Semaine 20

Matrices, suites récurrentes

Sujet 1 : Amine Barouri

.

Ex. 20.1 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x-2y;y) \end{cases}$.
Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B} = ((2;-1);(1;1))$.

Sujet 2 : Angèle Fouilhoux

.

Ex. 20.2 Soient $u = (1;3;-2)$, $v = (0;-1;1)$ et $w = (2;7;-5)$.

1) La famille $(u;v;w)$ est-elle libre ? liée ?
2) La famille $(u;v;w)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Sujet 3 : Nicolas Sévellec

.

Ex. 20.3 Soit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x;y) & \mapsto & (x+3y;x+y) \end{cases}$.
Donner la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{B} = ((1;1);(-1;1))$.

Sujet 4 : Exos supplémentaires

Ex. 20.4 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2)$.
2) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(u^2) \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}\,(u)$.

Ex. 20.5 Soit $\phi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto \phi(P) = (P(-1);P(0);P(1)) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Calculer $\mathrm{Ker}\,\phi$.
3) Calculer $\mathrm{rg}\,\phi$.
4) Montrer que ϕ est surjective.

Ex. 20.6

1) Soit $f : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{x-2y}{3}; \dfrac{-4x-y}{3}\right)$.
   Déterminer la nature de f ainsi que ses sous-espaces caractéristiques.
2) Soit $g : (x;y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\dfrac{x+y}{3}; \dfrac{2x+2y}{3}\right)$.
   Déterminer la nature de g ainsi que ses sous-espaces caractéristiques.

Ex. 20.7 Soit $r \in \mathbb{K}^*$ (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On pose $R = r + \dfrac{1}{r}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = r^n + \dfrac{1}{r^n}$.

1) Montrer que si $R \in \mathbb{N}$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathbb{N}$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer U_{n+2} en fonction de R, U_n et U_{n+1}.
3) Refaire la question 1) par récurrence double.
4) Montrer que pour tout entier n, $U_n = P_n(R)$ où P_n est un polynôme.
5) Donner un exemple d'***irrationnel (réel)*** r tel que $R = r + \dfrac{1}{r}$ est entier.
   Écrire la propriété de la question 1) pour ce réel.
6) Même question mais on veut r ***complexe non réel*** (et $r \neq \pm i$).

Ex. 20.8 Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Pour quelle valeur de u_0 u est-elle convergente ?
Calculer la limite de la suite lorsqu'elle existe suivant la valeur de u_0.