Semaine 22

Matrices et E.V.

Sujet 1 : Nina Pommier

.

Ex. 22.1 Soient A et B deux matrices carrées symétriques.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Sujet 2 : Angèle Fouilhoux

.

Ex. 22.2 Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+3y; x+y) \end{array} \right.$.
Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B} = ((1;1);(-1;1))$.

Sujet 3 : Théo Guillemaut

.

Ex. 22.3 Trouver le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pourra commencer par les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Sujet 4 : Exos supplémentaires

Ex. 22.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de A et donner une base de son image et de son noyau.

Ex. 22.5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ avec $p \neq n$. Montrer que l'un au moins des deux produits AB ou BA est non inversible.

Ex. 22.6 Soit A une matrice carrée telle que A^2 soit inversible. A est-elle inversible ?

Ex. 22.7 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(x) & \mathrm{sh}(x) \\ \mathrm{sh}(x) & \mathrm{ch}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
Cette formule se généralise-t-elle à $n \in \mathbb{Z}$?