b) Produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$

Ex. 22.3 (Cor.) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (avec $a < b$) et h une fonction continue et strictement positive sur $[a;b]$.
Montrer que l'application qui à deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ associe

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)h(t)\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Définition 22.5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
On appelle ***produit scalaire canonique*** sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$ l'application qui à tout couple $(u,v) \in \left(\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})\right)^2$ associe

$$(u|v) = \int_a^b u(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Ex. 22.4 (Cor.) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on donne les polynômes $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = 3X^2 - 1$ et $P_3 = 5X^3 - 3X$.

1) Calculer pour $i, j \in [\![0;3]\!]$, $(P_i|P_j) = \displaystyle\int_{-1}^1 P_i(t)P_j(t)\mathrm{d}t$.

2) En déduire les coordonnées de $Q = X^3 + X^2 - X + 2$ dans la base $\mathcal{B} = (P_0; P_1; P_2; P_3)$.

Remarque : ces polynômes sont appelés ***polynômes de Legendre***.

III. Norme associée à un produit scalaire

III.1. Définition

Définition 22.6 (Norme sur un espace préhilbertien réel)

On appelle ***norme associée à un produit scalaire*** $(\cdot|\cdot)$ sur un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien E l'application définie par

$$N : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto & N(u) = \sqrt{(u|u)} \end{cases}$$

Notation

La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

Ex. 22.5 (Cor.) Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

1) Écrire $\|u \pm v\|^2$ en fonction de $\|u\|$, $\|v\|$ et $(u|v)$.

2) En déduire trois expressions de $(u|v)$ ne faisant intervenir que $\|u \pm v\|$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

Remarques

- La positivité du produit scalaire garantit l'existence de la norme.
- La définition du produit scalaire implique que $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

III.2. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 22.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a

$$|(u|v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

De plus, il n'y a égalité que si les vecteurs u et v sont colinéaires.

Démonstration

Considérons la fonction $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \|u + \lambda v\|^2$.
$f(\lambda) = \|u\|^2 + 2\lambda\,(u|v) + \lambda^2\,\|v\|^2 \geqslant 0$ quel que soit la valeur de λ (puisque le carré d'une norme est toujours positif).
Le discriminant de ce polynôme du second degré en λ est donc négatif.
$\Delta = 4\,(u|v)^2 - 4\,\|u\|^2\,\|v\|^2 \leqslant 0$.
D'où l'on tire l'inégalité annoncée.
De plus, si $f(\lambda) = 0$, alors $\Delta = 0$ (l'équation possède une solution) et, ou bien $\|v\| = 0$ et u et v sont colinéaires, ou bien $\|v\| \neq 0$ et $f(\lambda_0) = 0$ pour $\lambda_0 = \dfrac{-\,(u|v)}{\|v\|^2}$.
On a donc $u + \lambda_0 v = 0$ donc u et v sont encore colinéaires.

Ex. 22.6 (Cor.) Écrire la définition de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les produits scalaires canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{R})$.