

Produit scalaire et espace euclidien

COMME la notion de vecteur, la notion de produit scalaire arrive tardivement en mathématiques, au tournant des XIX^{ème} et XX^{ème} siècles.

Cependant, nombre de théorèmes de ce chapitre ont une interprétation géométrique simple et étaient connus bien avant l'apparition du produit scalaire. En effet, comme pour les espaces vectoriels, il faut comprendre d'emblée que le principal changement par rapport à la géométrie traditionnelle concerne la nature des objets qui sont considérés comme fondamentaux :

- les notions de **vecteurs et de scalaires**, ainsi que les **opérations** entre eux, sont les objets fondamentaux de la théorie des **espaces vectoriels**. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : points, droites, plans, parallélisme.
- Les notions de **produit scalaire et de norme** sont les notions fondamentales de la théorie des **espaces euclidiens**. Sur ces notions sont construites celles qui étaient le soubassement de la géométrie traditionnelle : **distance, angle et orthogonalité**.

Le principal avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est qu'il se généralise à des objets qui sortaient jusque-là du cadre de la géométrie traditionnelle. Comme nous l'avons vu, $(\mathcal{F}(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes aussi, de même que l'ensemble des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes. L'ensemble des polynômes, l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, l'ensemble des n -uplet, etc... munis des opérations habituelles en sont d'autres exemples.

Comme nous allons le voir, si l'on parvient à définir sur ces espaces vectoriels des produits scalaires, les notions géométriques de distance, d'angle ou d'orthogonalité pourront elle-même y être définies et généralisées.

Dans tout ce qui suit, $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ sont des \mathbb{R} -espaces vectoriels.

I. Programme officiel

Produit scalaire et espaces euclidiens

CONTENU

CAPACITÉS ET COMMENTAIRES

a) Produit scalaire

Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens.	Notations $\langle x, y \rangle$, $(x y)$, $x \cdot y$. Exemples de référence : produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^n , produit scalaire défini par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$. \Leftrightarrow PC, SI : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^3 .
<hr/> b) Norme associée à un produit scalaire <hr/>	
Norme associée à un produit scalaire.	Les étudiants doivent savoir développer $\ u \pm v\ ^2$.
Inégalité de Cauchy-Schwartz et cas d'égalité.	Cas particuliers des exemples de référence.
Séparation, homogénéité, inégalité triangulaire (avec cas d'égalité).	
<hr/> c) Orthogonalité <hr/>	
Vecteurs orthogonaux, Orthogonal d'un sous-espace vectoriel.	
Familles orthogonales, orthonormales/orthonormées.	
Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.	
Théorème de Pythagore.	
Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
<hr/> d) Bases orthonormées d'un espace euclidien <hr/>	
Existence de bases orthonormées.	
Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.	
Expressions de la norme et du produit scalaire dans une base orthonormée.	
<hr/> e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie <hr/>	
Projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace V de dimension finie. Projecteur orthogonal P_V .	Les étudiants doivent savoir déterminer $P_V(x)$ en calculant son expression dans une base orthonormée de V ou en résolvant le système linéaire découlant de $u_i \perp (x - P_V(x))$ pour tous les vecteurs u_i d'une famille génératrice de V .

Inégalité de Bessel : pour tout $x \in E$,

$$\|P_V(x)\| \leq \|x\|$$

$P_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V réalisant le minimum de

$$\{\|x - y\|, y \in V\}$$

La distance de x à V , notée $d(x, V)$, est définie comme étant égale à la valeur de ce minimum.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace V de dimension finie.

En dimension finie, dimension de V^\perp .

II. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

II.1. Produit scalaire



Définition 22.1 (Produit scalaire)

On dit qu'une application $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes :

- 1) **Symétrie** : $\forall u, v \in E, s(u, v) = s(v, u)$.
- 2) **Bilinéarité** : $\forall u, v, w \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
 - $s(\lambda u + \mu v, w) = \lambda s(u, w) + \mu s(v, w)$;
 - $s(w, \lambda u + \mu v) = \lambda s(w, u) + \mu s(w, v)$.
- 3) **Définition** : $\forall u \in E, s(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
- 4) **Positivité** : $\forall u \in E, s(u, u) \geq 0$.

En résumé, un produit scalaire sur E est donc une **forme bilinéaire symétrique définie positive**.



Notation

Plusieurs notations sont utilisées pour un produit scalaire :

$$s(u, v) = (u|v) = \langle u, v \rangle = u \cdot v$$

La notation utilisée dans ce chapitre sera le plus souvent $(u|v)$.



Remarques

- Un produit scalaire étant **symétrique**, il suffit, après avoir démontré cette symétrie, de vérifier qu'il est linéaire à droite ou à gauche pour démontrer qu'il est bilinéaire. En pratique, on vérifiera donc d'abord la symétrie avant de vérifier la linéarité (à droite ou à gauche) dans les exercices visant à exhiber un produit scalaire sur un

espace vectoriel donné.

- Il arrive que l'on définisse plusieurs produits scalaires sur un même espace vectoriel. Cette possibilité ne sera que peu utilisée dans ce chapitre mais sera très utilisée en seconde année pour démontrer par exemple une propriété fondamentale des matrices symétriques réelles.

Ex. 22.1 (Cor.) Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{B} = (i; j)$ et $\mathcal{B}' = (i'; j')$ deux bases de E .

- 1) Pour $(u, v) \in E^2$, on note $u = x_1i + y_1j$, $v = x_2i + y_2j$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans \mathcal{B} .
Montrer que l'application qui à tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$ associe $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2$ est un produit scalaire sur E .
- 2) Montrer qu'il en est de même de l'application $\langle u, v \rangle = x'_1x'_2 + y'_1y'_2$, $x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 \in \mathbb{R}$ étant les coordonnées de u et v dans \mathcal{B}' .
- 3) Que valent $(i|j)$ et $\langle i', j' \rangle$?
- 4) On donne $i' = 2i + j$ et $j' = i - 2j$.
Calculer $(i'|i')$, $(i'|j')$ et $(j'|j')$ puis exprimer pour $u, v \in E$ $\langle u, v \rangle$ en fonction de $(u|v)$.

II.2. Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens



Définition 22.2 (Espace préhilbertien réel)

On appelle *espace préhilbertien réel* tout \mathbb{R} -*espace vectoriel muni d'un produit scalaire*.



Définition 22.3 (Espace euclidien)

On appelle *espace euclidien* tout \mathbb{R} -espace vectoriel *de dimension finie* muni d'un produit scalaire.

II.3. Exemples de référence

a) Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n



Définition 22.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *produit scalaire canonique* sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n l'application qui à tout couple $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ associe

$$(u|v) = \sum_{k=1}^n u_k v_k$$

Ex. 22.2 (Cor.) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n est bien un produit scalaire.