Ex. 17.18 (Cor.) Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x^2}} \end{array} \right.$.

1) Montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0.
2) Montrer que ce prolongement $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

V. Suites récurrentes

V.1. Rappels

Étude des suites récurrentes

Soit $u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite définie par récurrence associée à une fonction f réelle de la variable réelle.

Nous avons vu dans le chapitre 8 sur les suites, le chapitre 14 sur la continuité et le TD 6 sur les suites récurrentes les résultats suivants :

- Pour que l'existence de la suite u soit garantie il faut montrer que u_0 appartient à un ***intervalle** I **stable par** f* c'est-à-dire tel que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
  On considère donc dans ce qui suit que $f : I \to I$.
- Si f est ***croissante*** sur I alors u est ***monotone***. Plus précisément :
  - ⋆ si $u_1 \geqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \geqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est croissante*** ;
  - ⋆ si $u_1 \leqslant u_0$, c'est-à-dire si $g(u_0) = f(u_0) - u_0 \leqslant 0$, et si f est croissante alors u ***est décroissante***.

  On peut conclure à la stricte monotonie de u si f est strictement croissante et si $g(u_0) \neq 0$.
- Si f est ***décroissante*** sur I alors u ***n'est en général pas monotone*** (la seule exception venant de la possibilité que u soit constante).
  Cependant $f \circ f$ est alors croissante et on étudie séparément la monotonie des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite en utilisant le point précédent.
- Si f ***est continue sur*** I et ***si la suite*** u ***converge vers*** l alors l est ***un point fixe de*** f c'est-à-dire vérifie $f(l) = l$.

Ces résultats associés au théorème 8.51 de convergence monotone (ou au théorème de divergence monotone) et au théorème 14.36 (image continue d'un segment) conduisent aux méthodes ci-dessous.

Méthode : Obtention d'intervalles stables, existence de la suite

On étudie la fonction f de sorte à trouver un ou plusieurs intervalles stables par f. Plusieurs cas particuliers peuvent faciliter l'obtention de tels intervalles et l'étude de la suite :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est un intervalle stable par f !
- Si f est croissante, tout segment de la forme $[a; b]$ où a ***et*** b ***sont deux points fixes***

de f tels que $a < b$ est stable par f.
En effet, $\forall x \in [a;b], a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \Rightarrow a \leqslant f(x) \leqslant b$.

- Si f est décroissante, on peut tenter d'appliquer le point précédent à $f \circ f$.
- ***Dans tous les cas, un tableau de variations bien construit et une représentation graphique correcte peuvent aider à déterminer un ou plusieurs intervalles stables par f.***

Méthode : Monotonie *de la suite*

L'étude de f a permis de connaître ses variations.

- Si f est croissante on étudie le signe de $g = f - \mathrm{id}$:
  - ⋆ si g est ***positive sur l'intervalle stable par f considéré***, la suite est croissante ;
  - ⋆ si g est ***négative sur l'intervalle stable par f considéré***, la suite est décroissante.
- Si f est décroissante, on étudie les termes de rangs pairs et impairs de la suite en utilisant le point précédent.

Méthode : Convergence de la suite

L'étude de f et du signe de g a souvent permis à ce stade d'obtenir le ou les points fixes de f (les points où g s'annule sont les points fixes de f). Sinon, on peut penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g pour montrer qu'elle s'annule.
Les points fixes de f sont des candidats possibles pour la limite de la suite si elle converge !
Pour montrer que la suite converge, le théorème de convergence monotone (appliqué à u ou aux suites extraites de rangs pairs et impairs) est souvent utile.
De même, pour montrer qu'elle diverge, on doit avoir à l'esprit le théorème de divergence monotone.

V.2. Vitesse de convergence

L'inégalité des accroissements finis (voir corollaire 17.31) permet de compléter l'étude d'une suite récurrente convergente pour préciser « la vitesse à laquelle elle converge vers sa limite ».
Aucune capacité particulière sur ce point n'est exigée par le programme. Nous l'illustrerons par un exemple.

<u>**Ex.** 17.19</u> (Cor.) Nous avons déjà étudié (exercice 14.22, TD d'informatique) la suite récurrente définie pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ par $u_0 = 1, u_{n+1} = \dfrac{u_n + \frac{r}{u_n}}{2}$ et nous avons montré que

- u est décroissante à partir du rang 1 ;
- u converge vers $\sqrt{r}$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{r} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(u_n - \sqrt{r}\right)^2$.
En déduire que pour $r > 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si u_n est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-k} près alors u_{n+1} est une approximation de $\sqrt{r}$ à 10^{-2k} près.

V.3. Fonctions lipschitziennes

Définition 17.37 (Fonction lipschitzienne)

Soient I un intervalle réel, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall (x; y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Proposition 17.38

Si f est dérivable sur I et si $|f'|$ est majorée par $M \in \mathbb{R}_+$ alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration

C'est un corollaire immédiat de l'inégalité 17.31 des accroissements finis.

Proposition 17.39

Si $I = [a; b]$ est un segment et si $f : I \to I$ est continue et k-lipschitzienne avec $k < 1$ alors f possède un unique point fixe.

Démonstration

Existence : on l'a démontrée en TD. Elle vient de la continuité de f : on considère la fonction $g = f - \mathrm{id}$. g est continue et $g(a) = f(a) - a \geqslant a - a = 0$, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f([a; b]) \subset [a; b]$ par hypothèses.
Donc g s'annule sur $[a; b]$.
Unicité : on la démontre par l'absurde. Supposons que f ait deux points fixes u et v dans $[a; b]$. On aurait alors :
$|f(u) - f(v)| = |u - v| \leqslant k|u - v| < |u - v|$ ce qui est absurde.

Méthode : Utilisation pour les suites récurrentes

Pour une fonction f dérivable sur un segment I stable par f et k-lipschitzienne avec $k < 1$, toute suite récurrente u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers l'unique point fixe de f.