien de chaque colonne, puis on note X le plus petit d'entre eux. On repère le plus petit musicien de chaque rangée, puis on note Y le plus grand d'entre eux.
Comparer la taille de X et de Y.

Ex. 3.6 Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J\subset\mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 3.7 On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique, admettant 2 et 3 comme période. Montrer que f est 1-périodique.

II. Études de fonctions

Ex. 3.8 (Cor.) Étude et représentation graphique de $f: x\mapsto\left|x-\sqrt{1-x^2}\right|$.

Ex. 3.9 Soit $0<a\leqslant b$. On pose $f: x\mapsto\dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudier la monotonie de f. En déduire l'inégalité

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leqslant(\ln 2)^2$$

Ex. 3.10

a. Montrer que, pour tout $x\in]0;1[$, on a les inégalités
$$\ln(1+x)<x<-\ln(1-x)$$
b. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ fixé et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{(p+1)n}$.
Déterminer la limite de la suite (S_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Ex. 3.11 ***Sinus cardinal*** [$**$] On appelle ***sinus cardinal*** et on note sinc la fonction définie par

$$\text{sinc}:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x\neq 0&\mapsto&\dfrac{\sin(x)}{x}\\ 0&\mapsto&1\end{array}\right.$$

a. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+, x-\frac{x^2}{2}\leqslant\sin(x)\leqslant x$.
b. Déduire de la question précédente que sinc est continue sur $\mathbb{R}$.
c. Quel est l'ensemble de dérivabilité ***à priori*** de sinc ?
d. Montrer que sinc est dérivable en 0. Que peut-on en déduire concernant l'ensemble sur lequel sinc est dérivable ?

e. Montrer que sinc possède un maximum que l'on précisera.

f. Montrer que sinc′ change de signe une infinité de fois.

g. Tracer une représentation graphique rapide de sinc (on ne cherchera pas à préciser les intervalles sur lesquels sinc est monotone).

h. Montrer que sinc′ est continue sur $\mathbb{R}$.

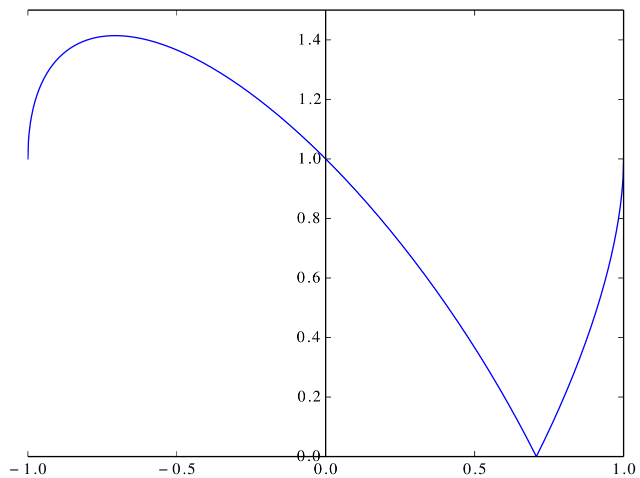
Corrections

Cor. 3.5 : En termes mathématiques, il s'agit de comparer $X = \min\limits_{1\leq j\leq p}\left[\max\limits_{1\leq i\leq n}(a_{ij})\right]$ et $Y = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left[\min\limits_{1\leq j\leq p}(a_{ij})\right]$.
Notons $X_j = \max\limits_{1\leq i\leq n}(a_{ij})$ et $Y_i = \min\limits_{1\leq j\leq p}(a_{ij})$.
Par définition, on a $\forall j \in [\![1;p]\!], X \leq X_j$ et $\forall j \in [\![1;p]\!], \forall i \in [\![1;n]\!], a_{ij} \leq X_j$.
Donc $\forall i \in [\![1;n]\!], Y_i = \min\limits_{1\leq j\leq p}(a_{ij}) \leq \min\limits_{1\leq j\leq p} X_j = X$ et $Y \leq X$.
Pour se convaincre que on ne peut rien dire de plus, il suffit d'envisager une fanfare à quatre musiciens placés ainsi :
$\begin{pmatrix} 1,8 & 1,7 \\ 1,7 & 1,8 \end{pmatrix}$: on alors $X_1 = X_2 = 1,8$ donc $X = 1,8$ et $Y_1 = Y_2 = 1,7$ donc $Y = 1,7$.

Cor. 3.8 : $f(x)$ est définie si et seulement si $1 - x^2 \geqslant 0$. Donc f est définie sur $[-1;1]$.
Étudions le signe de $x - \sqrt{1-x^2}$:
$x - \sqrt{1-x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \sqrt{1-x^2}$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1;0]$.
Considérons l'autre cas possible à savoir $x \in [0;1]$. Dans ce cas, l'inégalité porte sur deux quantité positive, la fonction carré est bijective croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ donc
$x \leqslant \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x^2 \leqslant 1 - x^2 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En résumé :

- si $x \in \left[-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$. Sur cet intervalle, f est dérivable si et seulement si $1 - x^2 \neq 0$. Donc f est dérivable sur $\left]-1;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$. On a alors :
$f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - 1 = \dfrac{-x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. On étudie à nouveau le signe de $f'(x)$ qui est celui de son numérateur.
Or on remarque que $-x - \sqrt{1-x^2} = (-x) - \sqrt{1-(-x)^2} = u - \sqrt{1-u^2}$ en posant $u = -x$. L'étude du signe de cette dernière expression a déjà été faite et on conclut que
$f'(x) \geqslant 0$ pour $x \in \left]-1;\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour $x \in \left[\dfrac{-\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
- de même, si $x \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$, $f(x) = x - \sqrt{1-x^2}$ et une étude similaire conduit à prouver que f est strictement croissante sur cet intervalle.

Valeurs de x	-1		$\frac{-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		+	0	-	-2‖2	+	
Variations de $f(x)$	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	0	↗	1



Maths - Feuille d'exos n° 4

Nombres complexes

I. Rappels

Ex. 4.1 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{i\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-1}{z-i} \end{array} \right.$.

Montrer que f est bijective. Donner une expression de sa bijection réciproque.

Ex. 4.2 Soit $u \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que $\frac{z-u\bar{z}}{1-u} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |u| = 1$

Ex. 4.3 Montrer que si z_1 et z_2 sont des complexes de module inférieur ou égal à 1 alors $|z_1 + z_2| \leq \sqrt{2}$ ou $|z_1 - z_2| \leq \sqrt{2}$.

II. Trigonométrie

Ex. 4.4 Écrire sous la forme trigonométrique les complexes suivants :
$z_1 = -3$ $\quad z_2 = -3i$ $\quad z_3 = -2+2i$ $\quad z_4 = \sqrt{3}-i$ $\quad z_5 = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right) - i$

Ex. 4.5 On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a. Montrer que $j^2 = \bar{j} = -1 - j$.

b. Calculer $j^2 e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Ex. 4.6 Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose $a = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ et $b = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

a. Montrer que $\bar{a} = b$ puis calculer $a + b$ et ab.

b. En déduire a et b.

Ex. 4.7 Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Écrire $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

b. En prenant $\theta = \frac{\pi}{5}$, déduire de la question précédente la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

c. Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)}$.

Ex. 4.8 Linéariser les polynômes trigonométriques :
$A(x) = \sin^5 x$ $\qquad B(x) = \cos^3 x \sin^2 x$ $\qquad C(x) = \cos^6 x$

Ex. 4.9 [**] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $D_n : x \in [-\pi;\pi] \mapsto 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$

et $F_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

a. Que vaut $D_n(0)$?

b. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,
$D_n(x) = 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \dfrac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + 1$.

c. En déduire que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

d. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$?

e. Montrer que pour tout $x \in [-\pi;\pi]\backslash\{0\}$,

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

f. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to 0} F_n(x)$?

Maths - Feuille d'exos n° 5

Fonctions de référence

I. Logarithmes et exponentielle

Ex. 5.1 Soit $n, q \in \mathbb{N}^*$.

a. Compléter : n s'écrit avec exactement q chiffres si et seulement si
.... $\leqslant n <$ ....

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $\log_{10}(n)$ pour que n s'écrive avec q chiffres.

c. En utilisant le fait que $2^{10} = 1024 \approx 10^3$, donner une valeur approchée de $\log_{10}(2)$.

d. Donner le nombre approximatif de chiffres du plus grand nombre premier connu $2^{77\,232\,917} - 1$ (record obtenu le 3 janvier 2018 - voir exercice 2.11).
[Réponse : ce nombre premier possède 23 249 425 chiffres en base 10.]

Ex. 5.2 (Cor.) Soient $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.
Montrer que $x \mapsto u(x)^{v(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Ex. 5.3

a. Montrer que pour tout réel positif x, $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

b. Montrer que $e \geqslant \dfrac{8}{3}$.

Ex. 5.4 Calculer, si elles existent :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 4x + 1 - \ln(x)$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x + 1$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3+1}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1) - \ln(x))$

Ex. 5.5 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$. Que peut-on dire des limites de la forme $1^{+\infty}$?
Calculer de même $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{-x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln(x)}}$.
Interpréter ces résultats en terme de formes indéterminées.

Ex. 5.6 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to0^+} = x^x$ $\lim\limits_{x\to0^+} = \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)^x$
Quelle conclusion peut-on en tirer sur la valeur que pourrait avoir 0^0 ?
Calculer la limite $\lim\limits_{x\to0^+} = \left(2^{\frac{-1}{x}}\right)^x$ et préciser votre réponse.

Ex. 5.7 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x :
$(E_1) : \log_{10}(x+2) - \log_{10}(x+1) = \log_{10}(x-1)$.
$(E_2) : x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.

II. Fonctions trigonométriques et réciproques

Ex. 5.8 Valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$?

Ex. 5.9 Donner la valeur de $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{-1}{2}\right)$, $\mathrm{Arccos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right)$.

Ex. 5.10 (Cor.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\tan x = 1$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2(x)$

d. $\cos(12x) - \cos(2x) = \sqrt{3}\sin(5x)$

Ex. 5.11 Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

Ex. 5.12 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $\text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{6}$ b. $\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right) = \pi$

c. $\text{Arcsin}\, x = \text{Arccos}\, x$ d. $\text{Arcsin}(2x-1) = \alpha \in \mathbb{R}$

Ex. 5.13 (Cor.) $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$: donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

III. Fonctions hyperboliques

Ex. 5.14 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer $\text{ch}(3x)$ en fonction de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$.

b. Linéariser $\text{sh}^2(x)\,\text{ch}(x)$ (c'est-à-dire l'exprimer comme combinaison linéaire de fonctions du type $x \mapsto \text{ch}(kx)$ ou $x \mapsto \text{sh}(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$).

c. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ch}(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \text{ch}(kx)$.

Ex. 5.15 (Cor.) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{sh}(2\alpha) = 2\,\text{sh}(\alpha)\,\text{ch}(\alpha)$.

b. On pose $p_n(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Calculer $\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) p_n(x)$ pour $x \neq 0$ et en déduire une formule simplifiée de $p_n(x)$.

c. On pose $p(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n(x)$.

Déterminer $p(x)$ pour $x \neq 0$.

d. Vérifier que p est continue en 0.

Ex. 5.16 (Cor.) [$*$] Déterminer les réels $a > b$ tels que le système suivant ait des solutions :

$$\begin{cases} \text{ch}\, x + \text{ch}\, y &= a \\ \text{sh}\, x + \text{sh}\, y &= b \end{cases}$$

Corrections

Cor. 5.2 : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))} = f(x)$ est bien définie car $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) > 0$.

Par ailleurs, c'est une fonction dérivable comme composée et produit de fonctions qui le sont et :

$f'(x) = \left[v'(x)\ln(u(x)) + v(x) \times \frac{u'(x)}{u(x)}\right] e^{v(x)\ln(u(x))}$ d'où $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = v'(x)\ln(u(x))\,u(x)^{v(x)} + v(x)u'(x)u(x)^{v(x)-1}$$

Cor. 5.10 : a. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x &=& \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} && \\ x &=& \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$S_a = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{-\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, résultat donné par la propriété 5.21 du cours.

b. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in S_b = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ car $\text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

c. $\sin^2(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^2 x \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \cos x &=& 0 \\ \texttt{ou} && \\ \sin^2 x &=& \frac{1}{4} \end{array}\right.$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} x &=& \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} && \\ x &=& \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} && \\ x &=& -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \texttt{ou} && \\ x &=& \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \texttt{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

$S_c = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Donc $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a \sin b$.

On cherche $a + b = 12x$ et $a - b = 2x$ et on obtient $a = 7x$ et $b = 5x$.

Donc l'équation équivaut à

$-2\sin(7x)\sin(5x) = \sqrt{3}\sin(5x) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{lcl} \sin(5x) &=& 0 \\ \texttt{ou} && \\ \sin(7x) &=& -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$S_d = \left\{\frac{k\pi}{5}, -\frac{\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, \frac{4\pi}{21} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Cor. 5.13 : $f(x)$ est définie si et seulement si

- $\frac{1+x}{1-x}$ est défini d'une part ;
- et $-1 \leqslant \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1$ d'autre part.

Étudions donc $g : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$.

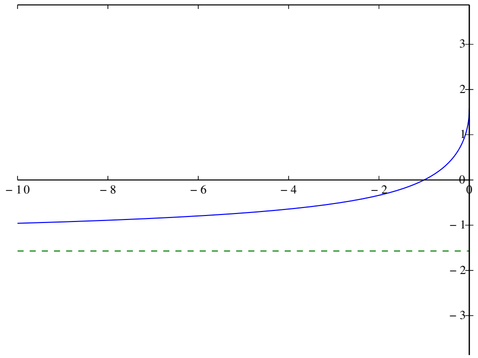
g est définie (et dérivable) sur $G = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et sur cet ensemble

$g(x) = \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{2+x-1}{1-x} = \dfrac{2}{1-x} - 1$.

Donc $-1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{2}{1-x} \leqslant 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant 1-x \\ 1-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}_-$ et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (l'étude précédente restant valable en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes).

On a alors $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{\sqrt{1 - 1 - \frac{4}{(1-x)^2} + \frac{4}{1-x}}}$. Après simplification, on obtient donc en tenant compte du fait que $x < 0$ et que par conséquent $1 - x > 1 > 0$ $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$. Enfin, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{-\pi}{2}$ (asymptote horizontale d'équation $y = \dfrac{-\pi}{2}$) et $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.



Cor. 5.15 :

a. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(2\alpha) = \dfrac{e^{2\alpha} - e^{-2\alpha}}{2} = \dfrac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\alpha} + e^{-\alpha})}{2} = 2\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\alpha)$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$

$$p_n(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \prod_{k=0}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = \frac{p_{n-1}(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2}.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $q_n(x) = p_n(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or son premier terme vaut $q_0(x) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)$ donc

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

c. On écrit pour $x \neq 0$:

$2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = x\dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x\operatorname{sh}'(0) = x\operatorname{ch}(0) = x$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, p(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)}{x}$.

De plus, pour $x = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(0) = 1 = p(0)$.

d. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = p(0)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x} = \operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(0) = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} p(x) = 1 = p(0)$. p est bien continue.

Cor. 5.16 : Posons $X = e^x > 0$ et $Y = e^y > 0$. Le système se réécrit :

$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= a \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y &= b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + \frac{1}{X} + Y + \frac{1}{Y} &= 2a \\ X - \frac{1}{X} + Y - \frac{1}{Y} &= 2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{L_1+L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_1-L_2}{2} \end{array} \begin{cases} X + Y &= a+b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} &= a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X + Y &= a+b \\ \frac{Y+X}{XY} &= a-b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} X + Y &= a+b \\ XY &= \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$

Or deux nombres r_1, r_2 dont on connaît le produit P et la somme S sont solutions de l'équation

$r^2 - Sr + P = 0$ (relations coefficients-racines dans les équations du second degré)

Donc X et Y sont solutions de $r^2 - (a+b)r + \frac{a+b}{a-b} = 0$.

$\Delta = (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b} = \dfrac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}$

Nous cherchons des solutions X et Y réelles strictement positives avec par hypothèses $a > b$ et $XY = \frac{a+b}{a-b} > 0$ donc $b > -a$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{b^2+4}$ (car $a = \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y > 0$).

$r_1 = \frac{a+b+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $r_2 = \dfrac{a+b-\sqrt{\frac{(a+b)(a^2-b^2-4)}{a-b}}}{2} = \dfrac{(a+b)\left(\sqrt{a^2-b^2} - \sqrt{a^2-b^2-4}\right)}{2\sqrt{a^2-b^2}} > 0$.

Une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que le système ait des solutions est donc

$$a > \sqrt{b^2 + 4}$$

Nombres complexes : équations et géométrie

Remarque

On trouve sur internet une banque d'exercices d'oraux corrigés pour le concours CCP MP 2019. La plupart de ces exercices ne sont pas compréhensibles en Maths Sup, mais certains d'entre eux concernent en fait le programme de première année. Lorsque des exercices (du cours ou des feuilles d'exercices) seront extraits de cette banque, ils seront indiqués par ***CCP MP 2019 - n°xx***. Le numéro donné permet d'aller rechercher dans la banque d'exercices la solution officielle donnée.

Adresse internet de la banque d'exercices :
https://ccp.scei-concours.fr/cpge/oral/banque_finale_19_avec_corr.pdf

I. Utilisation en géométrie et en algèbre

Ex. 6.1 Soient z et z' deux complexes distincts de module égal à 1.

a. Montrer que $\overline{(z+z')}(z-z') \in i\mathbb{R}$.

b. En déduire que les bissectrices intérieures et extérieures de deux droites sécantes sont orthogonales.

Ex. 6.2 Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que ABC soit un triangle équilatéral ***direct***.

b. Montrer que cette condition est équivalente à $a + jb + j^2c = 0$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ABC soit un triangle équilatéral.

d. Existe-t-il des triangles équilatéraux à coordonnées entières ? [***Indication*** : on admettra que $\sqrt{3}$ est irrationnel.]

Ex. 6.3 ***Transformations du plan complexe***

a. Donner une interprétation géométrique de la transformation du plan complexe
$z \mapsto \left(\sqrt{3} - i\right) z - 2 + 2i \left(1 - \sqrt{3}\right)$.

b. Ecrire l'affixe z' du point M' image de $M(z)$ par la rotation de centre $O'(1+i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Ex. 6.4 Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
$E : z^3 - (16-i)z^2 + (89-16i)z + 89i = 0$.
Quelle particularité présente le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de cette équation ?

Ex. 6.5 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :
$E_1 : e^z = 1+i \qquad E_2 : e^z = e^{1+i}$

Ex. 6.6 Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

$E_1 : z^2 + z + 5 = 0 \qquad E_2 : z^6 = \dfrac{1+i}{4\sqrt{6} - i4\sqrt{2}}$

$E_3 : 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0 \qquad E_4 : z^2 = -3 + 4i$

$E_5 : (1+i)z^2 - z - 1 + i = 0 \qquad E_6 : \theta \in \mathbb{R}, z^4 - 2\cos(\theta) z^2 + 1 = 0$

$E_7 : z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0$

$E_8 : z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$

$E_9 : \left(z^2 + 4z + 1\right)^2 + (3z+5)^2 = 0$

Ex. 6.7 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation

$$nz^n = z^{n-1} + ... + z + 1$$

a. Résoudre (E_1).

b. Résoudre (E_2).

c. Résoudre (E_3).

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 1 est solution de (E_n).

e. Montrer que si $|z| > 1$ alors $n\,|z^n| > |z^{n-1} + ... + z + 1|$.

f. On suppose que $z=e^{i\theta}\neq 1$ est solution de (E_n).
Montrer que $ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}=\dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

g. Montrer que 1 est la seule racine de (E_n) de module 1.

h. Conclure.

Ex. 6.8 ***CCP MP 2019 - n°84***

a. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul. (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre)

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.

c. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions de l'équation (E) : $(z+i)^n=(z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

d. Donner une démonstration géométrique du fait que les solutions de (E) sont des nombres réels, sans faire intervenir le résultat de la question précédente.

Ex. 6.9 Soient $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Écrire $S=1+z+...+z^{n-1}$ sous la forme d'un quotient.

b. En déduire que pour tout entier $n>1$, la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$ est nulle.

Ex. 6.10 Trouver toutes les applications $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ telles que

$$\forall z\in\mathbb{C}, f(z)+zf(1-z)=1+z$$

Corrections

Cor. 6.7 :

a. $(E_1): z=1$.

b. $(E_2): 2z^2=z+1$.
$\Delta=1+8=9$ conduit aux deux solutions $z_1=1$ et $z_2=\dfrac{-1}{2}$.

c. $(E_3): 3z^3=z^2+z+1$.
On lit la question suivante :-), et on note que $z_1=1$ est racine évidente. D'où
$(E_3)\Leftrightarrow(z-1)\left(3z^2+2z+1\right)=0$.
$\Delta=4-12=-8$ conduit aux deux autres solutions $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3}$ et $z_3=\dfrac{-1-i\sqrt{2}}{3}$.

d. D'une manière générale, (E_n) s'écrit $nz^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k$.
Pour $z=1$, les membres de droite et de gauche de l'équation valent n. Donc 1 est solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

e. Supposons $|z|>1$. Alors d'après l'inégalité triangulaire
$\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right|\leqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left|z^k\right|<n|z|^{n-1}<n|z|^n$.
On en déduit immédiatement que (E_n) n'a aucune solution de module strictement supérieur à 1.

f. Soit $z=e^{i\theta}\neq 1$ une solution de (E_n). Alors
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{n\theta}{2}}-e^{i\frac{n\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}=e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$. En remplaçant dans (E_n) on obtient
$ne^{in\theta}=e^{i\frac{(n-1)\theta}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\Leftrightarrow ne^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}=\dfrac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

g. En gardant les mêmes notations que dans la question précédente, supposons que (E_n) admette une racine de module 1 distincte de $z=1$. Le résultat précédent conduit en identifiant les ***parties réelles*** des deux membres à

$$\begin{aligned}(E_n)\ &\Rightarrow\ n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)=\sin\left(\tfrac{(n+1-1)\theta}{2}\right)\\ &\Rightarrow\ n\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)-\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)=0\\ &\Rightarrow\ (n+1)\sin\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)-\cos\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{(n+1)\theta}{2}\right)=0\end{aligned}$$

L'identification des ***parties imaginaires*** conduit quant à elle immédiatement à $\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)=0$ et donc à $\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)=1$.
La conjonction de ces deux identités permet donc d'affirmer que si

$z = e^{i\theta} \neq 1$ est solution de (E_n) alors
$\frac{\theta}{2} \equiv 0\,[\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\,[2\pi]$ ce qui est absurde puisque $z \neq 1$.
Donc la seule racine de module 1 est 1.

h. Les questions d, e et g permettent d'affirmer que si z est solution de (E_n) alors $z = 1$ ou $|z| < 1$.

Maths - Feuille d'exos n° 7

Équations différentielles et calcul intégral

I. Intégrales et primitives

Ex. 7.1 Déterminer les primitives suivantes :

$$F_1(x) = \int^x t(t^2-1)^7\mathrm{d}t \qquad F_2(x) = \int^x (t^2-1)^7\mathrm{d}t$$

$$F_3(x) = \int^x \sqrt{5t+4}\mathrm{d}t \qquad F_4(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+5}$$

$$F_5(x) = \int^x \frac{2}{\sqrt{6-6t^2}}\mathrm{d}t \qquad F_6(x) = \int^x \frac{2t+5}{(t^2+5t+8)^4}\mathrm{d}t$$

$$F_7(x) = \int^x \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \qquad F_8(x) = \int^x \frac{1}{e^t+1}\mathrm{d}t$$

$$F_9(x) = \int^x \frac{2t}{(t-1)(3-t)}\mathrm{d}t \qquad F_{10}(x) = \int^x \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 7.2 Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^x\cos(nx)\mathrm{d}x$.

Ex. 7.3 En effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, calculer

$$F(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

et précisez les intervalles sur lesquels cette primitive est définie.
En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ en précisant les intervalles sur lesquels elle est définie.

Ex. 7.4 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et

$$F : x \in]0;+\infty[\mapsto \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.

d. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

e. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$\dfrac{1+x\ln(x)-x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1+x\ln(x)-x$.

f. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ existe et donner un encadrement de cette limite.

g. Même question pour $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

h. Représenter graphiquement F.

II. Équations différentielles

Ex. 7.5 Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$

$$(E) : y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\,\mathrm{ch}(x)$$

Ex. 7.6 Résoudre pour $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$$(E) : y' + \tan(t)y = \sin(2t)$$

puis donner l'unique solution telle que $y(0) = 1$.

Ex. 7.7 Résoudre les équations différentielles suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

a. $(E_1) : y'' + 9y = x+1, y(0) = 0$

b. $(E_2) : y'' - 2y' + y = e^x\cos(x)$

c. $(E_3) : y'' + y' - 2y = \sin^3(x)$.

Ex. 7.8 Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant le ou les intervalles de résolution choisis :

a. $ty' + y = \cos(t)$

b. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

c. $xy'\ln(x) - y = 3x^2\ln^2(x)$

d. $y'' - y = \operatorname{sh}(x)$

e. $y'' + y' = 4x^2 e^x$ avec $y(0) = e$ et $y'(0) = 0$.

III. Compléments

Ex. 7.9 (Cor.) [$*$] Trouver les fonctions $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ telles que

$$\begin{cases} x'' &= x' + y' - y \\ y'' &= x' + y' - x \end{cases}$$

Indication : poser $u = x + y$ et $v = x - y$.

Ex. 7.10 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Indication : poser $g(t) = f(e^t)$.

Ex. 7.11 (Cor.) [$*$] Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$

Corrections

Cor. 7.9 : On suit l'indication ! Posons $u = x + y$ et $v = x - y$ et cherchons des équations différentielles satisfaites par u et v.
En sommant les deux équations du système proposé : $u'' = 2u' - u$
En faisant la différence des deux équations : $v'' = v$.
La première conduit à $u = (Ax + B)e^x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
La seconde conduit à $v = Ce^x + De^{-x}, (C, D) \in \mathbb{R}^2$.
Et on vérifie que ces solutions conviennent toutes.

Cor. 7.11 :
1ère méthode : par dérivation de l'équation fonctionnelle.
On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - f(-x)$ et f et exp sont dérivables, donc f' est dérivable c'est-à-dire f deux fois dérivable. Dérivons l'équation fonctionnelle :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(-x) = e^x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - e^{-x} + f(x) = e^x$.
On résout donc l'équation différentielle $(E) : y'' + y = e^x + e^{-x} = 2\operatorname{ch} x$.
Équation homogène : $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y = A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$.
Solution particulière de (E) : $y = \operatorname{ch} x$ est solution évidente.
Conclusion : les solutions de (E) sont les fonctions

$$y = \operatorname{ch} x + A\cos x + B\sin x, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Nous n'avons pas raisonné par équivalence, il faut vérifier qu'elles sont bien solutions de l'équation fonctionnelle :
$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(-x) = \operatorname{sh}(x) - A\sin x + B\cos x + \operatorname{ch} x + A\cos x - B\sin x = e^x$
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (A+B)(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow A = -B$ en substituant par exemple $x = 0$ dans la précédente assertion.
Les solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \operatorname{ch} x + A\cos x - A\sin x, A \in \mathbb{R}$$

2ème méthode : en utilisant la décomposition en partie paire et partie impaire.
On décompose sur $\mathbb{R}$ f en sa partie paire g et sa partie impaire h. **La dérivée d'une fonction paire est impaire et la dérivée d'une fonction impaire est paire**. Donc l'équation fonctionnelle s'écrit pour tout réel x :
$g'(x) + h'(x) + g(-x) + h(-x) = e^x \Leftrightarrow (h'(x) + g(x)) + (g'(x) - h(x)) = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.
La décomposition en partie paire et partie impaire étant unique on a donc :
$\begin{cases} h' + g &= \operatorname{ch} \\ g' - h &= \operatorname{sh} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h'' + g' &= h'' + h + \operatorname{sh} = \operatorname{sh} \\ g' - h &= \operatorname{sh} \end{cases}$ On résout la première équation différentielle : $h = A\cos + B\sin$, or h impaire donc $h = B\sin, B \in \mathbb{R}$.
Donc $g = \operatorname{ch} - h' = \operatorname{ch} - B\cos$.
Finalement, on obtient les solutions de l'équation fonctionnelle :

$$f = \operatorname{ch} - B\cos + B\sin, B \in \mathbb{R}$$

qui sont identiques (évidemment) à celles trouvées par la première méthode.

Maths - Feuille d'exos n° 8

Nombres réels et suites numériques

I. L'ensemble $\mathbb{R}$

Ex. 8.1 Pour les ensembles suivants, donner lorsqu'ils existent, l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, le plus grand et le plus petit élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad B = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$C = \left\{\frac{x^2-3x+6}{x-2}, x \in [3;7]\right\}$ $\quad D = \mathbb{Q} \cap [0;\pi]$

$(a,b) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$:

$E = \left\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ $\quad F = \left\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

$G = \left\{a + \frac{(-1)^n b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

Ex. 8.2 (Cor.) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, x \leq \alpha$.

Montrer que $\sup A \leq \alpha$.

Que peut-on dire si $\forall x \in A, x < \alpha$?

Ex. 8.3 (Cor.) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \left\{k + \frac{n}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$.

- Montrer que E_n admet une borne inférieure et que $\inf E_n = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \left(k + \dfrac{n}{k}\right)$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
  Cas d'égalité : $\inf E_n = \sqrt{4n}$?

Ex. 8.4 On note $\mathcal{A} = \left\{p + q\sqrt{2}, (p,q) \in \mathbb{Z}^2\right\} \subset \mathbb{R}$, et $\mathcal{A}_+^* = \{x \in \mathcal{A}, x > 0\}$.

a. Montrer que $\mathcal{A}_+^*$ possède une borne inférieure.

b. Calculer $\inf \mathcal{A}_+^*$.

c. Montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra tenter d'adapter les deux premières questions à l'ensemble $\mathcal{A}_a = \{x \in \mathcal{A}, x > a\}$ où a est un réel quelconque.

Ex. 8.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire la valeur de $\left\lfloor \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{100} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$.

II. Introduction aux suites

Ex. 8.6 Étudier la monotonie des suites définies par :

$u_n = \frac{1}{1+n^2}$ $\quad v_n = \frac{n!}{2^n}$ $\quad w_n = \frac{n^3}{5^n}$ $\quad x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+(-1)^n}}$

Ex. 8.7

a. Montrer que pour tous réels x et y, on a :
$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

b. Montrer que pour tout réel x on a : $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

c. Soit u la suite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = & n - u_n \end{array}\right.$.
Calculer u_n en fonction de n (on demande une formule explicite).

Ex. 8.8 Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, u_0 \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?

b. Étudier alors sa monotonie.

c. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 8.9 (Cor.) Soient $a \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + a\right), u_0 \in \mathbb{R}$.

a. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle définie ?

b. Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle bornée ?

Ex. 8.10 Montrer que la suite u définie par $u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{4}$, $u_0 \in \mathbb{R}$ est croissante quelle que soit la valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.
Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 la suite est-elle majorée ?
Montrer l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ puis donner sa valeur.

Ex. 8.11 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_1 & = & 2 \\ u_{n+2} & = & \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$.
Étudier la suite u, préciser notamment sa limite si elle existe.

Ex. 8.12 Soient a, b deux constantes réelles, u une suite réelle vérifiant $u_{n+2}+u_{n+1}+u_n = 0$ et v une suite réelle vérifiant $v_{n+2}+av_{n+1}+bv_n = 0$.

a. Montrer sans calculer son terme général que u est périodique de période 3.
b. Calculer le terme général u_n en fonction de n et retrouver le résultat précédent.
c. On suppose que la suite v est **non nulle** et périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe un nombre complexe $Z = \rho e^{i\theta}$ vérifiant à la fois l'équation caractéristique (E_c) : $Z^2 + aZ + b = 0$ et l'équation $Z^p - 1 = 0$.
Indication : on envisagera plusieurs cas possibles suivant la nature des solutions de (E_c).
d. Exhiber une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui soit périodique de plus petite période 5.
Indication : en posant $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, on pourra commencer par montrer que
$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2 + \phi X + 1)\left(X^2 - \frac{X}{\phi} + 1\right)$.

Ex. 8.13 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$

III. Limite d'une suite réelle

Ex. 8.14

a. Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p(p+1)}$.
c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^2}$ est finie et en donner un encadrement d'amplitude 1.

Ex. 8.15 Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n + 2\sin\left(n^2\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} 2n + (-1)^n n \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n, a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{2\sqrt{n} - (-1)^n}$$

Ex. 8.16 (Cor.)

a. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$.
b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
c. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} = +\infty$.

Ex. 8.17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Ex. 8.18 Montrer en utilisant des suites extraites que $\left(\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
Faire de même pour $\left(\cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ puis pour $\left(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex. 8.19 On considère les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.
Montrer que u et v convergent vers une même limite.

Ex. 8.20 Soit u définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.
b. Montrer que u est convergente et déterminer sa limite.

Ex. 8.21 Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

a. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
b. Étudier cette suite dans les cas où $z_0 = 0$, $z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$.
c. Montrer que $z_0 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, z_n \notin \mathbb{R}$.
d. On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}$. Étudier la convergence de (z_n).
[Indication : écrire les termes de la suite sous forme exponentielle.]

IV. Révisions

Ex. 8.22 Donner une formule explicite pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ ou $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ en envisageant successivement les deux cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

a. $y' = y - 1$ et $u_{n+1} = u_n - 1$
b. $y'' = -y' + y$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$.

Ex. 8.23 Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $S_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ et $T_n = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (-1)^i \binom{j}{i}$.
En déduire la valeur de $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{j}{i}$ et $\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{j}{i}$.

Ex. 8.24 En remarquant que $\forall x \in [0;1], x^2 \leqslant x$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geqslant \frac{n}{4}$$

Corrections

Cor. 8.2 : Par définition, α est un majorant de A. Donc A, non vide et majoré, possède une borne supérieure qui est le plus petit de ces majorants, en particulier inférieure ou égale à α. Si $\forall x \in A, x < \alpha$, on a encore $\sup A \leq \alpha$. Le même raisonnement que précédemment reste valable.
Attention cependant, il est possible que $\sup A = \alpha$. L'inégalité stricte n'est donc pas vérifiée pour la borne supérieure. Par exemple, si $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, on a $\forall x \in A, x < 1$, mais $\sup A = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$.

Cor. 8.3 :

- E_n est minoré par 0 et admet donc une borne inférieure. De plus, si $k \geq n+1$, alors $k + \frac{n}{k} > k \geq n+1$. Or pour $k = n$, on a $k + \frac{n}{k} = n+1$.
Donc la borne inférieure est atteinte pour $k \leq n$, c'est-à-dire :
$\inf E_n = \inf_{1\leq k\leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$.
- Étudions la fonction $f(x) = x + \frac{n}{x}$. Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = 1 - \frac{n}{x^2}$.
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{n}{x^2} \Leftrightarrow x > \sqrt{n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc f passe par un minimum en $x = \sqrt{n}$, valeur pour laquelle $f(x) = f\left(\sqrt{n}\right) = 2\sqrt{n}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \inf E_n \geq \sqrt{4n}$.
Pour qu'il y ait égalité, dans la mesure où $\inf E_n = \inf_{1\leq k\leq n} \left(k + \frac{n}{k}\right)$ est la borne inférieure d'un ensemble fini et qu'elle est donc atteinte, il faut que le minimum de la fonction f soit atteint c'est-à-dire que n soit un carré.

Cor. 8.9 :

a. On distingue deux cas :
   - Si $a \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + a > 0$, donc la suite u est définie pour toute valeur de $u_0 \in \mathbb{R}$.

- Sinon, $a<0$ donc $-a>0$. Soit $f:]\ln(-a);+\infty[\mapsto \ln(e^x+a)$. f est bien définie car
$\forall x>\ln(-a), e^x>e^{\ln(-a)}=-a\Rightarrow \forall x>\ln(-a), e^x+a>0$.
Étudions f : c'est une fonction dérivable sur son ensemble de définition comme composée de fonctions dérivables et
$\forall x\in]\ln(-a);+\infty[, f'(x)=\dfrac{e^x}{e^x+a}>0$. Donc f est strictement croissante, continue (car dérivable) donc bijective de $]\ln(-a);+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (car $f(x)\underset{x\to\ln(-a)^+}{\longrightarrow}-\infty$ et $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$).
Notamment, il existe des valeurs de $u_0\in]\ln(-a);+\infty[$ pour lesquelles u n'est pas définie puisque $\forall u_1<\ln(-a), \exists u_0\in]\ln(-a);+\infty[, u_1=f(u_0)$, le terme u_2 n'étant alors pas défini.
L'étude de l'existence de la suite u apparaît donc compliquée au premier abord.

On s'en remet à la méthode du cours et on étudie le signe de $g:x\in]\ln(-a);+\infty[\mapsto \ln(e^x+a)-x=\ln\left(\dfrac{e^x+a}{e^x}\right)$.
Comme $a<0$, $\forall x\in]\ln(-a);+\infty[, e^x+a<e^x$ donc $g<0$. La suite u, si elle est définie, est donc strictement décroissante.
Montrons par l'absurde que quelle que soit la valeur de u_0, u n'est dans ce cas pas définie.
Supposons que u soit définie et soit $U=\{u_n, n\in\mathbb{N}\}$. La suite étant supposée définie, on a $U\subset]\ln(-a);+\infty[$, en particulier U est minorée, non vide, donc possède une borne inférieur $\mu=\inf U$.
Or $g<0$ et f bijective, strictement croissante de $]\ln(-a);+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc :
  - ⋆ d'une part, $f(\mu)<\mu$ et $\forall y\in]f(\mu);\mu[, \exists x>\mu, y=f(x)$;
  - ⋆ d'autre part, d'après le lemme fondamental 8.12, il existe $u_n\in U$ vérifiant $\mu\leqslant u_n<x$.

  On en déduit que $u_{n+1}=f(u_n)<f(x)<\mu$ ce qui est absurde puisque μ est la borne inférieure de U donc minore la suite u.

En résumé, la suite u est définie si et seulement si $a\geqslant 0$, et ceci quelle que soit la valeur de $u_0\in\mathbb{R}$.

b. On suppose donc $a\geqslant 0$, $u_0\in\mathbb{R}$. On distingue à nouveau deux cas :
- si $a=0$, $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\ln(e^{u_n})=u_n$. La suite est donc constante (donc bornée) quelle que soit $u_0\in\mathbb{R}$.
- si $a>0$, une étude similaire à celle de la question précédente montre que
  - ⋆ g est strictement positive sur $\mathbb{R}$;
  - ⋆ u est par conséquent strictement croissante donc minorée par son premier terme ;
  - ⋆ que l'hypothèse de l'existence d'un majorant pour u conduit à une absurdité.

En résumé, la suite u est bornée si et seulement si $a=0$, auquel cas la suite est constante et égale à u_0 quel que soit $u_0\in\mathbb{R}$.

Cor. 8.16 :

a. Lemme : $\forall x\in]-1;+\infty[, \ln(1+x)\leqslant x$.
En effet, en définissant la fonction $f:x\in]-1;+\infty[\mapsto \ln(1+x)-x$ qui est dérivable et continue sur son intervalle de définition, on a :
$\forall x\in]-1;+\infty[, f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}$ qui est du signe de $-x$.
Donc f est croissante sur $]-1;0]$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle passe donc par un maximum en 0 qui vaut $f(0)=\ln(1)=0$ ce qui achève la démonstration du lemme.
Or $\forall p\in\mathbb{N}^*, \ln(p+1)-\ln(p)=\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)\leqslant\dfrac{1}{p}$ (qui appartient bien à $]-1;+\infty[$).
De même $\forall p\in\mathbb{N}^*, \ln(p+1)-\ln(p)=-\ln\left(\frac{p}{p+1}\right)=-\ln\left(\frac{p+1-1}{p+1}\right)=-\ln\left(1+\frac{-1}{p+1}\right)$.
Donc $\forall p\in\mathbb{N}^*, \ln(p+1)-\ln(p)\geqslant-\dfrac{-1}{p+1}$ (car $\dfrac{-1}{p+1}\in]-1;+\infty[$).

b. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
Or d'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}^*, \dfrac{1}{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leq\frac{1}{n}$.
En utilisant le théorème des gendarmes on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$.

c. D'après la première question, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\geqslant\sum_{p=1}^{n}\ln(p+1)-\ln(p)=\ln(n+1)$ (télescopage).
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}=+\infty$.

Développements limités

I. Développements limités : calcul

Ex. 9.1 Donner le développement limité à l'ordre 5 des fonctions suivantes :

a. $x \mapsto e^x$ au voisinage de 1 ;

b. $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$;

c. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de $\dfrac{1}{2}$.

Ex. 9.2 DL en 0 des expressions suivantes :

1. $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3
3. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 7
4. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4
5. $\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 2
6. $\mathrm{Arccos}(x)$ à l'ordre 5
7. $e^{\cos x}$ à l'ordre 4
8. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ à l'ordre 7

Ex. 9.3 (Cor.)

a. Donner un DL en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes :

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{2}{1-x} - 1$

$x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \dfrac{x+1}{1-x}$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$

$x \in]-\infty; 1[\mapsto -\ln(1-x)$ $\qquad$ $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

$x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ $\qquad$ $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi] \mapsto \tan(x)$

b. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - x + 1}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Ex. 9.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

a. Vérifier que f possède un $\mathrm{DL}_2(0)$.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas $C^1(\mathbb{R})$.

Ex. 9.5 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^x = n - x$ admet une unique solution positive que l'on note x_n.
Déterminer un équivalent u_n de x_n puis un équivalent de $x_n - u_n$ lorsque $n \to +\infty$.

Ex. 9.6 Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \operatorname{ch} x - 2}{x^4}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

II. Développements limités : utilisation

Ex. 9.7 Soit f définie sur $]-\pi;\pi[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

a. Déterminer un $DL_3(0)$ de f.

b. En déduire que f peut être prolongée en 0 en une fonction dérivable.
On note g ce prolongement.

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Ex. 9.8 ***CCP MP 2019 - n°1***

a. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

b. Déterminer le signe, au voisinage de $+\infty$, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ex. 9.9 ***D'après CCP MP 2019 - n°46*** On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

a. Prouver que $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

b. Donner la limite, puis un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Ex. 9.10

a. Prouver que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x = \tan(x)$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $I_n = \left]n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.

b. Exprimer $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$ en fonction de $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

c. En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où on explicitera a et b.

Ex. 9.11 Asymptote et position par rapport à la courbe en $+\infty$

1. $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ en $\pm\infty$
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
4. $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan}\left(1+\frac{2}{x}\right)$

Méthode : Recollement de solutions d'une EDL1

Lorsqu'une équation différentielle linéaire à l'ordre 1 est de la forme $u(t)y' + v(t)y = w(t)$, on commence par la diviser par $u(t)$ sur des intervalles où $u(t)$ ne s'annule pas pour obtenir une EDL1 de la forme $y' + a(t)y = b(t)$.
Une fois cette équation résolue (avec des constantes différentes sur chaque intervalle où $u(t)$ ne s'annule pas), on cherche à savoir si les solutions peuvent être ***recollées*** aux points où $u(t)$ s'annule pour obtenir des fonctions dérivables (donc continues).
Pour effectuer ce recollement, on utilise les développements limités grâce à la proposition 9.13 du cours sur les développements limités.

Ex. 9.12 Trouver l'ensemble des fonctions $f :]-\infty; 1[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall t \in]-\infty; 1[, t(t-1)f'(t) - (t-2)f(t) = 0$.

Ex. 9.13

a. Donner les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de $(1+t)y' + y = (1+t)\sin t$.

b. Même question pour $x(1-x)y' + y = x - 1$.

Corrections

Cor. 9.3 : Exemple de calcul de la première limite :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1).$$

Remarque importante : ici, par définition, $\epsilon(x) = \underset{x\to 0}{o}(1)$ est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\epsilon(x)}{1} = 0$.

À retenir : $\underset{x\to 0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque*** x ***tend vers 0***.

D'une manière générale, $\underset{x\to x_0}{o}(1)$ représente une ***expression tendant vers 0 lorsque*** x ***tend vers*** x_0.

Autrement dit, une fonction est négligeable devant 1 lorsqu'elle tend vers 0 (au voisinage d'un point).

Retour au calcul de limite :

$$\frac{\cos(x)-1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{o}(1) \text{ donc } \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Calcul matriciel

I. Ensembles de matrices

Ex. 11.1 Calculer
$$M = -3\begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex. 11.2 Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et

$Y = \begin{pmatrix} 5x+2y-z \\ x+z \\ x-y+3z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

Trouver une matrice A telle que $Y = AX$.
Est-elle unique ?

Ex. 11.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Soit $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne donné. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $AX = C$?

b. Montrer que l'équation $AX = C$ de la question précédente possède des solutions si et seulement si les coefficients de C sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique.

c. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 11.4 Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On note L_1, L_2 et L_3 les trois lignes de A.

a. Quels peuvent être les dimensions d'une matrice X telle que $XB = L_1$?

b. Trouver toutes les solutions de $XB = L_1$.

c. Faire de même pour $XB = L_2$ et $XB = L_3$.

d. Résoudre l'équation $MB = A$ d'inconnue M.

Ex. 11.5 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En écrivant $A = I_3 + J$, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

Ex. 11.6 Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ x & 0 & \frac{1}{x} \\ x^2 & x & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer M^2 et montrer que M^2 est une combinaison linéaire de I_3 et de M.
En déduire M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 11.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n.

II. Méthode du pivot et calcul matriciel

Ex. 11.8 On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ calculer $T_{1,2}D_3(2)AV_{3,1}(2)$, $V_{3,1}(2)AT_{1,2}D_3(2)$ et $V_{3,1}(-2)AT_{1,2}D_3\left(\frac{1}{2}\right)$.

Ex. 11.9 Déterminer la décomposition ER des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}8&-5\\3&2\\1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2&-1&5\\5&0&5\\5&1&-2\end{pmatrix}\text{ et } C=\begin{pmatrix}2&3&4\\3&6&10\\4&10&20\end{pmatrix}.$$
Montrer que C est la seule de ces matrices qui soit inversible et donner, sans calcul, une expression de C^{-1}.

Ex. 11.10 On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $A=\begin{pmatrix}3&9&-1\\-1&-3&1\\4&12&-2\end{pmatrix}$ dont une décomposition ER est

$$A=V_{1,2}(-1)V_{3,2}(-2)D_1(2)V_{2,1}(-1)V_{3,1}(2)\begin{pmatrix}1&3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Résoudre (avec le minimum de calculs) le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl}3x&+&9y&-&z&=&\alpha\\-x&-&3y&+&z&=&\beta\\4x&+&12y&-&2z&=&\gamma\end{array}\right.$$

Ex. 11.11 (Cor.) Discuter suivant les valeurs de $a,b,c\in\mathbb{K}$ l'inversibilité des matrices suivantes et calculer leur inverse lorsqu'elle existe :

$$A=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\a+b&a+c&b+c\\ab&ac&bc\end{pmatrix}$$

Généralisation aux dimensions $n>3$?

Ex. 11.12 Discuter suivant les valeurs de $a,b\in\mathbb{K}$ l'inversibilité de
$$M=\begin{pmatrix}a^2&ab&ab&b^2\\ab&a^2&b^2&ab\\ab&b^2&a^2&ab\\b^2&ab&ab&a^2\end{pmatrix}.$$

III. Divers

Ex. 11.13 On considère les deux suites u et v définies par $u_0=1$, $v_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\left\{\begin{array}{rcl}u_{n+1}&=&6u_n-v_n\\v_{n+1}&=&u_n+4v_n\end{array}\right.$.

a. Montrer qu'il existe une matrice A telle que $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix}$.

b. Montrer que $A=5I_2+J$ où $J\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est à déterminer.

c. Déterminer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Ex. 11.14 Soit $A=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\1&\cdots&1&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^k pour $k\in\mathbb{N}$ puis pour $k\in\mathbb{Z}$.

Ex. 11.15 Soit $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $F=\{\lambda I+\mu J\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\lambda\in\mathbb{R},\mu\in\mathbb{R}\}$.
Montrer que $(F,+,\times)$ est un corps et le reconnaître.

Ex. 11.16 Montrer que $\forall n,p\in\mathbb{N}^*,\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ sont des matrices carrées symétriques.
Peuvent-elles être simultanément inversibles ?
Application numérique : calculer ${}^tAA$ et $A\,{}^tA$ pour $A=\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&2&0\end{pmatrix}$.
L'une de ces deux matrices est-elle inversible ?

Ex. 11.17 Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice ***antisymétrique*** et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur colonne.

a. À quel espace de matrices appartient le produit ${}^tXAX$?

b. Montrer que ${}^tXAX=0$.

Cor. 11.11 : En supposant $a \neq b$, $a \neq c$ et $b \neq c$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 1 & b & b^2 & y \\ 1 & c & c^2 & z \end{pmatrix} \quad
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & y-x \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & z-x \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 1 & a+c & \frac{z-x}{c-a} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & c-b & \frac{z-x}{c-a}-\frac{y-x}{b-a} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & x \\ 0 & 1 & a+b & \frac{y-x}{b-a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(b-a)(z-x)-(y-x)(c-a)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \frac{x(c-a)(b-a)(c-b)-a^2\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(y-x)(c-a)(c-b)-(a+b)\big((c-b)x+(a-c)y+(b-a)z\big)}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix} \\
&\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{bc(c-b)x+ac(a-c)y+ab(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(c+b)(c-b)x+(a+c)(a-c)y+(a+b)(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(c-b)x+(a-c)y+(b-a)z}{(c-a)(b-a)(c-b)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{bc}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{ac}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{b+c}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{a+c}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{1}{(c-a)(b-a)} & \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \end{pmatrix}$$

La comparaison entre la matrice A^{-1} et la matrice B permet par ailleurs d'inférer, sans calcul, que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} & \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} & \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} \\ \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{b}{(b-a)(b-c)} & \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} \\ \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} & \dfrac{1}{(a-b)(a-c)} \end{pmatrix}$$

Espaces vectoriels

I. Définition, sous-espaces vectoriels

Ex. 12.1 (Cor.) On considère $F = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$.
Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, mais n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Ex. 12.2 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$?

1) $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$
2) $\left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$
3) $\{f \in E, f(0) = f(1) + 1\}$
4) $\{f \in E, f(0) = 2f(1)\}$
5) $\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f'(0) = 0\}$

Ex. 12.3 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$ et on définit
$F = \mathrm{Vect}\left((1; 0; 1); (1; 1; 0)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left((0; 1; 1)\right)$.

- Déterminer $F \cap G$.
- Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Ex. 12.4 Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère le sous-espace vectoriel de E défini par
$H = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$ (voir exercice 12.2).
Trouver un supplémentaire de H dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

Ex. 12.5 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F + G$. Soit F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F.
Montrer que $E = F' \oplus G$.

Ex. 12.6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que A et B sont supplémentaires dans E et $A \subset C$.
Montrer que A et $B \cap C$ sont supplémentaires dans C.

Ex. 12.7 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\left(\vec{u}_1, \vec{u}_2\right) = \mathrm{Vect}\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$.

Ex. 12.8 (Cor.) Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites complexes vérifiant la relation de récurrence $u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On note (E_c) l'équation caractéristique $z^3 - az^2 - bz - c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et on suppose que (E_c) possède trois racines distinctes z_1, z_2 et z_3.

a. Montrer que $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel.

b. Montrer que $\mathrm{Vect}\left((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}} ; (z_2^n)_{n\in\mathbb{N}} ; (z_3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \subset \mathcal{U}$.

II. Applications linéaires

Ex. 12.9

a. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?
$f : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x - 2y + 3z \in \mathbb{R}$
$g : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y; 1) \in \mathbb{R}^2$
$h : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; x + y) \in \mathbb{R}^2$

b. Déterminer le noyau et l'image des applications linéaires précédentes.

Ex. 12.10 Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes linéaires sur $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

(1) $f \mapsto f(0)$ (2) $f \mapsto f(1) - 1$ (3) $f \mapsto f''(3)$
(4) $f \mapsto \left(f'(2)\right)^2$ (5) $f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 12.11 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, et
$$\Phi : \left\{\begin{array}{lcl} E \times E & \to & E \times E \\ (x; y) & \mapsto & (x + y; x + f(x + y)) \end{array}\right. .$$
Montrer que Φ est un automorphisme de $E \times E$.

Ex. 12.12

a. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
Montrer qu'il existe $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$ tels que
$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \phi(x; y) = (ax + by; cx + dy)$.

b. Donner des énoncés similaires pour
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$;
- $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Ex. 12.13 Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u : E \to G$, $v : F \to G$ linéaires tels que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} v$.

a. Montrer que si v est injective alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.

b. Montrer que si il existe un sous-espace vectoriel A de F tel que $\operatorname{Ker} v \oplus A = F$, alors il existe une application linéaire $w : E \to F$ telle que $u = v \circ w$.

Ex. 12.14 (Cor.) E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.

III. Applications linéaires particulières

Ex. 12.15 Montrer que $s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \mapsto & (x - 2y; -y) \end{cases}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.
Préciser alors les espaces F et G tels que s soit la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.16 On se place sur $E = \mathbb{R}^3$.
$F = \operatorname{Vect}((1; 0; 1); (1; 1; 0))$ et $G = \operatorname{Vect}((0; 1; 1))$ de sorte à ce que $E = F \oplus G$ (cf. exercice 12.3).
Déterminer l'expression de la symétrie autour de F parallèlement à G.

Ex. 12.17 Donner l'expression de la projection sur $\operatorname{Vect}(-1; 1)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(2; 1)$.

Ex. 12.18 Déterminer la nature des applications linéaires suivantes :

a. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (-x; y - 2x) \in \mathbb{R}^2$

b. $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x - y; y - x) \in \mathbb{R}^2$

Ex. 12.19 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition de E associée (voir exercice 12.14...).

Ex. 12.20 (Cor.) Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

a. Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b. Montrer qu'on a alors $\ker(p + q) = \ker p \cap \ker q$.

Corrections

Cor. 12.1 : En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F = \operatorname{Vect}(1 + i)$ est donc un sous-espace vectoriel donc un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$).
En considérant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, le vecteur $1 + i$ par exemple est un vecteur de F mais $i(1 + i) = -1 + i \notin F$: donc F n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Cor. 12.5 : F' est le supplémentaire de $F \cap G$ (qui est un s.e.v. de $(E, +, .)$) dans F. Donc $F = F' \oplus (F \cap G)$.
Nous devons démontrer que $F' \cap G = \{0\}$ et $F' + G = E$.
- Soit $x \in F' \cap G$. $x \in F' \Rightarrow x \in F$ et $x \in G \Rightarrow x \in F \cap G$. Donc $x \in F'$ et $x \in (F \cap G)$ donc $x = 0$.
  Donc $F' \cap G = \{0\}$.
- Soit $x \in E$. $E = F + G$ donc $\exists (u, v) \in F \times G$, $x = u + v$.
  $u \in F$ et $F = F' \oplus (F \cap G)$ donc $\exists (u_1, u_2) \in F' \times (F \cap G)$ tels que $u = u_1 + u_2$.
  Donc $x = u_1 + u_2 + v$ avec $u_1 \in F'$ et $u_2 + v \in G$ (car G est un e.v.).
  Donc $E = F' + G$.

Finalement on a démontré que $E = F' \oplus G$.

Cor. 12.7 : Notons $E=\mathbb{R}^3$, $F=\text{Vect}(u_1,u_2)$ et $G=\text{Vect}(e_1,e_2)$. Démontrons que $F=G$ par double inclusion :

- $F\subset G$: soit $u=\lambda u_1+\mu u_2\in F$. Montrons que $u\in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y)\in G$ tels que $u=xe_1+ye_2$. Cherchons donc $(x;y)\in\mathbb{R}^2$ tels que
$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1)=x(3;2;2)+y(0;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu &= 3x\\ \mu &= 2x+y\\ \mu &= 2x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda+\mu}{3}\\ y = \dfrac{\mu-2\lambda}{3}\end{cases}$$
Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F\subset G$.
- $G\subset F$: soit $e=xe_1+ye_2\in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que $e=\lambda u_1+\mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$ tels que
$$\lambda(1;0;0)+\mu(1;1;1)=x(3;2;2)+y(0;1;1) \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu &= 3x\\ \mu &= 2x+y\\ \mu &= 2x+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x-y\\ \mu = 2x+y\end{cases}$$
Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G\subset F$.
Comme $F\subset G$ et $G\subset F$, on conclut que $F=G$.

Cor. 12.8 :

a. Montrons que $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:
   - $\mathcal{U}\subset\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par définition ;
   - La suite nulle Z vérifie bien, pour tout entier n, $Z_{n+3}=0=a\times 0+b\times 0+c\times 0=aZ_{n+2}+bZ_{n+1}+cZ_n$ donc la suite nulle appartient à $\mathcal{U}$;
   - Soit u et v deux suites de $\mathcal{U}$ et $(\lambda;\mu)\in\mathbb{C}^2$: montrons que $\lambda u+\mu v$ est une suite de $\mathcal{U}$. Pour tout entier n :
$$\begin{aligned}\lambda u_{n+3}+\mu v_{n+3} &= \lambda(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n)+\mu(av_{n+2}+bv_{n+1}+cv_n)\\ &= a(\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2})+b(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+c(\lambda u_n+\mu v_n)\end{aligned}$$
   donc $\lambda u+\mu v\in\mathcal{U}$.
   Finalement, $\mathcal{U}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ donc un espace-vectoriel.

b. Soit $z\in\{z_1;z_2;z_3\}$. Montrons que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{U}$. Pour tout entier n :
   $z^{n+3}=z^n\times z^3=z^n\times\left(az^2+bz+c\right)$ car z_1, z_2 et z_3 sont solutions de (E_c).
   Donc $z^{n+3}=az^{n+2}+bz^{n+1}+cz^n$.
   Donc les trois suites $(z_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent toutes à $\mathcal{U}$.
   Or $\mathcal{U}$ est un espace vectoriel donc est stable par combinaisons linéaires.
   Donc $\text{Vect}\left((z_1^n)_{n\in\mathbb{N}};(z_2^n)_{n\in\mathbb{N}};(z_3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\subset\mathcal{U}$.

Cor. 12.14 : Nous devons démontrer que $\text{Ker}\,v\cap\text{Im}\,u=\{0\}$ et $\text{Ker}\,v+\text{Im}\,u=F$.

- Soit $y\in\text{Ker}\,v\cap\text{Im}\,u$. $y\in\text{Ker}\,v$ donc $v(y)=0$. Or $y\in\text{Im}\,u$, donc $\exists x\in E, y=u(x)$.
  On a alors, $v\circ u(x)=v(y)=0=x$ car $v\circ u=\text{Id}_E$. Donc $y=u(0)=0$.
  On a démontré que $\text{Ker}\,v\cap\text{Im}\,u=\{0\}$.
- Soit $y\in F$. Soit $y_1=u(v(y))=u\circ v(y)$.
  ATTENTION : on sait que $v\circ u=\text{Id}_E$ mais on ne sait rien sur $u\circ v$. En particulier, il est tout à fait possible que $y_1\neq y$.
  Posons de plus, $y_2=y-y_1$ de sorte à ce que $y=y_1+y_2$.
  Par définition, $y_1=u(v(y))\in\text{Im}\,u$. De plus, comme $v\circ u=\text{Id}_E$
  $v(y_2)=v(y-y_1)=v(y)-v(y_1)=v(y)-v\circ u\circ v(y)=v(y)-v(y)=0$
  Donc $y_2\in\text{Ker}\,v$.
  On a démontré que $\text{Ker}\,v+\text{Im}\,u=F$.

Finalement, $F=\text{Ker}\,v\oplus\text{Im}\,u$.

Cor. 12.20 :

a. $p+q$ est un projecteur si et seulement si $(p+q)\circ(p+q)=p+q$.
   Or $(p+q)\circ(p+q)=p\circ p+p\circ q+q\circ p+q\circ q=p+q+p\circ q+q\circ p$.
   Donc $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=-q\circ p$.
   Sens direct : on compose à gauche par p :
   $p\circ q=-q\circ p\Rightarrow p\circ p\circ q=p\circ q=-p\circ q\circ p=-(-q\circ p)\circ p=q\circ p$.
   Or $p\circ q=-q\circ p=q\circ p\Rightarrow q\circ p=0=p\circ q$.
   Réciproquement : $p\circ q=q\circ p=0\Rightarrow p\circ q=0=-0=-q\circ p$.
   On a donc bien $p+q$ est un projecteur de $E\Leftrightarrow p\circ q=q\circ p=0$.

b. Soit $x\in\text{Ker}(p+q)$. Alors $p(x)+q(x)=0$ donc $p(x)=-q(x)$. On compose par p :
   $p\circ p(x)=p(x)=-p\circ q(x)=0$. Donc $x\in\text{Ker}\,p$.
   De même en composant par q :
   $q\circ p(x)=0=-q\circ q(x)=-q(x)$. Donc $x\in\text{Ker}\,q$.
   Donc $x\in\text{Ker}(p+q)\Rightarrow x\in\text{Ker}\,p\cap\text{Ker}\,q$.
   Réciproquement, de façon évidente, si $x\in\text{Ker}\,p\cap\text{Ker}\,q$, alors $(p+q)(x)=p(x)+q(x)=0$.
   Donc $\text{Ker}(p+q)=\text{Ker}\,p\cap\text{Ker}\,q$.

Polynômes

I. Structure d'espace vectoriel, divers

Ex. 13.1 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0);P(1)) \end{array} \right.$.
Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 13.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $P \mapsto P - P'$. Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\phi^{-1}(Q) = \sum_{k=0}^{\deg Q} Q^{(k)}$.
Que peut-on en déduire concernant le prolongement $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P - P'$?

Ex. 13.3

a. Montrer que $\mathrm{Vect}\,((1;2))$ et $\mathrm{Vect}\,((3;4))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que $\mathrm{Vect}\,(X)$ et $\mathrm{Vect}\,(1+X^2;X-3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex. 13.4

a. Développer $(X-a)(X-b)(X-c)$.

b. Montrer que pour tout $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$,
$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$.

c. Résoudre les systèmes suivants en considérant les inconnues réelles, puis en les considérant complexes :

$$(S_1)\left\{ \begin{array}{ll} x+y & =1 \\ x^2+y^2 & =13 \end{array} \right. \qquad (S_2)\left\{ \begin{array}{ll} x+y+z & =-2 \\ x^2+y^2+z^2 & =0 \\ x^3+y^3+z^3 & =1 \end{array} \right.$$

II. Division euclidienne, racines

Ex. 13.5 À quelle condition le polynôme X^4+aX^2+bX+c est-il divisible par X^2+X+1 ?

Ex. 13.6 Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^3+7X^2-2$ par $B(X) = X^2+X+1$. En déduire les éventuelles asymptotes de $x \mapsto f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

Ex. 13.7 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Exprimer en fonction de $P(a)$ et de $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.

Ex. 13.8 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont les restes dans la division euclidienne par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ sont respectivement 3, 7 et 13.
Soit R le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

a. Déterminer les valeurs de $R(1)$, $R(2)$ et $R(3)$.

b. En déduire l'expression de $R(X)$.

Ex. 13.9 (Cor.) Déterminer les polynômes P dont le reste dans la division euclidienne par $(X-1)^3$ est 11 et le reste dans la division euclidienne par $(X+1)^3$ soit -5.

Ex. 13.10 $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est divisible par B pour :

- $A = nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $B = X-1$;
- $A = nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ et $B = (X-1)^2$;
- $A = \cos((n-1)\theta)\,X^{n+1} - \cos(n\theta)X^n - \cos\theta X + 1$ et $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

Ex. 13.11 Montrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Ex. 13.12 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0)^2+P(1)^2+P(8)^2+P(15)^2 = 0$. Montrer que P est le polynôme nul.

Ex. 13.13 Factoriser $8X^3-12X^2-2X+3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Ex. 13.14 Montrer que $\forall(m;n;p;q)\in\mathbb{N}^4$, X^3+X^2+X+1 divise $X^{4m+3}+X^{4n+2}+X^{4p+1}+X^{4q}$.

Ex. 13.15 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:
$P=X^4-1$ $\qquad Q=X^4-3X^2-4$ $\qquad R=X^5-1$

Ex. 13.16 (Cor.) Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Ex. 13.17 (Cor.) Déterminer $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ de sorte à ce que $P=X^6-5X^4+aX^2+bX+c$ admette une racine d'ordre 4 dans $\mathbb{R}$.

Ex. 13.18 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Déterminer les racines de $P=(X+1)^n-e^{2in\alpha}$.

b. En déduire la valeur de $T_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\alpha\right)$

Corrections

Cor. 13.9 : Si le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$ est R alors $P^{(k)}(a)=R^{(k)}(a)$ pour tout $k\in[\![0;m-1]\!]$.
Appliquée aux deux hypothèses de départ et à une division de P par $(X+1)^3(X-1)^3=(X^2-1)^3$, cette propriété nous permet d'obtenir directement le résultat demandé.
Écrivons $P=(X^2-1)^3Q+aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$. Les hypothèses de l'énoncé se réécrivent

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(1)=11 & = & a+b+c+d+e+f\\ P'(1)=0 & = & 5a+4b+3c+2d+e\\ P''(1)=0 & = & 20a+12b+6c+2d\\ P(-1)=-5 & = & -a+b-c+d-e+f\\ P'(-1)=0 & = & 5a-4b+3c-2d+e\\ P''(-1)=0 & = & -20a+12b-6c+2d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b+d+f & = & 3\\ a+c+e & = & 8\\ 5a+3c+e & = & 0\\ 2b+d & = & 0\\ 6b+d & = & 0\\ 10a+3c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3\\ a+c+e & = & 8\\ 2a+c & = & -4\\ b & = & 0\\ d & = & 0\\ 10a+3c & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f & = & 3\\ e & = & 15\\ a & = & 3\\ b & = & 0\\ d & = & 0\\ c & = & -10 \end{array}\right.$$

Donc $P=(X^2-1)^3Q+3X^5-10X^3+15X+3$.

Cor. 13.16 : $P\in\mathbb{C}[X]$ donc P est scindé. Soit $a\in\mathbb{C}$ une racine de multiplicité $m>0$ c'est-à-dire a telle que $P=(X-a)^mQ$ avec $Q(a)\neq 0$.
$P'=m(X-a)^{m-1}Q+(X-a)^mQ'$ divise P si et seulement si $mQ+(X-a)Q'$ divise $(X-a)Q$. Or, pour $X=a$, on a $mQ(a)+(a-a)Q'(a)=mQ(a)\neq 0$ et $(a-a)Q(a)=0$ donc le quotient s'annule en a. De plus, les termes dominants de mQ et $(X-a)Q'$ ne s'annulent pas donc le quotient est de degré 1.
Le quotient de $(X-a)Q$ par $mQ+(X-a)Q'$ est donc de la forme $k(X-a)$ avec $k\in\mathbb{C}^*$.
On a donc $(X-a)Q=k(X-a)(mQ+(X-a)Q')\Leftrightarrow(1-km)(X-a)Q=k(X-a)^2Q'\Leftrightarrow(1-km)Q=k(X-a)Q'$ et comme $Q(a)\neq 0$, la seule possibilité est $Q'=0$, $k=\frac{1}{m}$.

Donc les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P sont les polynômes de la forme $P=q(X-a)^m$, avec $a,q\in\mathbb{C},m\in\mathbb{N}^*$.
Remarque : si P est un polynôme constant, $P'=0$ ne divise pas P sauf si $P=0$. Ce cas est pris en compte dans le résultat donné puisqu'on interdit $m=0$ (polynômes constants non nuls) mais qu'on autorise $q=0$ (polynôme nul).

Cor. 13.17 : P admet une racine $r\in\mathbb{R}$ d'ordre 4 si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(r) & = & 0\\ P'(r) & = & 0\\ P''(r) & = & 0\\ P'''(r) & = & 0\\ P^{(4)}(r) & \neq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0\\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0\\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0\\ 120r^3-120r & = & 0\\ 3r^2-1 & \neq & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{lcl} r^6-5r^4+ar^2+br+c & = & 0\\ 6r^5-20r^3+2ar+b & = & 0\\ 30r^4-60r^2+2a & = & 0\\ r(r-1)(r+1) & = & 0\\ r & \neq & \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Il y a donc 3 racines possibles : $r=0$, $r=1$ ou $r=-1$.
Si $r=0$, $a=b=c=0$.
Si $r=1$, $a=15$, $b=-16$ et $c=5$.
Si $r=-1$, $a=15$, $b=16$ et $c=5$.

Maths - Feuille d'exos n° 14

Dimension des espaces vectoriels

I. Rappels

Ex. 14.1 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles et l'ensemble F des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que $(F, +, .)$ est un sous-espace vectoriel de E.
Est-ce aussi le cas des suites réelles convergeant vers 1 ?

Ex. 14.2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes et $G = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

a. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Montrer que $E = F \oplus G$.
F et G étant supplémentaires dans E, on peut définir
- la projection p_F sur F parallèlement à G ;
- la projection p_G sur G parallèlement à F ;
- la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

c. Soit $M \in E$ une matrice quelconque. Exprimer $p_F(M), p_G(M)$ et $s(M)$ à l'aide de M et ${}^tM$.

d. Dans cette question, on suppose que $n = 3$.
Résoudre l'équation $P_F(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

II. Familles

Ex. 14.3 Exhiber une famille génératrice des sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = 2y\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + 2z = y - 3t = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$.
Sont-ils supplémentaires ?

Ex. 14.4 (Cor.) Soient $\vec{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 1)$, $\vec{e}_1 = (3; 2; 2)$ et $\vec{e}_2 = (0; 1; 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $\mathrm{Vect}\,(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Ex. 14.5 Déterminer dans chaque cas si les familles sont libres ou non :
- dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = \big((9; -3; 7); (1; 8; 8); (5; -5; 1)\big)$;
- dans $\mathbb{C}^2$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathcal{G} = \big((1 + i; i); (1 - i; 1)\big)$.

Ex. 14.6 Montrer que les fonctions de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ $x \mapsto 1$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire qu'elles forment une famille libre).

Ex. 14.7 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{e}_1 = (0; 1; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 0; -1)$ et $\vec{e}_3 = (2; 1; 1)$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{u} = (4; -1; 1)$?

c. Quelles sont les coordonnées dans cette base de $\vec{v} = (x, y, z)$?

Ex. 14.8 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer que les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = X - \alpha$ et $P_3 = (X - \alpha)^2$ forment une base de E.

Ex. 14.9 Justifier que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = 3z + 2t\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

Ex. 14.10 Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in E, m_{1,1} + m_{1,2} + m_{2,1} + m_{2,2} = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

III. Espaces vectoriels de dimension finie

Ex. 14.11 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.
On note F l'ensemble des fonctions de E qui sont bornées, G l'en-

semble des fonctions de E qui sont monotones et H l'ensemble des combinaisons linéaires des trois fonctions ch, sh, exp.

a. Examiner si F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Quelle est la dimension de H ?

Ex. 14.12 Après avoir démontré que c'est une famille libre, compléter $(X^2; (X+1)^2)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex. 14.13 (Cor.)

a. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{F} = \big((i; 1+i); (-1; -1+i); (2-i; 1-3i)\big)$.

b. Dans $\mathbb{R}^2$, étant donné $m \in \mathbb{R}$, déterminer le rang de la famille $\mathcal{G} = \big((m-1; 1); (-2; m-4)\big)$.

Ex. 14.14 On considère l'équation différentielle

$$(E) : (x-1)^3 y' - 2y = 0$$

a. Résoudre (E) sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.

b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on donnera une base.

Ex. 14.15 On considère un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ (avec $p \leqslant n$, $q \leqslant n$).

a. Rappeler la formule de Grassmann.

b. Montrer que $\max(p; q) \leqslant \dim(F+G) \leqslant \min(n; p+q)$.

c. Montrer que $\max(p+q-n; 0) \leqslant \dim(F \cap G) \leqslant \min(p; q)$.

IV. Applications linéaires en dimension finie

Ex. 14.16 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de E et déterminer leur noyau et leur image :
(1) $P \mapsto X.P'$ (2) $P \mapsto P - P'$ (3) $P \mapsto P(X+1) - P(X)$

Ex. 14.17 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 de vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par $\begin{cases} f(\vec{\imath}) &= 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \\ f(\vec{\jmath}) &= 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} \end{cases}$.

Déterminer $f(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$, le noyau et l'image de f.

Ex. 14.18 Soit

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x; y; z) & \mapsto & (x+2y+3z; 4x+5y+6z; 7x+8y+9z) \end{cases}$.

a. Déterminer $\operatorname{Ker} f$.

b. En déduire $\operatorname{rg} f$.

c. Déterminer $\operatorname{Im} f$.

Ex. 14.19 Soient $n \in \mathbb{N}$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$P \mapsto (X+1)P'$$

Montrer que ϕ est linéaire et préciser une base de son image et de son noyau.

Ex. 14.20 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0); P(1)) \end{cases}$.

Montrer que ϕ est linéaire, déterminer son noyau et son image.

Ex. 14.21 **Extrait d'oral Centrale PSI**

Soient $p : x \mapsto e^x \cos x$, $q : x \mapsto e^x \sin x$, $r : x \mapsto e^{-x} \cos x$ et $s : x \mapsto e^{-x} \sin x$.

On considère $E = \operatorname{Vect}(p, q, r, s)$ et $D : \begin{cases} \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & D(f) = f' \end{cases}$.

- Montrer que D est une application linéaire.
- Déterminer le noyau et l'image de D.
  D est-elle injective ? surjective ?
- Montrer que la restriction de D à E est un endomorphisme.
- Quels sont le noyau et l'image de $D_{|E}$? Est-elle bijective ?
- Obtenir l'ensemble des primitives de p, q, r et s.
- Résoudre $y'' - y = e^x \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x)$.

Ex. 14.22 Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(E,G)$.
Le but de cet exercice est de montrer que

$$\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v) \iff \exists w \in \mathcal{L}(F,G), v = w \circ u.$$

a. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$.

b. On suppose que $\dim E = n$, $\dim \operatorname{Ker}(u) = n - p$ et $\dim F = r$.

   i. Justifier l'existence d'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que $(e_{p+1}, ..., e_n)$ soit une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
   Quelle est alors la dimension de $\operatorname{Im}(u)$?

   ii. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose $f_i = u(e_i)$. Montrer que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de $\operatorname{Im}(u)$.

   iii. On complète la famille précédente de sorte que $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ soit une base de F.
   On définit alors $w \in \mathcal{L}(F,G)$ par

$$w(f_i) = \begin{cases} v(e_i) & \text{si} \quad 1 \leq i \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que, si $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}(v)$, alors $v = w \circ u$.

Corrections

Cor. 14.4 : Notons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Démontrons que $F = G$ par double inclusion :

- $F \subset G$: soit $u = \lambda u_1 + \mu u_2 \in F$. Montrons que $u \in G$, c'est-à-dire montrons qu'il existe $(x;y) \in G$ tels que $u = xe_1 + ye_2$. Cherchons donc $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\lambda + \mu}{3} \\ y = \dfrac{\mu - 2\lambda}{3} \end{cases}$$

  Donc tout vecteur de F est un vecteur de G : $F \subset G$.

- $G \subset F$
  1ère méthode : en utilisant les dimensions.
  On vérifie facilement que les familles (u_1, u_2) et (e_1, e_2) sont libres - les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $\dim F = \dim G = 2$. ***Or $F \subset G$ donc F est un sous-espace vectoriel de G.*** Et comme leurs dimensions sont égales, $F = G$.
  2ème méthode : on démontre l'inclusion réciproque.
  Soit $e = xe_1 + ye_2 \in G$, montrons qu'il existe $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $e = \lambda u_1 + \mu u_2$. Cherchons donc $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(1;0;0) + \mu(1;1;1) = x(3;2;2) + y(0;1;1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu &= 3x \\ \mu &= 2x + y \\ \mu &= 2x + y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - y \\ \mu = 2x + y \end{cases}$$

  Donc tout vecteur de G est un vecteur de F : $G \subset F$.
  Comme $F \subset G$ et $G \subset F$, on conclut que $F = G$.

Cor. 14.13 :

a. $(i;1+i) \neq (0;0)$ donc $\big((i;1+i)\big)$ est une famille libre.
Or $(-1;-1+i) = i(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(-1;-1+i)$ sont colinéaires.
De même, $(2-i;1-3i) = (-1-2i)(i;1+i)$ donc $(i;1+i)$ et $(2-i;1-3i)$ sont colinéaires.
Donc la famille $\mathcal{F} = \big((i;1+i);(-1;-1+i);(2-i;1-3i)\big)$ est de rang 1 dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^2$.

b. $(m-1;1)$ est non nul quel que soit la valeur de $m \in \mathbb{R}$. Donc la famille $\big((m-1;1)\big)$ est libre.
Cherchons si la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre : soit $(\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$\lambda(m-1;1) + \mu(-2;m-4) = (0;0)$. Ceci équivaut au système :

$$\begin{cases} (m-1)\lambda \quad -2\mu &= 0 \\ \lambda \quad +(m-4)\mu &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \big[-2-(m-1)(m-4)\big]\mu &= 0 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - (m-1)L_2 \\ \lambda \quad +(m-4)\mu &= 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \big[-m^2+5m-6\big]\mu &= 0 \\ \lambda \quad +(m-4)\mu &= 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

- si $-m^2 + 5m - 6 = 0$, c'est-à-dire si $m \in \{2;3\}$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est liée donc $\operatorname{rg}\mathcal{G} = 1$;
- sinon, c'est-à-dire si $m \neq 2$ et $m \neq 3$, la famille $\mathcal{G} = \big((m-1;1);(-2;m-4)\big)$ est libre donc $\operatorname{rg}\mathcal{G} = 2$.

Maths - Feuille d'exos n° 15

Continuité

I. Fonctions : généralités, limites, équivalents

Ex. 15.1 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$.
Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \to]-1;1[$ et exprimer $f^{-1}(y)$ pour $y \in]-1;1[$.

Ex. 15.2 Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f bijective et impaire de I dans $J \subset \mathbb{R}$. Montrer que f^{-1} est impaire.

Ex. 15.3 On note sech la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sech}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$.

a. Étudier sech et tracer l'allure de sa représentation graphique.

b. Montrer que sech induit une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
On note Argsech sa bijection réciproque.

c. Montrer que, sur un intervalle à préciser, $\operatorname{ch}(\operatorname{Argsech} x) = \dfrac{1}{x}$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{Argsech} x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.

d. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sech}(x) = 2\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

e. Montrer que, sur un intervalle à préciser,
$\operatorname{Argsech} x = \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) - \ln x$.

Ex. 15.4 Déterminer les limites suivantes

a. $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$ en $+\infty$ pour $a, b \in \mathbb{R}$

b. $\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ en 0

c. $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0

d. $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ en $+\infty$

Ex. 15.5 Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) x$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) x$

Ex. 15.6 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1} + \dfrac{\pi}{6}\right)$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe-t-elle ? Si oui, quelle est sa valeur ?

Ex. 15.7 Soit $a > 0$, $a \neq 1$.
Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $f(x) = (a+x)^a - a^{a+x}$.

Ex. 15.8 (Cor.) Donner un équivalent simple des expressions suivantes :

- $f(x) = x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$ au voisinage de 0^+ ;
- $g(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} - x^{\frac{1}{x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Ex. 15.9

a. Montrer que l'équation $x = \lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{x}$ admet une unique racine sur l'intervalle $[n; n+1[$ pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $x_n \in [n; n+1[$ cette racine.

b. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ puis trouver un équivalent u_n de $x_n - n$ au voisinage de $+\infty$.

c. Trouver un équivalent de $x_n - n - u_n$ au voisinage de $+\infty$.

II. Continuité

Ex. 15.10 Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbb{R}$ la fonction
$\begin{cases} x \neq 0 & \mapsto & ax\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor \\ 0 & \mapsto & a^2 \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

Ex. 15.11 Étudier la définition et la continuité des fonctions suivantes :

(1) $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{|x-1|}$ (2) $x \overset{g}{\mapsto} \lfloor x \rfloor$

(3) $x \overset{h}{\mapsto} \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ (4) $\begin{cases} x \neq 0 & \overset{k}{\mapsto} & k(x) = \frac{|x|}{x} \\ 0 & \mapsto & k(0) = 0 \end{cases}$

Ex. 15.12 La fonction $x \neq 0 \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Étudier cette fonction (ou son prolongement par continuité s'il existe) et tracer sa représentation graphique.

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Ex. 15.13 Montrer que l'équation $x^2\cos(x) + x\sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Ex. 15.14 Montrer que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 15.15 Soit a et b deux réels strictement positifs, $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) \neq f(1)$.
Montrer qu'il existe $c \in]0;1[$ tel que $af(0) + bf(1) = (a+b)f(c)$.

Ex. 15.16 [**Problème du moine**]Un moine part de son monastère à $7h00$ du matin et se rend au sommet du Mont Sinaï. Il y arrive à midi.
Il passe la nuit sur place, puis le lendemain repart du sommet à $7h00$, suit exactement le même chemin que la veille et arrive au monastère à midi.
Existe-t-il un endroit se situant sur son chemin où il serait passé à la même heure à l'aller et au retour ?

Ex. 15.17 [**Problème du cycliste**]Un cycliste parcourt 20km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a effectué exactement 10km.

Ex. 15.18 [**] Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x;y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On note $\alpha = f(1)$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.

Ex. 15.19 [**] Refaire l'exercice 15.18 en ne supposant plus que la continuité de f en 0.

Ex. 15.20 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0;1]$ telles que $f < g$.
Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0;1], f(x) + m \leq g(x)$.

IV. Divers

Ex. 15.21 Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

a. Domaine de définition de f ?
b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
c. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

Ex. 15.22 Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{x + \frac{r}{x}}{2}$ et u la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$.

a. Montrer que $[\sqrt{r}; +\infty[$ est stable par f et en déduire que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{r}$.
b. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - x$ est négative sur $[\sqrt{r}; +\infty[$.
c. En déduire que u est décroissante à partir du rang 1 et que u converge.
d. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
e. Donner une valeur approchée rationnelle à 10^{-6} près de $\sqrt{2}$.

Maths - Feuille d'exos n° 16

Ensembles, applications, dénombrement

I. Ensembles et applications

Ex. 16.1 Soient $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n > 0 \mapsto n-1 \end{cases}$

a. Injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de f et g.

b. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$, puis étudier leur injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles.

Ex. 16.2 Soit E un ensemble et $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{Id}_E$.

Ex. 16.3 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer les propriétés suivantes :

- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Que peut-on dire si $g \circ f$ est bijective ? Donner un exemple de fonctions f et g non bijectives telles que $g \circ f$ est bijective.

Ex. 16.4 On considère $f : (n,p) \in \mathbb{N}^2 \mapsto n+p$. Déterminer $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$, $f([\![1;3]\!] \times 3\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Ex. 16.5 Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Montrer que la famille $\big(A \backslash B; A \cap B; B \backslash A\big)$ est une partition de $A \cup B$.

II. Dénombrement

Ex. 16.6 Quel est le nombre de couples $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que :

a. $i < j$?

b. $i \leq j$?

c. $i = j^2$?

Ex. 16.7 Sur une mappemonde sont représentés plusieurs pays. On dit que deux pays sont voisins s'ils ont une frontière commune. Montrer que deux pays au moins ont le même nombre de voisins.

Ex. 16.8 Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

a. Combien y a-t-il de parties A de E de cardinal $p \in [\![0;n]\!]$?

b. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$?

c. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$?

d. Combien y a-t-il de couples $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que :

   i. $A \cup B = E$?

   ii. $A \cap B = \emptyset$?

   iii. $(A;B)$ forme une partition de E ?

   iv. $A \cup B \neq E$ et $A \cap B \neq \emptyset$?

Ex. 16.9 ***Permutations de couples*** On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes, n femmes, qui constituent n couples. On considère que deux tables sont identiques si on peut passer de l'une à l'autre par une rotation, une symétrie axiale ou la composée d'une rotation et d'une symétrie axiale.

a. Combien y a-t-il de tables possibles ?

b. Combien y a-t-il de tables possibles respectant l'alternance des sexes ?

c. Combien y a-t-il de tables possibles ne séparant pas les couples ?

d. Combien y a-t-il de tables possibles respectant les deux conditions précédentes ?

Ex. 16.10 On appelle opération interne sur un ensemble E toute application de $E \times E$ dans E.
Par exemple $*$ définie par $0 * 0 = 1$, $0 * 1 = 1$, $1 * 0 = 0$ et $1 * 1 = 1$ est une opération interne sur $[\![0;1]\!]$.

a. Combien existe-t-il d'opérations internes sur un ensemble à n éléments ?
b. Combien sont commutatives ?
c. Combien possèdent un élément neutre ?
d. Combien sont commutatives et possèdent un élément neutres ?

III. Calculs de sommes finies

Ex. 16.11 ***Formule d'inversion*** Soient $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels (ou complexes).

On pose pour tout entier n, $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.

Montrer que pour tout entier n, $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$.

Existe-t-il une suite z vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_k = (-1)^n$? Si oui, donner z_n en fonction de n.

Ex. 16.12 [$*$] Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $q \in [\![0;p-1]\!]$ on a :
$$\sum_{k=q}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$$
b. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;p]\!]$.
   i. Que dire de $S_{n,p}$ si $n < p$?
   ii. Déterminer $S_{n,1}$ et $S_{n,n}$.
   iii. Calculer $S_{n,2}$.
   iv. Montrer que pour tout $p \in [\![1;n]\!]$, $S_{n,p} = p^n - \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} S_{n,k}$.
   v. En déduire que $S_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

c. On note D_n le nombre de bijections de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.
   i. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.
   ii. En déduire que $D_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k!$.
   (Voir exercice 16.11 concernant le lien entre les deux questions précédentes)

Corrections

Cor. 15.8 :

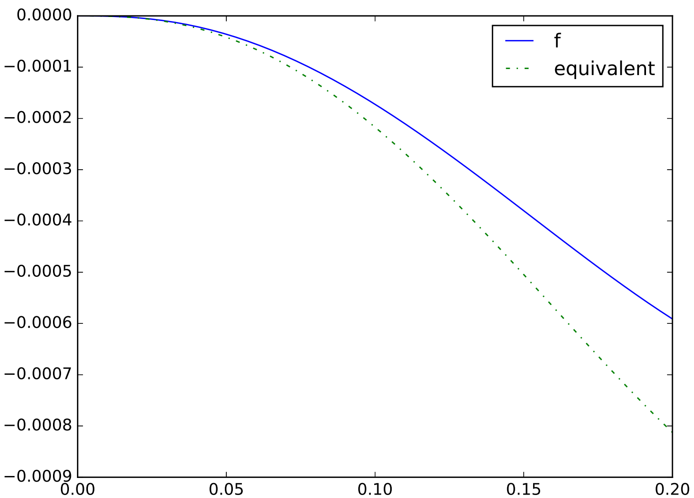
a. $x^x = e^{x\ln(x)} = 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2\ln^2(x)}{2} + \dfrac{x^3\ln^3(x)}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ car $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ d'une part, et car le terme suivant $\dfrac{x^4\ln^4(x)}{24}$ est négligeable devant x^3 au voisinage de 0.
De même, comme $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$,
$$\sin(x)^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\ln\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 \ln^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 \ln^3\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$
Or $\ln\left(x - \dfrac{x^3}{6}\right) = \ln(x) - \dfrac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc :

$$\sin(x)^{\sin(x)} \ = \ 1 + \ \underbrace{\left[x\ln(x) - \frac{x^3\ln(x)}{6} - \frac{x^3}{6}\right]}_{\text{issu du terme } \left(x-\frac{x^3}{6}\right)\ln\left(x-\frac{x^3}{6}\right)} + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + \frac{x^3\ln^3(x)}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

On en déduit que :

$$x^x - \sin(x)^{\sin(x)} = \frac{x^3\ln(x)}{6} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right).$$

Donc $x^x - \sin(x)^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3\ln(x)}{6}$



Maths - Feuille d'exos n° 17

Dérivabilité

I. Dérivabilité

Ex. 17.1 Déterminer $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x}-e^{\frac{1}{2}}}{\ln x - 1}$.

Ex. 17.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la classe de la fonction f définie par $\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \in [-1;1] & \mapsto & (1-x^2)^n \\ x \notin [-1;1] & \mapsto & 0 \end{cases}$

Ex. 17.3 Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$.

a. Calculer $f^{(n)}(x)$.

b. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Ex. 17.4 ***Arguments des sinus et cosinus hyperboliques***

a. Montrer que $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{ch} : [0;+\infty[\to [1;+\infty[$ sont bijectives.
On note Argsh et Argch leurs bijections réciproques.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}\, x) = \sqrt{1+x^2}$.

c. Montrer que $\forall x \in [1;+\infty[, \mathrm{sh}\,(\mathrm{Argch}\, x) = \sqrt{x^2-1}$.

d. Calculer (en précisant les conditions d'existence) $\mathrm{Argsh}'(x)$ et $\mathrm{Argch}'(x)$.

e. Faire le même travail pour la fonction $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$. Montrer notamment que lorsqu'elle est définie $\mathrm{Argth}\, x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

II. Éléments de calcul différentiel

Ex. 17.5 Trouver les extrema des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$ sur $[3;+\infty[$
- $g : x \mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$
- $h : x \mapsto (x^2-3x)\,e^x$ sur $[1;2]$
- $k : x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{(3+x)^2}\right)$ sur $\mathcal{D}_k$

Ex. 17.6 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique qui admet n zéros sur $[0;1[$.
Montrer que f' admet au moins n zéros sur $[0;1[$.

Ex. 17.7 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que f définie par $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus 3 racines réelles distinctes.

Ex. 17.8 Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f(x)$.
Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Ex. 17.9

a. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$.
Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

b. Application : soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$ telles que g' ne s'annule pas sur $]a;b[$ et $\forall x \in]a;b[, |f'(x)| \leq g'(x)$.
Montrer que $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$.

Ex. 17.10 Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ 0 & \mapsto & 0 \end{cases}$.

a. Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(0) = 1$.

b. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage de 0 sur lequel g est croissante.

III. Divers

Ex. 17.11 ***Méthode de Newton***
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que f' est à signe constant et que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x coupe l'axe des abscisses en un point dont on précisera l'abscisse $X(x)$.

c. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = X(u_n)$. On suppose de plus que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f'' est à signe constant.
Montrer que la suite u est bien définie et est monotone à partir du second terme.

d. En déduire les comportements asymptotiques possibles de la suite u. Préciser sa limite.

Ex. 17.12 ***Règle de l'Hospital*** Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que si $g'(a) \neq 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Ex. 17.13 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $f(a) = 0$ et $f(b)f'(b) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex. 17.14 (Cor.) [**] On définit les fonctions th, Argsh, Argch et Argth de la même façon qu'à l'exercice 17.4 dont les résultats peuvent être admis ici.
Soient $I = \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et Gd la fonction définie par

$$\mathrm{Gd} : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{array}\right. .$$

a. Montrer que Gd est bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x) = \mathrm{Argth}(\sin x) = 2\,\mathrm{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$.

c. Calculer Gd' et tracer l'allure de la représentation graphique de Gd.

d. Justifier l'existence de Gd^{-1} et montrer que sur son ensemble de définition $\mathrm{Gd}^{-1}(x) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}\, x)$. Calculer la dérivée de Gd^{-1}.

Corrections

Cor. 17.14 :

a. $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4} \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ intervalle sur lequel tan est définie, dérivable et strictement positive.
Par composition, Gd est donc bien définie et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

b. $\forall x \in I, \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.
On obtient immédiatement la dernière relation en écrivant
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = 2\ln\sqrt{\dfrac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}} = 2\,\mathrm{Argth}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$. De plus
$\forall x \in I, \tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \dfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}$ ce qui conduit à la première égalité.
Sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, cos est positive donc $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.
D'où : $\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{1+\tan^2(x)}\right) = \mathrm{Argsh}(\tan x)$ et
$\mathrm{Gd}(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(x)+1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}\right) = \mathrm{Argth}(\sin x)$.

c. $\forall x \in I, \mathrm{Gd}'(x) = (\mathrm{Argth}(\sin x))' = \dfrac{\cos(x)}{1-\sin^2(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)}$.

d. $\mathrm{Gd}'(x) > 0$, la fonction est strictement croissante et continue donc bijective. Sa bijection réciproque est définie sur $\mathbb{R}$ et $(\mathrm{Gd}^{-1})' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}}$

Matrices

I. Interprétations géométriques des matrices

Ex. 18.1 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (3x-y;-x) \end{array} \right.$ et $\mathcal{B} = \big((1;1);(-1;2)\big)$.

a. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}$ en est une base.

b. Donner la matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.2 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Montrer que s est une symétrie dont on déterminera les sous-espaces caractéristiques.

Ex. 18.3 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\Delta : P \in E \mapsto P'$ et $\phi : P \in E \mapsto P - P'$.

a. Montrer que Δ et ϕ sont des endomorphismes de E et donner leur matrice dans la base canonique.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\Delta)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$ ces matrices.

b. Que peut-on dire de $\Delta^4 = \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta$?

c. Déduire de la question précédente que :
- A n'est pas inversible ;
- B est inversible - on donnera l'inverse de B sans utiliser la méthode du pivot de Gauss.

II. Isomorphismes et changements de bases

Ex. 18.4 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme $f : E \to E$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.
Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2)$.

Ex. 18.5 [**] $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. Ce résultat se généralise-t-il aux matrices telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda AB = A + B$?

Ex. 18.6 Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ψ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

a. Déterminer la nature géométrique de ψ.

b. En déduire N^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 18.7 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension n rapportés aux bases $\mathcal{B} = (e_1; e_2; ...; e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1; f_2; ...; f_n)$.
Soit $\phi : E \to F$ dont la matrice est

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Exprimer, pour $j \in [\![1;n]\!]$, $\phi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

b. On pose $S_j = \sum_{k=1}^{j} f_k$. Montrer que pour tout $j \in [\![1;n-1]\!]$ on a $\phi(e_{j+1}) = \phi(e_j) + S_{j+1}$.

c. En déduire une expression de $\phi(e_j)$ comme une somme double.

d. Montrer que $\phi(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de F.

e. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

III. Matrices de changement de bases

Ex. 18.8 Soit $E = \mathbb{C}_2[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^2+1; X^2+iX; X^2-iX\right)$.

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

b. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique et $\mathcal{B} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.
On note P_k les polynômes de $\mathcal{B}$.

a. Simplifier $S_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k$ puis $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} P_k$.

b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

c. Donner les matrices $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

Ex. 18.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & \frac{-7}{2}u_n + 6v_n \\ v_{n+1} & = & -3u_n + 5v_n \end{array}\right.$$

a. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2.

b. On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
Exprimer W_{n+1} en fonction de W_n.

c. Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et ϕ l'endomorphisme canoniquement associé à Q.
Soit $\mathcal{B} = \big((3;2);(4;3)\big)$.
- Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
- Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.
- En déduire une expression simple de Q^n.

d. À l'aide des deux questions précédentes, expliciter W_n en fonction de n.

e. Montrer que les suites u et v convergent et donner leurs limites.

IV. Noyau, image et rang

Ex. 18.11

a. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$, une base de $\operatorname{Im} f$ et le rang de A.

b. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une base et un système d'équations de $\operatorname{Ker} g$, une base et une équation de $\operatorname{Im} g$ et le rang de B.

Ex. 18.12 Soit A une matrice réelle d'ordre n et de rang 1.

a. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X\,{}^tY$.

b. En déduire A^k en fonction de A pour $k \geq 1$.

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A+I_n$ soit inversible et exprimer alors son inverse en fonction de A.

Ex. 18.13 Soient $p \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rang de la matrice $\left((i+j+p)^2\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$?

Ex. 18.14 Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{C}$ sa base canonique, $\mathcal{B} = \big(1; X; X(X-1); X(X-1)(X-2)\big)$ et

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & E \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{3} P(k)X^k = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 + P(3)X^3 \end{array} \right.$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et que $\phi \in \mathcal{L}(E)$.

b. Donner $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi)$.

c. Donner $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

d. Donner $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\phi)$.

e. Quelle formule relie les matrices A, B et P ?

f. Déduire des questions précédentes que ϕ est bijective.

g. Ce résultat peut-il se généraliser ?

Ex. 18.15 ***Extrait écrit Centrale Math 1 2018*** Soient n un entier supérieur à 2, $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

$A(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} & t_n \\ t_n & \ddots & \ddots & & t_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ t_3 & & \ddots & & \vdots \\ t_2 & t_3 & \cdots & t_n & t_1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Calculer M^2, ..., M^n. Montrer que M est inversible, donner M^{-1}.

b. Donner un polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $P(M) = 0$.

c. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q_A \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A(t_1, t_2, ..., t_n) = Q_A(M)$.

d. Réciproquement, soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, montrer à l'aide d'une division euclidienne de Q par un polynôme bien choisi qu'il existe $(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $Q(M) = A(t_1, t_2, ..., t_n)$.

e. Montrer que $\mathcal{D}_n = \{A(t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), (t_1, t_2, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stable par produit et transposition.

f. Donner une base de $\mathcal{D}_n$ ainsi que sa dimension.

Ex. 18.16 (Cor.) On considère l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

a. Montrer que Φ est linéaire.

b. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg \Phi(P) = \deg P$.

c. En déduire Φ est un automorphisme d'espaces vectoriels.

d. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on note Φ_n la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$.
On note $(P_0, P_1, ..., P_n)$ l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par Φ_n. Les polynômes P_k sont appelés ***polynômes de Bernoulli***.
Calculer les quatre premiers polynômes de Bernoulli.

e. Démontrer que pour tout $n, N \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{N} k^n = \frac{P_{n+1}(N) - P_{n+1}(0)}{n+1}.$$

f. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$?

Corrections

Cor. 18.16 :

a. $\forall (P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}$,
$\Phi(\lambda P+Q) = \displaystyle\int_{X-1}^{X} \lambda P(t)+Q(t)\mathrm{d}t = \lambda\int_{X-1}^{X} P(t)\mathrm{d}t + \int_{X-1}^{X} Q(t)\mathrm{d}t = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$.
Ce qui s'énonce aussi plus simplement : Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale.

b. $\forall P\in\mathbb{R}[X], \exists n\in\mathbb{N}, P=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$. Or Φ étant linéaire, on a alors $\Phi(P)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\Phi\left(X^i\right)$. Il suffit donc de montrer que Φ conserve le degré des polynômes de la base canonique, la somme de deux polynômes de degrés distincts étant égale au plus grand des degrés des deux polynômes.
Or

$$\begin{aligned}\Phi\left(X^i\right) &= \int_{X-1}^{X} t^i\mathrm{d}t\\ &= \frac{X^{i+1}-(X-1)^{i+1}}{i+1} \qquad \text{est de degré } i.\\ &= \frac{-\displaystyle\sum_{k=0}^{i}\binom{i+1}{k}X^k(-1)^{i+1-k}}{i+1}\end{aligned}$$

Donc $\forall i\in\mathbb{N}, \deg\Phi\left(X^i\right)=\deg X^i \Rightarrow \forall P\in\mathbb{R}[X], \deg\Phi(P)=\deg P$.

c. $\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie, ce qui pose quelques soucis supplémentaires que l'on aimerait éviter. On se restreint donc à $\Phi_n : P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto\Phi_n(P)=\Phi(P)$ qui est aussi un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question précédente. Démontrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ revient donc à démontrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme Φ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut alors utiliser le théorème :
Φ_n est bijective$\Leftrightarrow$ Φ_n est injective$\Leftrightarrow$ Φ_n est surjective.
La question devient alors simple : on montre que Φ_n est injective en calculant son noyau :

$$\begin{aligned}\ker\Phi_n &= \{P\in\mathbb{R}_n[X], \Phi(P)=0\}\\ &= \{P\in\mathbb{R}_n[X], \deg\Phi(P)=-\infty\} = \{P\in\mathbb{R}_n[X], \deg P=-\infty\}.\\ &= \{0\}\end{aligned}$$

Donc Φ est un automorphisme d'espace vectoriel.

d. $P_0=1, P_1=\frac{1}{2}+X, P_2=\frac{1}{6}+X+X^2, P_3=\frac{X}{2}+\frac{3X^2}{2}+X^3$ (ces résultats n'étant pas tout à fait immédiats puisqu'il faut pour les obtenir inverser une matrice $(4,4)$ triangulaire supérieure de diagonale égale à 1).

e. D'une part, $\Phi\left(P_n(X)-P_n(X-1)\right)=X^n-(X-1)^n$ par linéarité de Φ et définition des polynômes de Bernoulli.
D'autre part, $\Phi\left(nX^{n-1}\right)=n\dfrac{X^n-(X-1)^n}{n}=X^n-(X-1)^n$ par définition de Φ.
Φ étant par ailleurs bijective, on en déduit que $P_n(X)-P_n(X-1)=nX^{n-1}$ d'où,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^n &= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} P_{n+1}(k)-P_{n+1}(k-1)}{n+1}\\ &= \frac{P_{n+1}(N)-P_{n+1}(0)}{n+1} \qquad \text{par télescopage}\end{aligned}$$

f. Après calcul de P_4, on obtient la formule classique $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3=\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

Maths - Feuille d'exos n° 19

Probabilités

I. Espaces probabilisés

Ex. 19.1 On lance deux fois de suite un dé honnête.

a. Déterminer l'univers Ω ainsi que son cardinal.

b. Trouver le libellé pour l'événement $A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

c. A quelle partie de Ω correspond l'événement B : *"la somme des deux nombres est inférieure strictement à 5"*?

d. Calculer la probabilité des événements A, B, $A\cap B$, $A\cup B$.

Ex. 19.2 Soient A et B deux événements tels que $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(B) = \dfrac{2}{3}$ et $P(A\cap B) = \dfrac{1}{8}$. Soient E *« au moins un événement se produit »* et F *« un seul événement se produit »*. Calculer $P(E)$ et $P(F)$.

Ex. 19.3 Soit (Ω, P) un espace probabilisé et A, B, C trois événements.

a. Montrer que

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) = \; & P(A)+P(B)+P(C) \\ & -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C) \\ & +P(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

et que

$$P(A\cup B\cup C) \leqslant P(A)+P(B)+P(C)$$

b. On suppose que $P(A) = P(B) = P(C) = p$ et $P(A\cap B\cap C) = 0$.
Montrer que $p \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.
Est-il possible que $p = \dfrac{2}{3}$?

c. On reprend les hypothèses de la question précédente en rajoutant que A, B, C sont deux à deux incompatibles. Calculer la valeur maximale de p et montrer sur un exemple que cette valeur est atteinte.

Ex. 19.4

a. Soient a, b, c, d quatre réels. Montrer que
$\max(a;b) - \min(c;d) = \max(a-c; a-d; b-c; b-d)$.

b. On lance deux dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![2;12]\!]$, on note $S_2 = n$ l'événement « la somme des deux dés vaut n ».
Montrer que $P(S_2 = n) = \dfrac{\min(6; n-1; 13-n)}{36}$ puis que

$$P(S_2 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![2;7]\!] & \mapsto & \frac{n-1}{36} \\ n \in [\![7;12]\!] & \mapsto & \frac{13-n}{36} \end{array} \right.$$

c. On lance trois dés non truqués et on effectue la somme de ces dés. Pour $n \in [\![3;18]\!]$, on note $S_3 = n$ l'événement « la somme des trois dés vaut n ».

Montrer que $P(S_3 = n) = \left| \begin{array}{lll} n \in [\![3;8]\!] & \mapsto & \frac{(n-1)(n-2)}{2\times 216} \\ n \in [\![8;13]\!] & \mapsto & \frac{-n^2+21n-83}{216} \\ n \in [\![13;18]\!] & \mapsto & \frac{(19-n)(20-n)}{2\times 216} \end{array} \right.$

II. Probabilités conditionnelles, indépendance

Ex. 19.5 Dans une région donnée, s'il fait beau le jour J, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $0,2$ et s'il pleut le jour J, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $0,4$ (on suppose que s'il ne pleut pas, il fait beau).

a. On est jeudi et il pleut. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le dimanche suivant ?

b. Monsieur Pabot quitte cette région le dimanche sous la pluie et revient le mercredi sous la pluie. Quelle est la probabilité qu'il ait fait beau le lundi entre-temps ?

Ex. 19.6 En Belgique, on mange deux types de frites : les frites traditionnelles à section rectangulaire et les frites new look, à section hexagonale. Parmi les frites que consomment les Flamands, il y a 60% de frites traditionnelles, alors que les Wallons en mangent 80%. L'équipe nationale belge de football est composée de 7 Flamands et de 4 Wallons. Un joueur est surpris à la mi-temps avec un cornet de frites hexagonales. Quelle est la probabilité qu'il soit Flamand ?

Ex. 19.7 De la population canadienne, 30% sont Québécois, 28% parlent français et 24% sont Québécois et parlent français. On choisit une personne au hasard, quelle est la probabilité que cette personne :

a. soit Québécoise **ou** parle français ?

b. ne soit pas Québécoise **et** ne parle pas français ?

c. parle français mais ne soit pas Québécoise ?

Ex. 19.8 (Cor.) Trois ampoules présentant un défaut ont été mélangées à $n \in \mathbb{N}$ autres en bon état.

a. On choisit deux ampoules au hasard. Quelle est la probabilité que toutes les deux soient en parfait état ?

b. On choisit $k \in [\![1; n+3]\!]$ ampoules au hasard. Quelle est la probabilité qu'exactement une d'entre elles soit défaillante ?

Ex. 19.9 ***Problème de Monty Hall***

Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir parmi trois portes. Derrière l'une d'entre elles se trouve un cadeau, derrière les deux autres ne se trouve rien.

Après avoir fait son choix, le présentateur ouvre l'une des deux portes restantes derrière laquelle ne se trouve rien.

Le candidat a alors la possibilité soit de garder la première porte choisie, soit de changer pour l'unique porte restante.

On note A l'événement « le candidat gagne après avoir choisi une porte au hasard et avoir changé de porte à la seconde étape ».

Calculer $P(A)$.

Ex. 19.10 On considère n urnes numérotées (de 1 à n) telles que dans l'urne numéro k se trouve k boules noires et $n-k+1$ boules blanches. On tire successivement deux boules d'une urne choisie au hasard. Quelle est la probabilité que les boules soient blanches :

a. lors d'un tirage sans remise ?

b. lors d'un tirage avec remise ?

Ex. 19.11 On considère une famille comportant n enfants. On note M l'événement *« la famille a des enfants des deux sexes »* et F l'événement *« la famille a au plus une fille »*.

a. Si $n = 2$, les événements M et F sont-ils indépendants ?

b. Même question pour $n = 3$.

Ex. 19.12 On reprend les hypothèses et notations de la question b) de l'exercice 19.3, notamment $P(A \cap B \cap C) = 0$ et on rajoute l'hypothèse que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants.

Montrer que $P(A \cup B \cup C) \leqslant \frac{3}{4}$ puis que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Peut-on avoir $p = \dfrac{1}{2}$?

Ex. 19.13 On considère les points de la droite réelle dont les abscisses sont des entiers relatifs. On part de l'origine et à chaque tour, on se déplace sur l'entier immédiatement à gauche (inférieur) ou immédiatement à droite (supérieur) de façon équiprobable.

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de se retrouver à l'origine après $2n$ tours de jeu vaut

$$P = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres impairs}}{\text{produit des } n \text{ plus petits nombres pairs}}$$

Cor. 19.8 :

a. On définit les événements suivants :
B_i : « on tire une ampoule en bon état lors du i-ème tirage »
D_i : « on tire une ampoule défaillante lors du i-ème tirage »
Il s'agit donc de calculer $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \dfrac{n}{n+3} \times \dfrac{n-1}{n+2} = \dfrac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$ en faisant l'hypothèse d'équiprobabilité pour chaque tirage.

b. On fait l'hypothèse d'équiprobabilité des tirages de k ampoules et on passe par du dénombrement.
Compter les tirages c'est compter les mots de k lettres écrits à l'aide d'au plus trois lettres D et n lettres B.
Or choisir un mot de k lettres écrit avec ***exactement*** une lettre D c'est :
- choisir la position du D : k choix possibles ;
- choisir la lettre D à utiliser : 3 choix possibles ;
- choisir les lettres B à utiliser : A_n^{k-1} choix possibles.

Par ailleurs, il y a A_{n+3}^k mots de k lettres formés avec $n+3$ lettres disponibles.
Donc la probabilité à calculer est :
$P = \dfrac{3k\frac{n!}{(n+1-k)!}}{\frac{(n+3)!}{(n+3-k)!}} = \dfrac{3k(n+3-k)(n+2-k)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Maths - Feuille d'exos n° 20

Séries

I. Séries à termes positifs, séries absolument convergentes

Ex. 20.1 Nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^n}$ et $v_n = 3^{\frac{1}{n}}$.

Ex. 20.2

a. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{(2n)!}$?

b. On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).

Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.

Ex. 20.3 Calculer, si existence, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k(2k-1)(2k+1)}$.

Ex. 20.4 Déterminer la nature, et éventuellement calculer la somme, de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Ex. 20.5 Nature de la série $\sum n^n e^{-n^2}$.

Ex. 20.6 Nature de la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

Ex. 20.7 On suppose que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge. Que peut-on dire de la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$?

Ex. 20.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Pour tout entier n, on pose $b_n = \dfrac{a_n}{1+a_n}$.

Comparer la nature des séries de terme général a_n et b_n.

Ex. 20.9 On pose pour tout entier n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin^n(t)}{1+t^n}\mathrm{d}t$.

Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

II. Autres séries

Ex. 20.10

a. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n}$ diverge.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers une limite dont on donnera le signe.

c. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

En déduire un encadrement de H_N.

d. Déduire de la question précédente que $H_N - \ln(N)$ converge. On note γ la limite.

e. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ à l'aide de la suite H.

f. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ex. 20.11 Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$.

Ex. 20.12 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

III. Pour aller plus loin

Ex. 20.13 Soit u la suite numérique définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

c. Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

d. Donner un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

e. La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Ex. 20.14 Soient u et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \begin{array}{lcl} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \\ v_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \end{array} \right.$$

On note $S = \sum u_n$ et $T = \sum v_n$ les séries associées à ces deux suites.

a. Les séries S et T sont-elles absolument convergentes ?

b. Les séries S et T sont-elles à termes positifs ?

c. Montrer que S est une série convergente.

d. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

e. Soit $w = u - v$. Montrer qu'elle est de signe constant et donner un équivalent (simple) de w_n au voisinage de $+\infty$.

f. Montrer que T est une série divergente.

Ex. 20.15 Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$$

a. Donner les valeurs de a, b, c pour lesquelles la série $\sum u_n$ converge.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence ou donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ en cas de divergence.

Ex. 20.16 Soit u la suite définie par $u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{1+n^2}\right)$ et $S = \sum u_n$.

a. Énoncer ***précisément*** le théorème sur la nature de séries à termes équivalents.

b. Donner un équivalent simple de u_n au voisinage de $+\infty$.

c. En déduire que S est une série à termes ***positifs à partir d'un certain rang***.

d. Nature de $\sum u_n$?

Déterminant

I. Déterminant d'une matrice, d'une famille de vecteurs

Ex. 21.1 Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & a^p & a^n \\ b & b^p & b^n \\ c & c^p & c^n \end{vmatrix}$$

Ex. 21.2 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2; e_3)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Calculer $\det_{\mathcal{B}}(e_2 + e_3; e_3 + e_1; e_1 + e_2)$ puis
$\det_{\mathcal{B}}(e_1 + \lambda e_2; e_2 + \lambda e_3; e_3 + \lambda e_1)$.

Ex. 21.3 On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$.
Soient $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = X+1$ et $P_3 = 9X-5$.

a. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (P_i)_{i\leq 3}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B})$.

On pourra éventuellement traiter les deux question en même temps.

Ex. 21.4 Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $((m+1; m-1); (4; -4+2m))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Ex. 21.5 Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique est nul en dimension 3.
Est-ce le cas en dimension $n = 2$?
Généraliser aux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 21.6 On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Exprimer A^n en fonction des termes de la suite de Fibonacci.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Ex. 21.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n+1} = 0_{2n+1}$.
Donner une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_2 = 0_2$ puis une matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0_{2n}$.

Ex. 21.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{ij} = \pm 1$.
Montrer que 2^{n-1} divise $\det A$.

Ex. 21.9 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{i,j} = (-1)^{\max(i,j)}$.
Calculer $\det A$.

Ex. 21.10 ***Centrale 2017 PSI Maths 1 - Extrait***
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice M de E, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.
On dit que f_M est ***cyclique*** s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $(u; f_M(u); ...; f_m^{n-1}(u))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. u est alors appelé ***vecteur cyclique*** de f_M.
On dit que f_M est ***diagonalisable*** s'il existe une base $(e_1; ...; e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un n-uplet $(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall i \in [\![1;n]\!], f_M(e_i) = \lambda_i e_i$$

Autrement dit, f_M est diagonalisable si et seulement si f_M est une composée d'affinités.
On suppose dans la suite que f_M est diagonalisable et on note $(e_1; ...; e_n)$ la base de diagonalisation et $(\lambda_1; ...; \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les scalaires associés.
Soit $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \in \mathbb{C}^n$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1; ...; u_n; \lambda_1; ...; \lambda_n)$ pour que $(u; f_M(u); ...; f_m^{n-1}(u))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

b. Soit $A(x) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ où $x_1, ..., x_{n-1}$ sont des nombres complexes.

i. Montrer que $A(x)$ est un polynôme en x dont on précisera le degré.

ii. Montrer que $\forall i \in [\![1; n-1]\!]\,, A(x_i) = 0$.

iii. En déduire que $A(x) = a\,(x_1, ..., x_{n-1})\,(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_{n-1}) = a\,(x_1, ..., x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(x - x_i)$ où $a\,(x_1, ..., x_{n-1})$ est un complexe ne dépendant que de la valeur de $x_1, ..., x_{n-1}$.

iv. Soit $x_n \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$A(x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

c. Déduire des questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

II. Déterminant d'un endomorphisme, divers

Ex. 21.11 On se place dans $\mathbb{R}$.
Déterminer le rang des systèmes suivants puis les résoudre :

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x + y - 3z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = 1 \\ x + z + t = 2 \\ y + z + t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \end{cases}$$

Ex. 21.12 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = (X+1)^2 P'' + (X-1)P' + P$$

f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Maths - Feuille d'exos n° 22

Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

Ex. 22.1 On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à $n \geqslant 2$.

a. On tire deux boules dans l'urne ***sans remise***. Soit X_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de X_n.

b. On tire deux boules dans l'urne ***avec remise***. Soit Y_n la variable aléatoire indiquant le plus grand des deux numéros tirés. Calculer la loi de Y_n.

Ex. 22.2 (Cor.) Un système de communication comporte n composants. Chaque composant a une probabilité p d'être en bon état de fonctionnement, indépendamment des autres.
Le système lui-même fonctionne si au moins la moitié de ses composants est en bon état de fonctionnement.

a. Pour quelles valeurs de p un système à 5 composants a-t-il une probabilité de fonctionner supérieure à un système à 3 composants ?

b. D'une manière générale, dans quels cas un système à $2k+1$ composants est-il préférable à un système à $2k-1$ composants ?

Ex. 22.3 ***Problème des allumettes de Banach*** Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe. Il a dans ses deux poches une boîtes d'allumettes. Quand il a besoin d'allumer sa pipe, il a une chance sur deux de chercher une allumette dans sa poche gauche, et une chance sur deux de la chercher dans sa poche droite.
Il découvre subitement que la boîte d'allumette qu'il a choisie est vide.
Les deux boîtes contenaient N allumettes au départ.
Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte ($k \in [\![1;n]\!]$) ?

Ex. 22.4 (Cor.) On jette n fois une pièce bien équilibrée. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre le nombre de piles et de faces obtenus.

a. Que vaut $X(\Omega)$?

b. Donner la loi de X pour $n=3$ puis pour n quelconque.

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(|X|)$.

II. Couples de variables aléatoires

Ex. 22.5 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé (Ω, P) et suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, 1/4)$ et $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
Soit pour tout événement élémentaire $\omega \in \Omega$, on note
$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 2 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

a. Calculer la probabilité que A soit inversible.

b. Calculer la probabilité que A^{-1} soit à coefficients entiers, sachant que A est inversible.

Ex. 22.6 Dans un sac il y a $n-2$ boules noires et 2 boules blanches ($n \geqslant 3$). On tire successivement et sans remise toutes les boules du sac et on note X le rang de la première boule blanche tirée et Y le rang de la seconde.

a. Loi du couple (X, Y).

b. Loi de X, espérance et variance. Même question pour Y.

Ex. 22.7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, r \in]0;1[$. Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$ et Y une variable aléatoire telle que pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, la loi de Y sachant que $(X=k)$ est $\mathcal{B}(k,r)$.
Donner la loi de Y.

III. Espérance, variance

Ex. 22.8 Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements quelconques et C_i :« au moins i événements de la famille $(A_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$ se produisent ».
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} P(C_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
Indication : introduire une v.a. dont les deux membres sont l'espérance.

Ex. 22.9 On considère $p \geqslant 2$ boîtes B_1, B_2, ..., B_p. Dans l'une d'entre elles se trouve un objet O. On ouvre successivement et au hasard les boîtes jusqu'à trouver l'objet O.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de boîtes ouvertes.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Ex. 22.10 Pour allumer un feu, on dispose de n allumettes. La probabilité d'allumer le feu avec une allumette est égale à $p \in]0;1[$.
On finit par allumer le feu.
Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'allumettes restantes.
Calculer la loi de X, son espérance et sa variance.

Corrections

Cor. 22.2 :

a.

b. Mise en équations : un système à $2k+1$ composants est fonctionnel si au moins $k+1$ composants fonctionnent. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants fonctionnels : X suit une loi binomiale de paramètre p. Le système est fonctionnel avec une probabilité
$\displaystyle\sum_{i=k+1}^{2k+1} P(X=i) = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i}$.
Pour qu'un système à $2k+1$ composants soit préférable à un système à $2k-1$ composants il faut donc que

$$(E) : \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} p^i(1-p)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} p^i(1-p)^{2k-1-i} > 0$$

Soit

$$P = \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$$

et $\displaystyle Q = \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i}$

$$\begin{aligned} P+Q &= \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} X^i(1-X)^{2k+1-i} - \sum_{i=0}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} X^i(1-X)^{2k-1-i} \\ &= (X+1-X)^{2k+1} - (X+1-X)^{2k-1} = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\displaystyle P = X^k \left(\sum_{i=1}^{k+1} \binom{2k+1}{i+k} X^i(1-X)^{k+1-i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i+k} X^i(1-X)^{k-1-i} \right)$
donc $X^k | P$.
De même, $(1-X)^k | Q$.
Comme $P+Q=0$, c'est-à-dire $P=-Q$, $(1-X)^k|P$.
Montrons enfin que $\frac{1}{2}$ est racine de P :

$$\begin{aligned} P\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{2k+1-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{2k-1}{2k-1-i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{2k-1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \\ &= Q\left(\tfrac{1}{2}\right) = -Q\left(\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Or $\deg(P) \leqslant 2k+1$ (somme de polynômes de degrés inférieurs à $2k+1$) donc
$P = aX^k(1-X)^k(2X-1)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Plus précisément,

$$a = \frac{\displaystyle\sum_{i=k+1}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-1)^{k+1-i}}{2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{2k+1}{i+k+1} (-1)^i}{2} > 0 \text{ car}$$

pour tout $i \in [\![0;k-1]\!]$, $\displaystyle\binom{2k+1}{i+k+1} > \binom{2k+1}{i+k+2}$.

Finalement, $(E) \Leftrightarrow P(p) > 0 \Leftrightarrow ap^k(1-p)^k(2p-1) > 0 \Leftrightarrow p > \dfrac{1}{2}$.
Les valeurs de p pour lesquelles un système à $2k+1$ composants est préférable à un système à $2k-1$ composants sont donc $\left]\frac{1}{2};1\right]$.

Cor. 22.4 :

a. $X(\Omega)=\{-n+2k, k\in [\![0;n]\!]\}$.

b. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de ***Pile*** obtenus, Z la variable aléatoire donnant le nombre de ***Face*** obtenus.
$Y+Z=n$ (par définition) et $X=Y-Z=2Y-Y-Z=2Y-n$.
Donc, pour tout $i=-n+2k, k\in [\![0;n]\!]$,
$\mathbb{P}(X=i)=\mathbb{P}(X=-n+2k)=\mathbb{P}(2Y-n=2k-n)=\mathbb{P}(Y=k)$.
Or $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n,1/2)$, donc

$$\mathbb{P}(X=i)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}=\frac{\binom{n}{\frac{i+n}{2}}}{2^n}$$

c. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n}(2k-n)\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\\
&= \frac{1}{2^n}\left[\sum_{k=0}^{n}2k\binom{n}{k}-\sum_{k=0}^{n}n\binom{n}{k}\right]\\
&= \frac{1}{2^n}\left[2\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}-n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right]\\
&= \frac{1}{2^n}\left[2n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}-n2^n\right]\\
&= \frac{1}{2^n}\left[2n\times 2^{n-1}-n2^n\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$

De même, ***pour*** n ***pair, i.e.*** $n=2p$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|) &= \sum_{k=0}^{n}|2k-n|\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\\
&= \frac{1}{2^n}\left[\begin{array}{ll} & \sum_{k=0}^{p-1}(n-2k)\binom{n}{k}\\ + & (2p-n)\binom{n}{p}\\ + & \sum_{k=p+1}^{2p}(2k-n)\binom{n}{k}\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{2^n}\left[S_p-U_p+V_p-T_p\right]
\end{aligned}$$

où $S_p=\sum_{k=0}^{p-1}2p\binom{2p}{k}$, $T_p=\sum_{k=p+1}^{2p}2p\binom{2p}{k}$, $U_p=\sum_{k=0}^{p-1}2k\binom{2p}{k}$, $V_p=\sum_{k=p+1}^{2p}2k\binom{2p}{k}$. Or :

- $S_p+T_p+2p\binom{2p}{p}=2p\sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}=2p\times 2^{2p}=n2^n$.
- $S_p=\sum_{k=0}^{p-1}2p\binom{2p}{k}=\sum_{k=0}^{p-1}2p\binom{2p}{2p-k}=\sum_{k=p+1}^{2p}2p\binom{2p}{k}=T_p$.
- $U_p=\sum_{k=0}^{p-1}2k\binom{2p}{k}=2\sum_{k=1}^{p-1}2p\binom{2p-1}{k-1}=4p\sum_{k=0}^{p-2}\binom{2p-1}{k}$.
- Enfin, $4p\sum_{k=0}^{p-2}\binom{2p-1}{k}=4p\left(-\binom{2p-1}{p-1}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p-1}{k}\right)$.

Donc $S_p=T_p=p4^p-p\binom{2p}{p}$ et $S_p-T_p=0$.

Pour la même raison, $\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p-1}{k}=\frac{2^{2p-1}}{2}=4^{p-1}$.

D'où l'on déduit que
$U_p=4p\left(-\binom{2p-1}{p-1}+4^{p-1}\right)=p4^p-\frac{4p(2p-1)!}{(p-1)!p!}=p4^p-\frac{2p(2p)!}{p!^2}=$
$p4^p-2p\binom{2p}{p}$.

Enfin,

$$\begin{aligned}
V_p-U_p &= \sum_{k=p+1}^{2p}2k\binom{2p}{k}-\sum_{k=0}^{p-1}2k\binom{2p}{k}\\
&= 2\left[\sum_{j=0}^{p-1}(2p-j)\binom{2p}{2p-j}-\sum_{k=0}^{p-1}k\binom{2p}{k}\right] \quad \text{en posant } j=2p-k\\
&= 4p\sum_{k=0}^{p-1}\binom{2p}{j}-4\sum_{k=0}^{p-1}k\binom{2p}{k}\\
&= 2S_p-2U_p
\end{aligned}$$

donc $V_p=2S_p-U_p=2p4^p-2p\binom{2p}{p}-p4^p+2p\binom{2p}{p}=p4^p$.

Finalement,

$$E(|X|) = \frac{1}{2^n}\left[-U_p + V_p\right] = \frac{1}{2^n}\left[-p4^p + 2p\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix} + p4^p\right] = \frac{2p\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}}{4^p}$$

ou encore après simplifications

$$E(|X|) = \frac{n\begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix}}{2^n} = \frac{2p(2p)!}{4^p(p!)^2} = n\frac{\text{produit des entiers impairs inférieurs à } n}{\text{produit des entiers pairs inférieurs à } n}$$

Le cas n impair se traite de façon similaire.

Remarque : on peut obtenir une expression asymptotique simple de $E(|X|)$ lorsque n et p sont grands en utilisant la formule de Stirling.

$E(|X|) = \dfrac{2p(2p)!}{4^p(p!)^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2p\sqrt{4\pi p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{4^p 2\pi p\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}}$

C'est-à-dire

$$E(|X|) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4p}{\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

Produit scalaire

I. Définition de produits scalaires

Ex. 23.1 On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on note $\mathcal{C}$ sa base canonique.
On se donne les formes suivantes de $E \times E$:

- $(.|.) : (P,Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$
- $\langle .|. \rangle : (P,Q) \mapsto \langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{3} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$

a. Montrer que $(.|.)$ et $\langle .|. \rangle$ sont deux produits scalaires sur E.

b. Montrer que $\mathcal{C}$ est une famille orthogonale pour l'un de ces produits scalaires.
Est-elle orthonormale ?

c. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour l'autre produit scalaire.

d. Donner la matrice de passage $P = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

e. Calculer P^{-1} (on pourra se montrer astucieux...).

Ex. 23.2 On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on munit E du produit scalaire $(.|.) : (P,Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

a. Calculer les produits scalaires mutuels des polynômes de la base canonique de E.

b. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ de E.

c. Simplifier l'expression de $\sin(\theta)P_i(\cos\theta)$ pour $i \in [\![0;2]\!]$.

Ex. 23.3 On se place dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on définit les applications $s_n : E \times E \to \mathbb{R}$ qui à deux suites u et v associent

$$s_n(u,v) = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k$$

a. Les applications s_n sont-elles des produits scalaires sur E ?

b. On note $F = \left\{ u \in E, \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \in \mathbb{R} \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

c. Montrer que $s : \left\{ \begin{array}{lcl} F \times F & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & s(u,v) = \lim_{n\to+\infty} s_n(u,v) \end{array} \right.$ est bien définie.

d. Montrer que s est un produit scalaire sur F.

e. s peut-elle être prolongée en un produit scalaire sur E ?

Ex. 23.4 Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On donne $\phi : (P,Q) \in E \times E \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$.

a. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

b. Expliciter une base orthonormée de E pour ϕ.

II. Normes associées

Ex. 23.5 Soit E un espace euclidien, u_1, u_2, ..., u_n des vecteurs unitaires de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|u_i)^2$$

Montrer que la famille $(u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est une base orthonormale de E.

Ex. 23.6 Soit E un espace préhilbertien réel muni de sa norme associée $\|.\|$. Montrer que

$$\forall u, v \in E, |\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$$

Rappeler le nom de cette inégalité.

III. Orthogonalité

Ex. 23.7 Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit $F = \{(x, y, z, t) \in E, x + y + z + t = 0\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis donner une base orthonormée de F.

Ex. 23.8 Soit E un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Ex. 23.9 Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique. Soient E_1 et E_2 les parties de E formées des fonctions paires et impaires respectivement.

a. Montrer que quel que soit $f \in E$, il existe un unique couple $(g, h) \in E_1 \times E_2$ tel que $f = g + h$.
b. Écrire la propriété précédente en terme de sous-espaces supplémentaires dans E.
c. Montrer que $E_1^\perp = E_2$.

Corrections

Maths - Feuille d'exos n° 24

Intégration

I. Primitives et intégrales

Ex. 24.1 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.

b. Montrer que si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

c. Montrer que si f est T-périodique, alors
$\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{b}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 24.2 Linéariser $\cos^3(x)$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$.

Ex. 24.3 Calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}(2-t)\mathrm{d}t \quad J = \int_0^3 |t-2|\mathrm{d}t$

$K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\mathrm{d}t \quad L = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad M = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}}$

$N = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \quad P = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \quad Q = \int^x \sin^3(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$

$R = \displaystyle\int^x \tan(t)\mathrm{d}t \quad S = \int^x t\,\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t \quad T = \int^x \ln^2(t)\mathrm{d}t$

$U = \displaystyle\int^x \mathrm{ch}^2(t)\mathrm{d}t \quad V = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}} \quad W = \int^x \frac{2-t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$

$X = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \quad Y = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{ch}(t) - 4\,\mathrm{sh}(t)} \quad Z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\sin(2t)}$

Ex. 24.4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.

c. Calculer I_2, I_3 et I_4.

d. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n (a_n e - n!)$.

e. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.

f. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

g. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

Ex. 24.5

a. Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$ est bien définie.

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer les expressions de F sur $[0;2]$.

d. Montrer que F n'est pas partout dérivable.

Ex. 24.6 (Cor.) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$f'(t) - f(t) = e^t \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Ex. 24.7 (Cor.) Résoudre l'équation différentielle $tf'(t) - f(t) + 3t^2 f(t)^2 = 0$ en donnant les intervalles sur lesquels la solution est valable.
[Indication : montrer d'abord que sur tout intervalle où f ne s'annule pas, $g(t) = \dfrac{t}{f(t)}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.]

II. Sommes de Riemann, méthodes numériques

Ex. 24.8 Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{k^2+n^2}$$

Ex. 24.9 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

b. ***Méthode des rectangles***

Majorer l'erreur commise en approximant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right).$$

c. ***Méthode des trapèzes***

Majorer l'erreur commise en approximant $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)}{2}.$$

Corrections

Cor. 24.6 : **Analyse** : supposons qu'une telle fonction f existe. f est dérivable, donc continue, donc $f'(t)$ et $I = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$ sont bien définis. f est solution de l'équation différentielle $f' - f = I \exp$. Résolvons cette équation :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda e^t + Ite^t$.
De plus, $I = \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = \int_0^1 \lambda e^u + Iue^u \mathrm{d}u = \lambda(e-1) + Ie - I(e-1) \Rightarrow \lambda = 0$.
Donc $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = Ite^t$.
Synthèse : $\forall k \in \mathbb{R}$, la fonction $f_k : t \in \mathbb{R} \mapsto kte^t$ vérifie
$\forall t \in \mathbb{R}, f_k'(t) - f_k(t) = ke^t$ et $\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u = ke - k(e-1) = k$ donc les fonctions de cette forme sont les solutions recherchées.

Cor. 24.7 :

- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on pose $g(t) = \frac{t}{f(t)}$, $g'(t) = \frac{f(t) - tf'(t)}{f(t)^2} = 3t^2$ donc $g(t) = \frac{t}{f(t)} = t^3 - k^3, k \in \mathbb{R}$.
- Sur tout intervalle où f ne s'annule pas, on a donc $f(t) = \frac{t}{t^3 - k^3}$.
- On suppose maintenant $k = 0$: $f(t) = \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}$ ne s'annule jamais et est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.
- On suppose $k \neq 0$: $f(t)$ s'annule en $t = 0$ et est définie sur chacun des trois intervalles de $\mathbb{R}\backslash\{0; k\}$. En 0, $f(t) = \frac{-t}{k^3} + o(t)$, elle est donc prolongeable en une fonction dérivable en 0 en prenant de part et d'autre de 0 la même constante d'intégration.
- Finalement les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $k \in \mathbb{R}, f_k(t) = \frac{t}{t^3 - k^3}$ définies sur $]-\infty; k[$ et $]k; +\infty[$.

Troisième partie

TD

Maths - TD n° 1

Nombres complexes et géométrie

I. Racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité

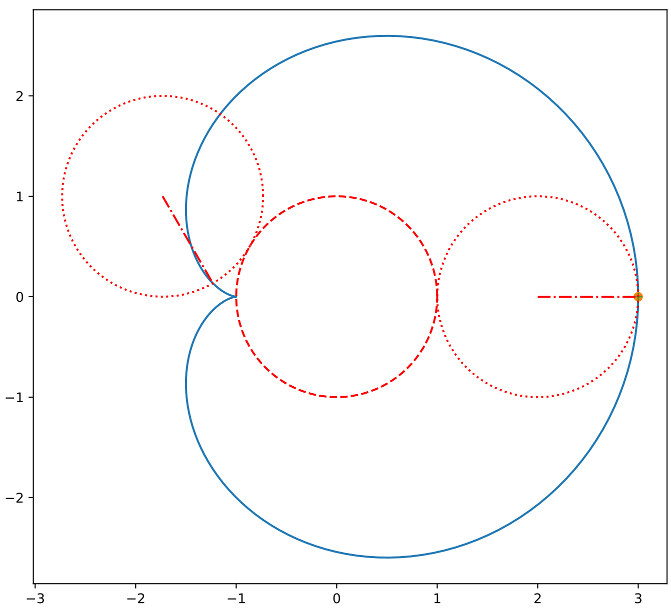
On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ (voir exercice 4.7).
Le but de ce TD est de construire ***à la règle et au compas*** les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité, qui forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

1. Rappeler la méthode ayant permis de calculer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
3. Donner une méthode de construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\sqrt{5}$.
4. Donner une méthode de construction à la règle et au compas d'un segment de longueur $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.
5. Construire à la règle et au compas les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité.

II. Étude de deux fonctions à valeurs complexes

Soit $\phi : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t+e^{it} \end{array}\right.$ et $\psi : \left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 2e^{it}+e^{2it} \end{array}\right.$

1. Étudier $\mathcal{R}e\left(\phi\right)$ et $\mathcal{I}m\left(\phi\right)$.
2. Tracer la trajectoire de ϕ.
3. Étudier $\mathcal{R}e\left(\psi\right)$ et $\mathcal{I}m\left(\psi\right)$.
4. La trajectoire de ψ est donnée ci-dessous. Interpréter géométriquement cette trajectoire.



Animation de la trajectoire.

`Maths - TD n° 2`

Résolutions de systèmes linéaires

Dans l'ensemble du TD, on note $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Ex. 2.1 Soit $\phi : (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \left(\frac{-x+2y+2z}{3}; \frac{2x-y+2z}{3}; \frac{2x+2y-z}{3}\right)$. Déterminer la nature géométrique de ϕ.

Ex. 2.2

1. Résoudre et discuter suivant la valeur de $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ le système

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & \alpha \\ x & + & ay & + & z & = & \beta \\ x & + & y & + & az & = & \gamma \end{array} \right.$$

2. Généraliser le résultat à un système de 4 équations à 4 inconnues, 5 équations à 5 inconnues, etc..., n équations à n inconnues.

Ex. 2.3 Résoudre avec $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, a_i \in \mathbb{K}^*$ et $s \in \mathbb{K}$ le système d'inconnues $x_1, ..., x_n$ suivant

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_1}{a_1} & = & \dfrac{x_2}{a_2} & = & \cdots & = & \dfrac{x_n}{a_n} \\ x_1 & + & \cdots & + & x_n & = & s \end{array} \right.$$

Ex. 2.4 Soient a, b, c les racines de $t^3 - t + 1 = 0$. Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ ax & + & by & + & cz & = & 0 \\ a^2x & + & b^2y & + & c^2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ex. 2.5 Soient a, b deux complexes non nuls. Résoudre dans $\mathbb{C}^n$:
$\forall j \in [\![2;n]\!]$, $x_j = ax_{j-1} + b$ et $x_1 = ax_n + b$.

Fonctions de référence, espaces vectoriels

Définition 3.1 (Intervalle symétrique par rapport à 0)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que I est ***symétrique par rapport à 0*** si

$$\forall x \in I, -x \in I$$

Ex. 3.1 Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
Soit F l'ensemble des fonctions impaires de I dans $\mathbb{R}$ et G l'ensemble des fonctions paires de I dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer, ***par analyse-synthèse***, que F et G sont supplémentaires.
3. Soit f une fonction de E. Que peut-on déduire de la question précédente concernant f ?
4. Soient $\mathcal{P} : \left\{\begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{P}(f) = f_2 \end{array}\right.$ et $\mathcal{I} : \left\{\begin{array}{lcl} E = F \oplus G & \to & E \\ f = f_1 + f_2 & \mapsto & \mathcal{I}(f) = f_1 \end{array}\right.$.
   Que peut-on dire des applications $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$?

Définition 3.2 (Partie paire, partie impaire d'une fonction)

Étant donnés un intervalle I symétrique par rapport à 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on appelle

- ***partie paire de*** f la fonction $x \in I \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$;
- ***partie impaire de*** f la fonction $x \in I \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Notation

Avec les mêmes hypothèses que dans la définition précédente, on notera

- $\mathcal{P}(f)$ la partie paire de f ;
- $\mathcal{I}(f)$ la partie impaire de f.

Ex. 3.2 Dans chaque cas, expliciter $\mathcal{P}(f)$ et $\mathcal{I}(f)$:

- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(kx)$ où $k \in \mathbb{Z}$;
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Ex. 3.3

1. Exprimer $\cos(5x)$ et $\sin(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.
   Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.
2. Exprimer en fonction de $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$:
   - $\text{ch}(2x)$;
   - $\text{sh}(2x)$;
   - $\text{ch}(3x)$;
   - $\text{sh}(3x)$.

3. Exprimer $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$, $\mathrm{ch}(a-b)$ et $\mathrm{sh}(a-b)$ en fonction de $\mathrm{ch}(a)$, $\mathrm{sh}(a)$, $\mathrm{ch}(b)$ et $\mathrm{sh}(b)$.
   Linéariser $\mathrm{sh}^3(x)\,\mathrm{ch}^2(x)$.

Maths - TD n° 4

Espaces vectoriels en dimension finie

Ex. 4.1 (Cor.) On appelle ***carré magique*** toute matrice telle que les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chacune des diagonales soient égales.

Par exemple $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ est un carré magique, la somme des lignes/colonnes/diagonales étant égale à 12.

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$ où on identifie les carrés magiques à des 9-uplets de nombres réels. On note F l'ensemble de tous les carrés magiques vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ou de $\mathbb{R}^9$: $F \subset E$.

Pour un carré magique C, on notera $c_{1,1}, c_{2,1}..., c_{3,3}$ ses coefficients ou, indifféremment, $c_1, c_2, ..., c_9$, ordonnés de la façon suivante :

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_4 & c_7 \\ c_2 & c_5 & c_8 \\ c_3 & c_6 & c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} \\ c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} \end{bmatrix}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $\phi : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x + y + z \in \mathbb{R}$.
   Montrer que ϕ est linéaire, calculer $\operatorname{rg} \phi$ puis $\dim \operatorname{Ker} \phi$.
3. Soit $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   Montrer que $C \in \mathbb{R}^9$ est un carré magique si et seulement si $\exists c \in \mathbb{R}, C = cJ + D$ où D est un carré magique dont les sommes (par ligne, par colonne ou par diagonale) sont nulles.
   On note F_0 l'ensemble des carrés magiques de sommes nulles.
4. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de F.
5. Soit $\psi : M \in \mathbb{R}^9 \mapsto (\phi(L_1); \phi(L_2); \phi(L_3); \phi(C_1); \phi(C_2); \phi(C_3); \phi(D_1); \phi(D_2)) \in \mathbb{R}^8$
   où L_1 est la première ligne de M vue comme matrice, C_1 sa première colonne, D_1 sa première diagonale, etc...
   Montrer que $F_0 = \operatorname{Ker} \psi$.
6. Calculer $\operatorname{rg} \psi$ puis $\dim F_0$.
7. Donner une base de F.

Ex. 4.2 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $P \in \mathbb{N}^*$ et F_P le sous-ensemble de E composé des suites P périodiques.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie.
3. Soit $U(k)$ la suite P périodique telle que $U(k)_n = 1$ si $n = k[P]$ et $U(k)_n = 0$ sinon.
   Montrer que $\mathcal{B} = \big(U(0); U(1); ...; U(P-1)\big)$ est une base de F. En déduire $\dim F$.
4. Soit $c = e^{\frac{2i\pi}{P}}$. Soit $V(k)$ la suite définie par $V(k) = \big(c^{kn}\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Montrer que $\mathcal{C} = \big(V(0); V(1); ...; V(P-1)\big)$ est une base de F.
5. Soit $u \in F$. Exprimer les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de u dans $\mathcal{C}$.

6. Soit $\phi : Q \in \mathbb{R}_{P-1}[X] \mapsto \sum_{k=0}^{P-1} Q(c^k)X^k \in \mathbb{R}_{P-1}[X]$.
   Montrer que ϕ est un automorphisme.
7. Soit $u \in F$. Exprimer les coordonnées de u dans $\mathcal{C}$ en fonction des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ à l'aide de ϕ.

Correction

Cor. 4.1 :

7. Réponse : les carrés magiques sont de la forme

$$C = \begin{pmatrix} -b+c & a+2b+c & -a-b+c \\ -a+c & c & a+c \\ a+b+c & -a-2b+c & b+c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Si l'on impose de plus que :
- les coefficients sont entiers, on doit prendre $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$;
- les coefficients sont deux à deux distincts, on doit prendre

$$b \neq 0 \quad \text{et} \quad a \notin \left\{-3b; -2b; \frac{-3b}{2}; -b; \frac{-b}{2}; 0; b\right\}$$

Par exemple, pour $a = 2, b = 1, c = 4$, on obtient

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

exemple donné en début d'énoncé.
Enfin, pour gagner en symétrie, on peut faire le changement de variable $u = a+b$, $v = b$ qui donne la forme

$$C = \begin{pmatrix} -v+c & u+v+c & -u+c \\ -u+v+c & c & u-v+c \\ u+c & -u-v+c & v+c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}^*, u \in \mathbb{Z}/\left\{-2v; -v; \frac{-v}{2}; 0; \frac{v}{2}; v; 2v\right\}$$

Maths - TD n° 5

Suites récurrentes

Dans tout le TD, on dénotera par :

- I un intervalle réel ;
- f une fonction de $\mathcal{F}(I, I)$;
  (autrement dit f est définie sur I et $f(I) \subset I$: on dit que I ***est stable par*** f)
- a un élément de I.

On définit alors la suite u par $\begin{cases} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{cases}$.

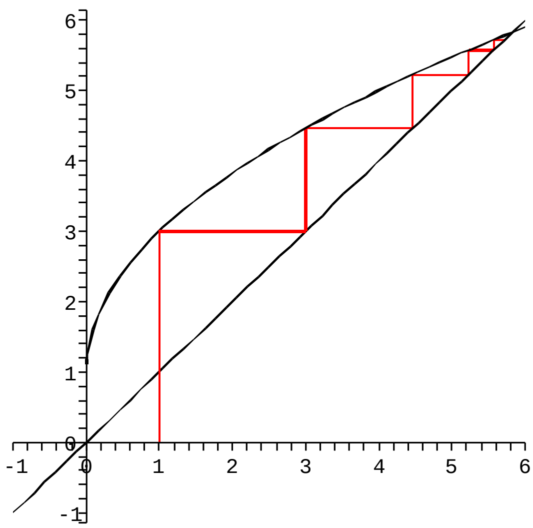
On étudiera aussi les suites $\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & r(v_n) = 2\sqrt{v_n} + 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} w_0 & = & \frac{1}{2} \\ w_{n+1} & = & g(w_n) = 1 + \frac{1}{w_n} \end{cases}$.

.1. Existence et représentation graphique d'une suite récurrente

Ex. 5.1

1. Démontrer que u est bien définie.

   Ci-contre la représentation graphique de la suite v.
   Pour obtenir une telle représentation graphique, on trace d'abord les représentations graphiques $y = x$ et $y = r(x)$.
   On place alors $v_0 = 1$ sur l'axe des abscisses et on obtient $v_1 = r(v_0)$ comme l'ordonnée du point d'abscisse v_0 de la représentation graphique de r.
   Pour placer v_1 en abscisse, il suffit de prendre l'abscisse du point d'ordonnée v_1 de la représentation graphique de la droite d'équation $y = x$.
   On peut alors recommencer le même processus pour représenter v_2, v_3 etc...



2. Prouver l'existence de la suite v (c'est-à-dire montrer qu'elle est bien définie).
3. Prouver l'existence de la suite w puis la représenter graphiquement dans un repère orthonormé en prenant 2cm pour unité.

.2. Monotonie

Ex. 5.2

1. Montrer que si f est strictement croissante sur I et si $u_1 > u_0$ alors u est strictement croissante.
2. Montrer que si f est croissante sur I alors u est monotone.
3. Que peut-on dire si f est décroissante sur I ?
4. Que peut-on dire du sens de variation des suites v et w précédemment définies.

.3. Théorème du point fixe et convergence

On dit que $\alpha \in I$ est un point fixe de f si $\alpha = f(\alpha)$.

Ex. 5.3 On suppose f ***continue*** sur I.

1. Montrer que si I est un segment (i.e. I de la forme $[b;c], b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$) alors f possède au moins un point fixe sur I.
2. Montrer que si I est un segment et si f est croissante sur I alors u converge vers un point fixe de f sur I.
3. Donner un exemple d'une fonction $f(: I \to I)$ telle que u diverge :
   - avec f croissante et $I = [0; +\infty[$;
   - avec f décroissante et $I = [0; 1]$.
4. Donner un exemple d'une fonction $f : [0; 1] \to [0; 1]$ décroissante telle que u converge.

.4. Exemples d'utilisation

Ex. 5.4 Étudier la convergence des suites v et w définies dans l'exercice 5.1.

Ex. 5.5 On définit la suite t par $\begin{cases} t_0 & \in \mathbb{R} \\ t_{n+1} & = h(t_n) = \frac{t_n^2}{4} + 1 \end{cases}$

1. Montrer que t est bien définie.
2. Tracer dans un même repère la représentation graphique de h et de la première bissectrice.
3. Résoudre l'équation $h(x) = x$.
4. Montrer que t est croissante et en déduire ses comportements asymptotiques possibles.
5. On suppose $t_0 \in [0; 2]$. Que peut-on en déduire ?
6. Etudier le comportement de t lorsque $t_0 \notin [0; 2]$.

Ex. 5.6 (Cor.) ***Oral Mines*** Étudier la suite s définie par $s_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n+1} = 1 - s_n^2$.
[Indication : l'exercice a été donné sans question intermédiaire.
On pourra utiliser comme plan d'étude : étudier $k : x \mapsto 1 - x^2$ et montrer que $k([0; 1]) = [0; 1]$, représenter graphiquement k et la première bissectrice puis étudier les termes de rang pair et impair de la suite s pour parvenir à une conclusion.]

Ex. 5.7 (Cor.) [∗∗] Soit $a \in [0; 1]$ et u définie par $u_0 = a$, $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.
Remarque : on pourra éventuellement traiter les deux questions en même temps.

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite est convergente.
2. Déterminer lorsqu'elle converge un équivalent de $u_n - l$.

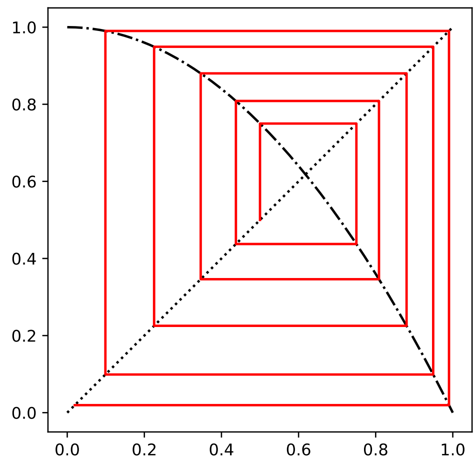
Cor. 5.6 : Soit $f : x \in [0;1] \mapsto 1 - x^2$.
f est définie, continue et dérivable sur $[0;1]$ et
$f'(x) = -2x$ donc f est strictement décroissante sur $[0;1]$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0;1]) = [0;1]$.
De plus, $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0;1]$, donc la suite u est bien définie d'une part, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;1]$ d'autre part.
La suite u est donc bornée.

f étant strictement décroissante on étudie les sous-suites extraites de rang pair et impair et pour cela, on étudie $h = f \circ f$.
$\forall x \in [0;1], h(x) = 1 - \left(1 - x^2\right)^2 = 2x^2 - x^4$.
$h'(x) = 4x - 4x^3 = 4x\left(1 - x^2\right) = 4xf(x) \geqslant 0$ puisque $x \in [0;1]$ est positif et $f(x) \in [0;1]$ aussi.
Donc $h = f \circ f$ est croissante, donc les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.
$s_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
$s_2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.
$s_3 = 1 - \frac{49}{256} = \frac{207}{256} > \frac{192}{256} = \frac{3}{4}$.
Finalement, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Ces deux suites étant bornées, elles convergent vers un point fixe de h (car h est continue).

Cherchons les points fixes de h :
$h(x) = x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 2x + 1) = 0$ avec 1 pour racine évidente du second facteur.
Donc $h(x) = x \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x - 1) = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ ce qui conduit donc aux 4 points fixes $\left\{0; 1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
La dernière racine n'est pas dans l'intervalle $[0;1]$ donc ne peut pas être limite des deux suites extraites.
De même $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$ ne peut être limite des deux suites extraites.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = 0$ (décroissante, bornée par 0 et $u_0 = \frac{1}{2}$, la seule limite possible est 0)
et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n+1} = 1$ (croissante, bornée par $u_1 = \frac{3}{4}$ et 1, la seule limite possible est 1).

Les deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, donc s diverge.

Bonus : représentation graphique de la suite



Cor. 5.7 :

1. Soit $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$. f est la composée d'une fonction continue décroissante et d'une fonction continue croissante donc est continue décroissante sur son ensemble de définition. De plus $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ donc $f([0;1]) = [0;1]$.
   $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1-x} = x^2 \Leftrightarrow (1-x)^2(1+x)^2 = 1 - x \Leftrightarrow (x = 1)\,\textbf{ou}\,(x - x^2 - x^3 = 0)$
   Donc $f(f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow (x = 1)\,\textbf{ou}\,(x = 0)\,\textbf{ou}\,(x^2 + x - 1 = 0)$. Cette dernière équation a pour solution $l = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0;1]$ l'autre solution étant négative.
   Or $f \circ f - \mathrm{id}$ est continue donc de signe constant sur $[0;l]$ et $[l;1]$.
   Effectuons un développement limité en l :
   $$f(f(x)) - x = \sqrt{1 - \sqrt{1-x}} - x = \sqrt{1 - \sqrt{l^2 + l - x}} - x = \sqrt{1 - l\sqrt{1 - \frac{h}{l^2}}} - h - l \text{ en posant } h = x - l.$$
   D'où $f(f(x)) - x \underset{h\to 0}{=} \sqrt{1 - l + \frac{h}{2l} + o(h)} - h - l = l\sqrt{1 + \frac{h}{2l^3} + o(h)} - h - l = \dfrac{1-4l^2}{4l^2}h + o(h)$.
   Or $1 - 4l^2 = l^2 + l - 4l^2 = l(1 - 3l) = l\left(l^2 - 2l\right) = l^2\left(-1 - l^2\right) < 0$.
   Donc sur un voisinage de l, $f(f(x)) - x$ est du signe de $l - x$ et comme elle est de signe constant sur $[0;l]$ et $[l;1]$, on a :
   $f(f(x)) > x \Leftrightarrow 0 < x < l$ et $f(f(x)) < x \Leftrightarrow l < x < 1$.
   On en déduit donc que les suites extraites de u de rangs pairs et impairs sont monotones, soit strictement croissante et majorée par l si leur premier terme est dans $]0;l[$, soit strictement décroissante et minorée par l si leur premier terme est dans $]l;1[$.

La suite u converge donc vers $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ pour toute valeur de $u_0 = a \in]0;1[$ et pour $a \in \{0;1\}$ elle est périodique de période 2 et divergente.

2. On distingue alors trois cas en définissant la suite v par $v = u - l$:
   - si $a = l$, u est une suite constante égale à l et $v = 0$;
   - si $l < a < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n v_n > 0$ et
     $\ln\left((-1)^{n+1}v_{n+1}\right) - \ln\left((-1)^n v_n\right) = -\ln\left(\sqrt{l^2 - v_n} + l\right) \overset{n\infty}{\to} -\ln\left(l + l\right) = -\ln(2l)$
     On en déduit donc en utilisant le lemme de Cesaro que $v_n \overset{n\infty}{\sim} \left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}-1}\right)^n$;
   - de même, si $0 < a < l$, $v_n \overset{n\infty}{\sim} -\left(\dfrac{-1}{\sqrt{5}-1}\right)^n$.

Maths - TD n° 6

Introduction aux probabilités

I. La naissance des probabilités : correspondance entre *Blaise Pascal* et *Pierre de Fermat*

L'ensemble de la correspondance connue de **Blaise Pascal** (voir note 1 page 38) peut être consulté sur **Gallica** à l'adresse suivante : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r. Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la lettre du 29 juillet 1654 à **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 291) :
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f204.image.
Le problème discuté dans la correspondance que nous allons détailler est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en trois parties gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte trois parties en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de parties remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654

« Monsieur,
L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis[1] , que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les partis des dés et des parties dans la parfaite justesse ; j'en suis tout satisfait car je ne doute plus maintenant que je sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous[...]
Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à l'idée dans cette recherche ; mais parce que la peine des combinaisons est excessive j'en ai trouvé un abrégé, et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots ; car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.
Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, 3 parties, et chacun a mis 32 pistoles en [jeu].
Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils ne veulent point hasarder cette partie, et se hasarder sans la jouer, le premier doit dire : "*Je suis sûr d'avoir* 32 *pistoles car la perte même me les donne ; mais pour les* 32 *autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ;* ***le hasard est égal*** *; partageons donc ces* 32 *pistoles* ***par la moitié****, et me donnez outre cela, mes* 32 *qui me sont sûres.*" Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie... »

Questions

1. En suivant le même raisonnement que Pascal, dire comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 2 parties à 0.
2. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors qu'il y a égalité 1 partie partout ?
3. Comment les deux joueurs doivent se partager la mise de 64 pistoles s'ils arrêtent le jeu alors que le premier joueur gagne 1 partie à 0 ?

1. Cette lettre ne nous est pas parvenue. ***Parti*** (au masculin) est ici à prendre au sens de ***répartition***.

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

« [. . .] Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une nouvelle partie, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie, donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : “Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 ***par la moitié***. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 ***par la moitié***, prenez en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44.”

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert, et que je n'en faisais que pour voir si je ne me trompais pas, la valeur (j'entends la valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de dernière partie de cinq, etc. . . »

Questions

1. Que signifie Pascal par la phrase : « . . .pour la première partie il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde autres 12, et pour la dernière 8. » ?
2. Au sens où l'entend Pascal, quelle est la « valeur de la dernière partie de deux », la « valeur de la dernière partie de trois », la « valeur de la dernière partie de quatre » ?
3. Calculer la « valeur de la dernière partie de cinq ».
4. Comment généraliser ce résultat ?

De Blaise Pascal à Fermat : le 29 juillet 1654 (suite)

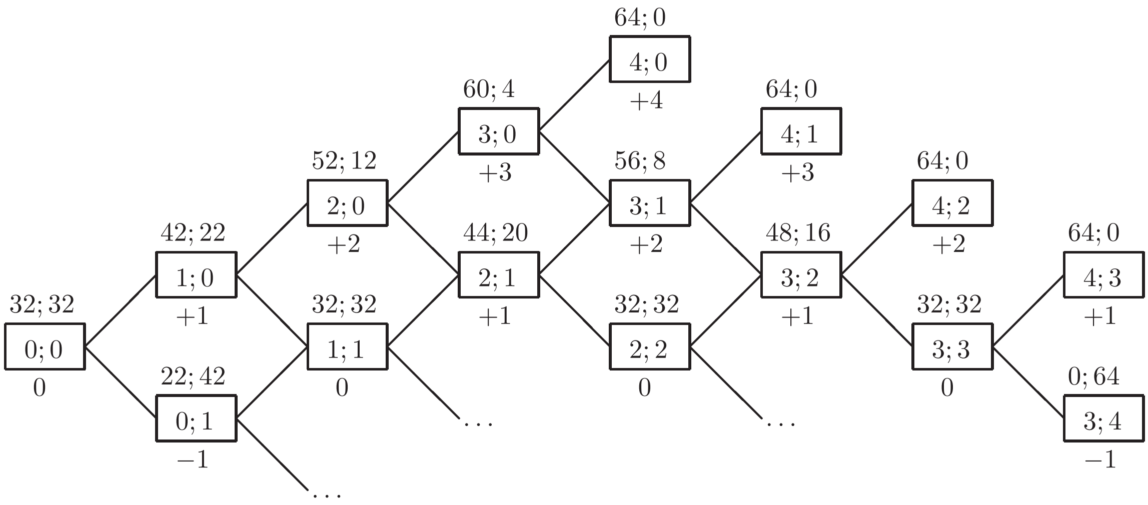
« Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisais tant de cas, comme en effet il me plaît fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. »

Questions

1. Représenter graphiquement à l'aide d'un arbre tous les scores possibles d'un jeu en 4 parties gagnantes depuis le début à $0-0$ jusqu'à la victoire d'un des deux joueurs.
2. Représenter sur cet arbre la répartition des mises que Pascal préconise en cas d'arrêt précoce du jeu dans le cas où chaque joueur met 32 pistoles en jeu.
3. Expliquer pourquoi cet arbre contient les arbres des jeux en 1, 2 et 3 parties gagnantes.
4. Calculer la valeur de chaque partie au sens où l'entend Pascal dans le cas d'un jeu en 5 parties gagnantes.
5. Quelle est la réponse au problème que Pascal se pose : « Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première. » ?

II. Correction des exercices sur la correspondance Fermat-Pascal



Légende :

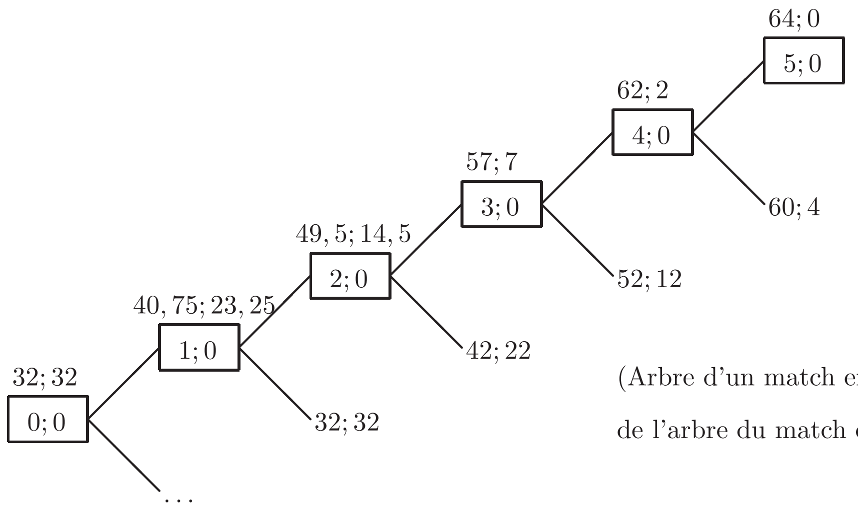
Partis ou ***répartition des gains***

$\boxed{\text{Score}}$

Avantage

L'arbre ci-dessus représente tous les scores possibles lors d'un match en 4 manches gagnantes (la partie inférieure de l'arbre qui est manquante est l'exacte symétrique de la partie supérieure). La répartition des gains en cas d'arrêt prématuré de la partie a été calculée selon la méthode indiquée par Pascal.
Si le score en arrive à $1; 1$, il suffit pour qu'un joueur gagne la partie qu'il gagne 3 manches. Autrement dit, à $1; 1$, le reste de la partie se joue en 3 manches gagnantes.
De même, à $2; 2$, le reste de la partie se joue en 2 manches gagnantes. Et à $3; 3$, le reste de la partie se joue en 1 manche gagnante, c'est-à-dire que celui des deux qui gagne la manche suivante a gagné la partie.
Ceci nous permet d'affirmer que l'arbre de la répartition des gains pour un match en 1 manche gagnante se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 2 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 3 manches gagnantes, qui se trouve inclus dans l'arbre pour un match en 4 manches gagnantes etc...

Pour construire l'arbre de la répartition des gains pour un match en 5 manches gagnantes, il suffit donc de construire les bords de l'arbre ci-dessus, et comme l'arbre est symétrique, de construire le bord supérieur.



(Arbre d'un match en 4 manches gagnantes à l'intérieur de l'arbre du match en 5 manches gagnantes.)

Finalement, au sens où l'entend Pascal et pour une mise de 32 pistoles par joueur :

- la première manche d'un match en 1 manche gagnante vaut 32 pistoles ;
- la première manche d'un match en 2 manches gagnantes vaut 16 pistoles ;
- la première manche d'un match en 3 manches gagnantes vaut 12 pistoles ;
- la première manche d'un match en 4 manches gagnantes vaut 10 pistoles ;
- la première manche d'un match en 5 manches gagnantes vaut 8,75 pistoles.

D'une manière générale, pour un match en n manches gagnantes, Pascal propose la formule suivante pour le calcul de la valeur de la première manche lorsque chaque joueur a fait une mise de M :

la première manche d'un match en** n **manches gagnantes vaut $M \times \dfrac{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres impairs}}{\texttt{produit des } (\texttt{n}-1) \texttt{ premiers nombres pairs}}$

Ce qui appliqué aux cas déjà calculés, donne :

- 2 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{M}{2}$
- 3 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3}{2 \times 4} = \dfrac{3M}{8}$
- 4 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6} = \dfrac{5M}{16}$
- 5 manches gagnantes : $M \times \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{35M}{128}$

Généralisation :

1. donner une formule explicite pour la valeur de la première manche d'un match en n manches gagnantes à l'aide de factorielles et de puissances de 2 ;
2. combien vaut la $k^{\text{ième}}$ manche d'un match en n manches gagnantes ?

Maths - TD n° 7

Résolution du problème des partis

Le but de ce TD est de donner une formulation moderne au problème des partis discuté par **Blaise Pascal** (voir note 1 page 38) et **Pierre de Fermat** (voir note 2 page 291) que nous avons introduit dans le TD n°6.

On rappelle que ce problème est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes. C'est-à-dire que celui des deux qui remporte n manches en premier, remporte la mise. Par suite d'un empêchement, ils doivent arrêter leur jeu avant la fin. Comment doivent-ils alors se répartir la mise suivant le nombre de manches remportées par chacun pour que cette répartition tienne un compte juste de l'avantage que l'un ou l'autre des deux joueurs a pris sur le second ?

I. Modélisation du problème

I.1. Discussion sur le travail de modélisation d'un problème de probabilités

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre de manches garantissant la victoire aux joueurs (autrement dit, le jeu est en n manches gagnantes).

L'objet de ce paragraphe est de formaliser le problème posé c'est-à-dire d'en donner un modèle permettant à la fois de décrire correctement les situations qui peuvent survenir, de représenter les différentes notions et grandeurs pertinentes et d'énoncer l'hypothèse d'équiprobabilité (« le hasard est égal » nous dit Pascal) conduisant au calcul des probabilités.
Notamment, il nous faut préciser :

- l'univers, et pour cela s'interroger sur les événements intervenant dans le problème posé ;
- les variables aléatoires intéressantes.

Comme nous le verrons, plusieurs modélisations sont possibles, ***chacune ayant un intérêt***, chacune présentant des avantages et des inconvénients. Notamment certaines modélisations faciliteront le calcul des probabilités, d'autres permettront d'exprimer plus simplement des événements ayant un intérêt particulier.

Commençons par suivre Pascal dans sa modélisation : son raisonnement se fonde sur les ***scores*** respectifs des joueurs. Un premier modèle consiste donc à faire intervenir l'***univers des scores***. En numérotant les deux joueurs, on peut ainsi représenter un événement élémentaire par la suite des couples de scores des deux joueurs du début à la fin de la partie. Un événement élémentaire est donc dans ce modèle une liste de points du plan $\mathbb{N}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

- le premier élément de la liste est le point $(0;0)$;
- deux éléments successifs de la liste sont de la forme $(x;y),(x+1;y)$ ou $(x;y),(x;y+1)$;
- le dernier élément de la liste est soit de la forme $(n;y)$ où $y \in [\![0;n-1]\!]$, soit de la forme $(x;n)$ où $x \in [\![0;n-1]\!]$.

Une telle modélisation de la partie s'appelle ***marche aléatoire***.

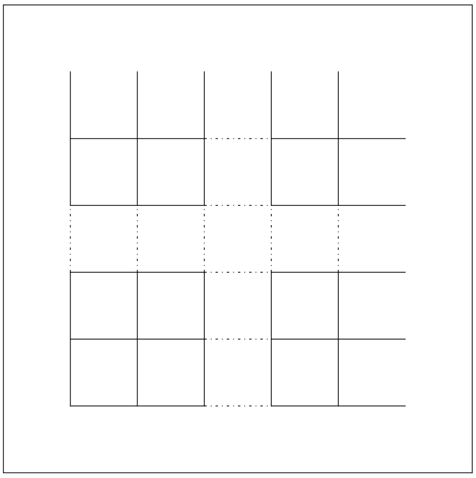
Une seconde modélisation possible consiste à ne donner pour chaque manche que le vainqueur de cette manche, en attribuant par exemple à l'un des joueurs la lettre A et à l'autre la lettre B. Une partie, c'est-à-dire un événement élémentaire, est alors représentée par un ***mot*** formé des lettres A et B et vérifiant les propriétés suivantes :

- un mot contient exactement n lettres A ou exactement n lettres B ;
- si un mot contient n lettres A, il se termine par un A (la partie est terminée dès qu'un joueur a gagné n manches) et contient alors moins de $n-1$ lettres B ;
- réciproquement, si un mot contient n lettres B, il se termine par un B et contient alors moins de $n-1$ lettres A.

Nous allons entrer dans le détail de chacune de ces modélisations.

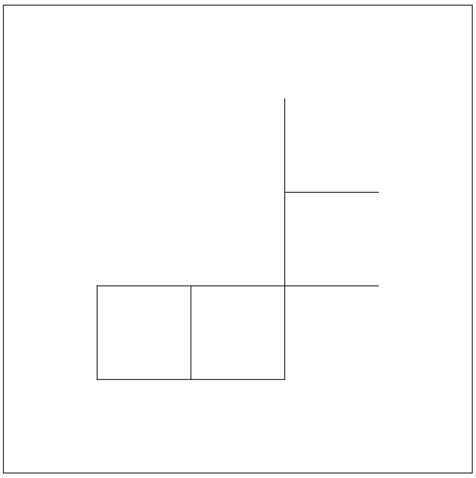
I.2. Modélisation par une marche aléatoire

a) Représentation graphique



Une partie est ici un chemin reliant l'origine au point dont les coordonnées représentent le score final de la partie.
La figure de gauche représente toutes les parties possibles.

b) Notation pour les événements



Nous noterons $(x; y)$ l'événement réunissant toutes les parties pour lesquelles $(x; y)$ est un score ayant été atteint.
Par exemple $(0; 0) = \Omega_n$ et $(n; 0)$ est un événement élémentaire puisqu'une seule partie peut conduire à ce score final.
En revanche $(1; n)$ ***n'est pas un événement élémentaire***.
La représentation graphique ci-contre représente l'événement $(2; 1)$ dans le cas $n = 3$.

c) Variable aléatoire

Nous noterons G_n la variable aléatoire donnant la somme gagnée par le premier joueur en fin de partie lors d'une partie en n manches gagnantes. Nous supposerons que G_n est exprimé en « mise de départ » si bien que G_n n'a que deux valeurs possibles, $G_n : \Omega_n \to \{-1; 1\}$, puisque soit le premier joueur a perdu sa mise, soit il a remporté celle du second joueur.

d) Avantages et inconvénients du modèle des marches aléatoires

Le modèle que nous venons de décrire possède un premier (et énorme) avantage : il est très proche du texte de Blaise Pascal et va nous permettre de formaliser ses arguments.
Par ailleurs, il possède aussi l'avantage d'être associé à une représentation graphique très intuitive pouvant servir de support à la pensée et à l'argumentation. Enfin, les notations $(x; y)$ que nous venons de définir pour les événements sont parlantes et efficaces.

En revanche, le calcul des probabilités n'y est pas aisé ce qui justifie que l'on introduise un second modèle.

I.3. Modélisation par un mot

a) Variables aléatoires

Étant donné un mot représentant une partie (c'est-à-dire, on le rappelle, comportant n lettres A, moins de $n-1$ lettres B et se terminant par A ou réciproquement comportant n lettres B, moins de $n-1$ lettres A et se terminant par B), on notera :

- $X_n : \Omega_n \to [\![0;n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres A du mot, c'est-à-dire le score final du premier joueur ;
- $Y_n : \Omega_n \to [\![0;n]\!]$ la variable aléatoire donnant le nombre de lettres B du mot, c'est-à-dire le score final du second joueur ;
- $G_n : \Omega_n \to \{-1;1\}$ la variable aléatoire donnant le gain du premier joueur, c'est-à-dire valant 1 si le mot se termine par A et -1 s'il se termine par B.

b) Avantages et inconvénients du modèle des mots

Les avantages de ce modèle sont les inconvénients du précédent et réciproquement !

I.4. À propos du travail d'un élève

Dans les problèmes de probabilités un tant soit peu complexes, ***on n'attend pas d'un élève une formalisation aussi précise***. Cependant, ***la plupart des erreurs dans le domaine des probabilités proviennent d'une mauvaise modélisation de l'expérience aléatoire considérée***.
Aussi, il est ***plus que recommandé*** de prendre le temps de formaliser pour soi-même un problème avant même de tenter de répondre aux questions. On prendra ensuite soin de préciser ***rapidement*** les modèles que l'on souhaite utiliser au travers ***des différentes formes*** que prendra l'univers (une simple phrase suffit), les définitions et notations des événements et des variables aléatoires que l'on jugera utiles.
Il est aussi ***plus que recommandé*** de faire des représentations graphiques pour étayer son argumentation. Il est en revanche inutile de les expliquer : le lecteur est à même de les interpréter seul.
Une argumentation claire vaut mieux que des tartines de calculs incompréhensibles. La formalisation n'a pas pour but de remplacer l'argumentation, elle a pour but ***de l'éclairer*** !

II. Énoncé

On rappelle que la partie se joue en $n \in \mathbb{N}^*$ manches gagnantes : la partie s'arrête lorsque l'un des joueurs gagne sa n-ième manche, ce joueur est déclaré vainqueur et remporte les mises.
Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$.

1. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie n manches à p.
2. Calculer $\mathbb{E}(G_n)$.
3. Soient $(x; y) \in [\![0; n-1]\!] \times [\![0; p]\!]$. Calculer la probabilité que le premier joueur remporte la partie n manches à p sachant que le score actuel est x manches à y.
4. Soit C un événement de probabilité non nulle.
   Démontrer que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{|C}$ est une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega_n)$.

   On définit pour une variable aléatoire Z l'***espérance conditionnelle de Z sachant C*** par
   $$\mathbb{E}_{|C}(Z) = \sum_{i \in Z(\Omega_n)} i \mathbb{P}_{|C}(Z = i)$$
   Le résultat de la question précédente garantit que l'espérance conditionnelle vérifie toutes les propriétés de l'espérance.
5. Si l'on suit l'argument du TD n°6 selon lequel l'arbre des parties en $p \in [\![1; n-1]\!]$ manches gagnantes est inclus dans celui en n manches gagnantes, qu'est-on en droit d'attendre de l'espérance conditionnelle de G_n sachant que le score est x manches à y ?
   Indication : on pourra supposer ici que $x \geqslant y$.
6. Que vaut l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène n manches à 0 ?
7. Calculer l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène $n-1$ manches à 0.
8. Étant donnés deux entiers positifs q et r, on définit $F_{q,r} = \displaystyle\sum_{p=0}^{q} \left(\frac{1}{2}\right)^p \binom{r+p}{r}$.
   - Montrer que $F_{q,r+1} = 2F_{q+1,r} - \dfrac{1}{2^q} \dbinom{q+r+2}{r+1}$.
   - En déduire que $F_{q,r} = 2^{r+1} - \dfrac{1}{2^q} \displaystyle\sum_{p=0}^{r} \binom{q+r+1}{p}$
9. Calculer, pour $k \in [\![1; n]\!]$, l'espérance, que l'on notera $E_{n-k,n}$, de G_n sachant que le premier joueur mène $n-k$ manches à 0.
   Indication : on exprimera $E_{n-k,n}$ à l'aide des coefficients $F_{q,r}$ définis à la question précédente.
10. En déduire une expression simplifiée, pour $n \geqslant 2$, de l'espérance de G_n sachant que le premier joueur mène 1 manche à 0.
    Indication : on demande ici une expression ne faisant intervenir ni les coefficients $F_{q,r}$, ni signe $\sum$.
11. Et un peu de Python ! En utilisant le module `random`, écrire un code permettant de simuler cette expérience aléatoire et de vérifier les expressions obtenues pour $E_{n-1,n}$ et $E_{1,n}$.
12. Pascal affirme (ici : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k69975r/f212.image) que, pour $k \in [\![1; n]\!]$ fixé, $E_{k,n} - E_{k-1,n}$ ***décroît quand n croît*** pour les valeurs de k comprises entre 1 et 3, mais ***croît quand n croît*** pour les autres valeurs de k.
    Est-ce vrai ?