Semaine 17

Suites récurrentes, dénombrement

Sujet 1 : Raphaël Etaix

.

Ex. 17.1 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Pour quelle valeur de u_0 u est-elle convergente ?
Calculer la limite de la suite lorsqu'elle existe suivant la valeur de u_0.

Sujet 2 : Amine Barouri

.

Ex. 17.2 Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sqrt{4 - 3u_n}$.

1) On suppose que $u_0 = 1$. Que peut-on dire de la suite u ?
2) On suppose que $u_0 \neq 1$. Montrer que la suite n'est pas définie à partir d'un certain rang.

Sujet 3 : Florian Guette

.

Ex. 17.3 Soit u définie par $u_0 \in \left]0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - u_n^2$.
Étudier la suite u, notamment sa convergence.

Sujet 4 : Exos supplémentaires

Ex. 17.4 Soit $r \in \mathbb{K}^*$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pose $R = r + \dfrac{1}{r}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = r^n + \dfrac{1}{r^n}$.

1) Montrer que si $R \in \mathbb{N}$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer U_{n+2} en fonction de R, U_n et U_{n+1}.
3) Refaire la question 1) par récurrence double.
4) Montrer que pour tout entier n, $U_n = P_n(R)$ où P_n est un polynôme.
5) Donner un exemple d'***irrationnel (réel)*** r tel que $R = r + \dfrac{1}{r}$ est entier.
   Écrire la propriété de la question 1) pour ce réel.
6) Même question mais on veut r ***complexe non réel*** (et $r \neq \pm i$).

Ex. 17.5 (Cor.) Étant donné $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, combien de chemins du quadrillage $\mathbb{N}^2$ joignent $(0, 0)$ à (n, p) sans aucun pas vers la gauche ou vers le bas ?