Semaine 19

Matrices, suites récurrentes

Sujet 1 : Théo Guillemaut

.

Ex. 19.1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{i,j\in[\![1;n+1]\!]} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On souhaite calculer A^{-1}.

1) Soit $\phi : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P(X+1) \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Montrer que ϕ est bien un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner sa matrice relativement à la base canonique.
2) Montrer que ϕ est un automorphisme et donner pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$ une expression de $\phi^{-1}(P)$.
3) Déduire des questions précédentes que A est inversible, donner A^{-1}.
4) Donner A^p pour $p \in \mathbb{N}$ puis pour $p \in \mathbb{Z}$.

Sujet 2 : Nina Pommier

.

Ex. 19.2 Soient $u = (0;1;2)$, $v = (1;2;0)$ et $w = (1;0;-4)$.

1) La famille $(u;v;w)$ est-elle libre ? liée ?
2) La famille $(u;v;w)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Sujet 3 : Jérémi Roudil

.

Ex. 19.3 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+y;x-y) \end{cases}$.
Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B} = ((2;1);(1;2))$.

Sujet 4 : Exos supplémentaires

Ex. 19.4 Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
On note M la matrice de ϕ dans $\mathcal{C}$.
Donner une CNS sur M pour que $\phi \circ \phi = 0$.

Ex. 19.5 Soit $\phi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto \phi(P) = P(-X) \in \mathbb{R}_3[X]$.

1) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Montrer que ϕ est un automorphisme.
3) Montrer que ϕ est une symétrie.

Ex. 19.6 Soit $\phi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto \phi(P) = P(0) - P \in \mathbb{R}_3[X]$.

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Calculer $\operatorname{Ker} \phi$.
3) Calculer $\operatorname{rg} \phi$.
4) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
5) Calculer $\operatorname{Im} \phi$.
6) ϕ est-elle surjective ?

Ex. 19.7 Soit $r \in \mathbb{K}^*$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pose $R = r + \dfrac{1}{r}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = r^n + \dfrac{1}{r^n}$.

1) Montrer que si $R \in \mathbb{N}$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer U_{n+2} en fonction de R, U_n et U_{n+1}.
3) Refaire la question 1) par récurrence double.
4) Montrer que pour tout entier n, $U_n = P_n(R)$ où P_n est un polynôme.
5) Donner un exemple d'***irrationnel (réel)*** r tel que $R = r + \dfrac{1}{r}$ est entier.
   Écrire la propriété de la question 1) pour ce réel.
6) Même question mais on veut r ***complexe non réel*** (et $r \neq \pm i$).

Ex. 19.8 Soit $r \in \mathbb{R}$ et u la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + r$.

1) Quel est le comportement de la suite u pour $r = 0$?
2) Quel est le comportement de la suite u pour $r > \frac{1}{4}$?
3) Quel est le comportement de la suite u pour $r < -2$?
4) On suppose maintenant que $r \in \left]0; \frac{1}{4}\right]$. Étudier la suite, notamment son sens de variation et son éventuelle limite.