Exercices 15.16 et 15.17 du cours

François Coulombeau
coulombeau@gmail.com
Lycée La Fayette, Clermont-Ferrand (63)

17 mars 2020

Ex. 16 (Cor.)
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(-1;2)$?..
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(x;y)$?. ....

Cor. 16 :
$\phi(-1;2) = -\phi(1;0) + 2\phi(0;1) = -\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}; \frac{-\sqrt{3}+2}{2}\right)$
$\phi(x;y) = x\phi(1;0) + y\phi(0;1) = x\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x-y\sqrt{3}}{2}; \frac{x\sqrt{3}+y}{2}\right)$

Ex. 17 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t \end{cases}$.

1) Montrer que ϕ est linéaire.
2) Montrer que $\deg \phi(P) = \deg P$.
3) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4) On note B_i l'image réciproque par ϕ de X^i.
   Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.
5) Montrer que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
6) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée pour $p \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.

Cor. 17 :

1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et P et Q deux polynômes de E.
   Soient λ, μ deux constantes.
   $\phi(\lambda P + \mu Q) = \displaystyle\int_X^{X+1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t + \mu \int_X^{X+1} Q(t)\mathrm{d}t.$
   Donc $\phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de E, avec $p = \deg(P)$.
   Par linéarité, $\phi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)$. Il suffit donc de démontrer que $\deg(\phi(X^k)) = k$.
   En effet, en supposant ce dernier résultat vérifié, on a alors :
   $\deg\phi(P) = \deg\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\phi(X^k)\right) = p$ car le degré d'une somme est égal au maximum des degrés dans le cas où les termes de la somme sont de degrés distincts.
   Montrons donc que $\forall k \in [\![0; n]\!]\,, \deg(\phi(X^k)) = k$:
   $\phi(X^k) = \displaystyle\int_X^{X+1} t^k\mathrm{d}t = \frac{(X+1)^{k+1} - X^{k+1}}{k+1}.$
   D'où, en utilisant la formule du binôme, $\phi(X^k) = \frac{1}{k+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} k+1 \\ i \end{pmatrix} X^i$ qui est de degré k.

3) ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puisque elle est linéaire et que l'image d'un polynôme de degré inférieur ou égal à n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
   Pour montrer qu'elle est bijective, il suffit donc de montrer qu'elle est injective (propriété 15.52 du cours sur la caractérisation des isomorphismes en dimension finie).
   Calculons $\operatorname{Ker}\phi$: soit P un polynôme tel que $\phi(P) = 0$. On a alors $\deg\phi(P) = -\infty = \deg(P)$ donc $P = 0$.
   Donc $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, ϕ est un endomorphisme injectif, donc bijectif : c'est un automorphisme.

4) On cherche B_0 tel que $\phi(B_0) = 1$. Notamment, B_0 est de degré 0 (d'après la question 2).
   $\phi(a) = aX + a - aX = a$ donc $B_0 = 1$.
   On utilise le même raisonnement pour calculer les autres polynômes :
   $\phi(aX + b) = a\dfrac{X^2 + 2X + 1 - X^2}{2} + b = aX + \dfrac{a + 2b}{2} = X.$
   Donc $B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.
   $\phi(aX^2 + bX + c) = a\dfrac{X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3}{3} + bX + \dfrac{b + 2c}{2}$
   $\phi(aX^2 + bX + c) = aX^2 + (a+b)X + \dfrac{2a + 3b + 6c}{6} = X^2.$
   Donc $B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6}$.
   Enfin,
   $\phi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = a\dfrac{X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 - X^4}{4} + bX^2 + (b+c)X + \dfrac{2b + 3c + 6d}{6}$
   $\phi(aX^3 + bX^2 + cX + d) = aX^3 + \dfrac{3a + 2b}{2}X^2 + (a + b + c)X + \dfrac{3a + 4b + 6c + 12d}{12} = X^3.$
   Donc $B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X$ après calcul.

5) C'est probablement la question la plus difficile : soit $i \in [\![0;n]\!]$ et Q_i un polynôme primitif de B_i, autrement dit Q_i tel que $Q_i' = B_i$.
   On sait que $\phi(B_i) = X^i$ par définition des polynômes B_i.
   Or $\phi(B_i) = Q_i(X+1) - Q_i(X)$ par définition de ϕ.
   Donc, $Q_i(X+1) - Q_i(X) = X^i$ et en dérivant, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} 3k^2 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{p} B_3(k+1) - B_3(k) = \frac{B_3(p+1) - B_3(1)}{3}$ par télescopage.
   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p^3 - \frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}p - 0}{3} = \frac{p\,(2p^2 - 3p + 1)}{6} = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.