Maths - Chapitre 19

# Probabilités

La théorie des probabilités naît dans un premier temps d'une réponse que **Galilée**[1] donne à une question du Prince de Toscane : « Lorsqu'on lance 3 dés et qu'on additionne les résultats, il y a 6 manières d'obtenir 9 et 6 manières d'obtenir 10. Pourquoi alors leur somme est plus souvent égale à 10 qu'à 9 ? »

FIGURE 19.1 – Décompositions de 9 et 10 en sommes de 3 dés.

$$9=\begin{cases}1+2+6\\1+3+5\\1+4+4\\2+2+5\\2+3+4\\3+3+3\end{cases}\qquad 10=\begin{cases}1+3+6\\1+4+5\\2+2+6\\2+3+5\\2+4+4\\3+3+4\end{cases}$$

On considère cependant que le véritable point de départ de la théorie des probabilités est la correspondance entre **Blaise Pascal** (voir note 1 page 44) et **Pierre de Fermat**[2]au XVII$^{\text{ème}}$ siècle. Elle se développe ensuite progressivement autour des travaux de **Christian Huyghens**[3], **Pierre-Siméon de Laplace**[4], etc...

Mais ce n'est qu'au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle que la théorie des probabilités prend sa forme moderne grâce au livre *Fondements de la théorie des probabilités* d'**Andreï Kolmogorov**[5].

Ce chapitre a pour but d'introduire le vocabulaire de base de l'axiomatique de Kolmogorov et de l'utiliser pour la modélisation et la résolution de problèmes simples issus d'***expériences aléatoires*** qui n'ont qu'un nombre ***fini d'issues possibles***. Les notions et résultats du chapitre 16 doivent être ***révisés et maîtrisés***.

1. **Galilée**(1564 ;1662), italien, est considéré comme le fondateur de la physique moderne. Il invente la lunette astronomique et, en étudiant le mouvement des planètes du système solaire, en vient à soutenir la thèse de Copernic que la Terre tourne autour du Soleil. Il découvre le ***principe de Galilée*** et à ce titre est l'un des précurseurs qui permettront à **Newton** (voir note 2 page 45) de jeter les bases de la mécanique des solides et des lois de la gravitation. Il a aussi contribué au progrès des mathématiques, notamment en géométrie.
2. **Pierre de Fermat**(∼1600 ;1665), mathématicien et physicien français ayant notamment contribuer avec Pascal à la fondation du calcul des probabilités. Il s'intéressa aussi à l'optique et surtout à l'arithmétique, domaine dans lequel il excellait.
3. **Christian Huyghens**(1629 ;1695), mathématicien et physicien néerlandais. Il découvre notamment le principe de conservation de l'énergie cinétique, la nature ondulatoire de la lumière et publie en mathématiques le premier traité consacré à la théorie des probabilités.
4. **Pierre-Siméon de Laplace**(1749 ;1827), mathématicien et physicien français. On lui doit notamment un traité *Essai philosophique sur les probabilités* qui fera référence pendant un siècle, des travaux sur les polynômes et les équations polynomiales, et plusieurs contributions majeures pour la résolution d'équations différentielles
5. **Andreï Kolmogorov**(1903 ;1987), mathématicien russe dont l'œuvre est considérable. En dehors des probabilités dont il développe l'axiomatisation moderne, il apporte notamment des contributions majeures à l'étude des ***systèmes dynamiques***, c'est-à-dire - en simplifiant un peu - à l'étude des suites récurrentes de nombres complexes.

Enfin, concernant les notions d'expérience aléatoire et de probabilité que nous étudierons et manipulerons tout au long du chapitre, elles seront essentiellement fondées sur notre seule intuition. Précisons simplement que :

- il revient au même de dire que « ***j'ai*** 1 ***chance sur*** 19 068 840 ***de gagner au loto*** » ou de dire « ***ma probabilité de gagner au loto est de*** $\dfrac{1}{19\ 068\ 840}$ » ;
- par conséquent, la probabilité d'un événement est un nombre (réel) compris entre 0 et 1, et dans le cas fini le calcul d'une probabilité revient souvent à dénombrer deux ensembles ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 0, cet événement a une ***très faible de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire ;
- si la probabilité d'un événement est ***très proche de*** 1, cet événement a une ***très forte de chance de se produire*** lors d'une unique expérience aléatoire.

# I. Programme officiel

## Probabilités

| CONTENU | CAPACITÉS ET COMMENTAIRES |
|---|---|
| A - Généralités<br>a) Expériences aléatoires et univers | |
| L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé ***univers***.<br>Événement, événement élémentaire (singleton),événement contraire, événement « $A$ **ou** $B$ », événement « $A$ **et** $B$ », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements. | On se limite au cas où l'univers est fini. |
| b) Espace probabilisé fini | |
| Une probabilité sur un univers fini $\Omega$ est une application $P$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$, et pour toutes parties disjointes $A$ et $B$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.<br>Détermination d'une probabilité par les images des singletons.<br>Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).<br>Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance. | Un espace probabilisé fini est un couple $(\Omega, P)$ où $\Omega$ est un univers fini et $P$ une probabilité sur $\Omega$. |
| c) Probabilité conditionnelle | |

| | |
|---|---|
| Pour deux événements $A$ et $B$ tels que $P(B) > 0$, probabilité conditionnelle de $A$ sachant $B$. | Notations $P_B(A), P(A\|B)$. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique. |
| L'application $P_B$ définit une probabilité sur $\Omega$. | |
| Formule des probabilités composées. | |
| Formule des probabilités totales. | |
| Formules de Bayes. | On donnera plusieurs utilisations issues de la vie courante. |
| d) Événements indépendants | |
| Couple d'événements indépendants. | Si $P(B) > 0$, l'indépendance de $A$ et $B$ équivaut à $P(A\|B) = P(A)$. |
| Famille finie d'événements mutuellement indépendants. | L'indépendance des $A_i$ deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$. |

## II. Univers et événements

### II.1. Univers

#### Définition 19.1 (Univers)

Étant donnée une expérience aléatoire on appelle :

- ***issues*** ou ***réalisations*** les ***résultats possibles*** de cette expérience aléatoire ;
- ***univers*** ou ***univers des possibles*** l'ensemble des tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.

#### Notation

Généralement, on note $\Omega$ l'univers.

**Ex.** 19.1 (Cor.)

1) On lance une pièce de monnaie et on observe sur quelle face elle tombe.
   Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?
2) Même question lorsqu'on lance un dé à 6 faces.
3) Même question lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces.

#### Remarque

On se limitera dans ce chapitre au cas où $\Omega$ est un ensemble fini conformément au programme. On peut cependant facilement imaginer des expériences aléatoires pour lesquelles l'univers est infini. Par exemple, dans une chaine de production d'écrous, on tire aléatoirement un écrou pour vérifier si son diamètre et son pas de vis sont bien conformes aux spécifications imposées.

L'univers est ici l'ensemble des diamètres possibles pour l'écrou, et il s'agit à priori d'une partie infinie de $\mathbb{R}_+^*$.

Dans tout ce qui suit, on se donne une expérience aléatoire avec un univers $\Omega$ fini.

## II.2. Événement

### Définition 19.2 (Événement)

On appelle ***événement*** toute partie de $\Omega$.

On appelle ***événement élémentaire*** ou ***singleton*** tout événement ***avec un unique élément***.

Lorsqu'on effectue l'expérience aléatoire, on dit qu'un événement $A$ ***se produit*** si l'issue de l'expérience aléatoire ***appartient à*** $A$.

### Remarque

Un événement est par définition une partie de $\Omega$ donc un ***élément*** de $\mathcal{P}(\Omega)$.

**Ex.** 19.2 (Cor.) On lance un dé à 6 faces. Expliciter les événements suivants et dire s'ils sont élémentaires ou non :

1) $A$ :« le résultat du lancer est pair ».
2) $B$ :« le résultat du lancer est inférieur ou égal à 2 ».
3) $C = A \cap B$.

### Définition 19.3 (Événement contraire)

Étant donné un événement $A$, on appelle ***événement contraire de*** $A$ le complémentaire de $A$ dans $\Omega$.

Autrement dit, l'événement contraire de $A$ est ***celui qui se produit si et seulement si*** $A$ ***ne se produit pas***.

### Notation

On note $\overline{A}$ l'événement contraire de $A$.

**Ex.** 19.3 (Cor.) Quels sont les événements contraires des événements $A$, $B$ et $C$ de l'exercice précédent ?

## II.3. Conjonction, disjonction d'événements

### Définition 19.4 (Conjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** $A$ **et** $B$ ou encore ***conjonction des événements*** $A, B$ l'événement $A \cap B$.

Autrement dit, l'événement $A$ **et** $B$ est ***celui qui se produit si et seulement si*** $A$ ***et*** $B$ ***se produisent*** (en même temps).

### Définition 19.5 (Disjonction d'événements)

Étant donnés deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***événement*** $A$ **ou** $B$ ou encore ***disjonction des événements*** $A, B$ l'événement $A \cup B$.
Autrement dit, l'événement $A$ **ou** $B$ est ***celui qui se produit si et seulement si l'un ou l'autre des deux événements*** $A, B$ ***se produit***.

**Ex.** 19.4 (Cor.) Que vaut l'événement $A$ **et** $B$ de l'exercice 19.2 ?

## II.4. Événement impossible, événements incompatible

### Définition 19.6 (Événement impossible)

On dit qu'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est ***impossible*** si $A = \emptyset$.

### Définition 19.7 (Événements incompatibles)

On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont ***incompatibles*** si $A$ **et** $B$ est impossible.
Autrement dit, deux événements $A, B$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

**Ex.** 19.5 (Cor.) On lance deux dés à 6 faces et on note $\Omega$ l'ensemble des issues possibles. Expliciter les événements suivants (pour les quatre premiers, on les donnera en extension) :

1) $A$ : « la somme des deux dés est paire ».
2) $B$ : « chacun des dés est pair ».
3) $C$ : « chacun des dés est impair ».
4) $D = \overline{A}$ : « la somme des deux dés est impaire ».
5) $E = A \cap B$.
6) $F = D \cap \overline{C}$.
7) $G = \overline{B} \cap \overline{C}$.
8) $H = G \cap A$.

## II.5. Système complet d'événements

### Définition 19.8

On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de $n \in \mathbb{N}^*$ événements forme un ***système complet d'événements*** si c'est une ***partition*** de $\Omega$.
Autrement dit, une famille $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'événements si $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ et si les événements de la famille sont ***deux à deux*** incompatibles.

**Ex.** 19.6 (Cor.) Montrer que la famille $(B, C, G)$ de l'exercice 19.5 forme un système complet d'événements.

# III. Espaces probabilisés

## III.1. Probabilité

### Définition 19.9 (Probabilité)

On appelle ***probabilité sur un univers*** $\Omega$ toute ***application*** $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ vérifiant les propriétés :

1) $P(\Omega) = 1$ ;
2) pour tout couple $(A;B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ d'événements ***incompatibles***,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Autrement dit, la seconde propriété s'écrit

$$\forall (A;B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

### Définition 19.10 (Espace probabilisé)

On appelle ***espace probabilisé*** $(\Omega, P)$ la donnée d'un univers et d'une probabilité définie sur cet univers.

### Définition 19.11 (Probabilité d'un événement)

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. On appelle ***probabilité d'un événement*** $A \subset \Omega$ le réel $P(A) \in [0;1]$.

**Propriété 19.12**

Soient $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ une famille d'événements ***deux à deux incompatibles*** de $\mathcal{P}(\Omega)$. Alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i).$$

**Démonstration**

On le démontre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ :
***Initialisation*** : pour $p = 1$, la propriété est évidente puisqu'elle s'écrit $P(A_1) = P(A_1)$.
Pour $p = 2$, c'est une conséquence de la définition d'une probabilité sur $\Omega$.
***Hérédité*** : supposons la propriété vérifiée au rang $p \in \mathbb{N}^*$ et démontrons-la au rang $p+1$.
Soit $(A_i)_{i \in [\![1;p+1]\!]}$ une famille d'événements deux à deux incompatibles de $\mathcal{P}(\Omega)$.
D'une part $\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \cap A_{p+1} = \bigcup_{i=1}^{p} (A_i \cap A_{p+1}) = \emptyset$ car les événements de la famille sont deux à deux incompatibles. Donc $A' = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et $A_{p+1}$ sont deux événements incompatibles.
D'autre part,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i\right) &= P\left(A' \cup A_{p+1}\right) \\ &= P(A') + P(A_{p+1}) \text{ puisque } A' \text{ et } A_{p+1} \text{ sont incompatibles} \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} P\left(A_i\right) \text{ d'après la propriété de récurrence.} \end{aligned}$$

***Conclusion*** : la propriété est initialisée pour $p = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, elle est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**Propriété 19.13**

Étant donné un univers ***fini*** $\Omega = \{\omega_1; ...; \omega_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de donner les images de $n-1$ événements élémentaires de $\Omega$ pour définir une probabilité sur $\Omega$.

**Démonstration**

Supposons connues les valeurs de $P\left(\{\omega_i\}\right)$ pour $i \in [\![1; n-1]\!]$ par exemple.

- D'une part, $P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(\{\omega_i\}\right)$ d'après la propriété précédente, d'autre part $P(\Omega) = 1$ par définition d'une probabilité.
  Donc $P\left(\{\omega_n\}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} P\left(\{\omega_i\}\right)$ est déterminée par la donnée des $P\left(\{\omega_i\}\right)$ pour $i \in [\![1; n-1]\!]$.
- De plus, tout événement est réunion finie des événements élémentaires qui le composent. Donc d'après la propriété précédente la probabilité de tout événement est somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. Or les probabilités des événements élémentaires étant toutes connues, la probabilité de tout événement est connue. De façon plus formelle,

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \exists \{j_1; ...; j_p\} \subset [\![1; n]\!], A = \bigcup_{i=1}^{p}\{\omega_{j_i}\} \text{ et } P\left(A\right) = \sum_{i=1}^{p} P\left(\{\omega_{j_i}\}\right)$$

**Ex.** 19.7 (Cor.) On jette un dé truqué tel que $\forall i \in [\![1; 5]\!]$, $P\big(\{i\}\big) = \frac{1}{7}$.

1) Calculer $P\big(\{6\}\big)$.
2) Calculer $P\big($« l'issue est paire »$\big)$.

## III.2. Hypothèse d'équiprobabilité

### Définition 19.14

Soit $\Omega$ un univers fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que l'on fait ***l'hypothèse d'équiprobabilité*** lorsqu'on munit $\Omega$ de la probabilité $P$ telle que pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, $P\left(\{\omega\}\right) = \frac{1}{n}$.

La probabilité $P$ est alors bien définie puisque les probabilités des événements élémentaires

sont données et que $P(\Omega) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.
La probabilité $P$ ainsi définie est appelée ***probabilité uniforme*** sur $\Omega$ et $(\Omega, P)$ ***espace probabilisé uniforme***.

**Ex.** 19.8 (Cor.) On jette simultanément deux dés non truqués (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse d'équiprobabilité).
Pour chaque entier $i \in [\![2; 12]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à $i$.

**Propriété 19.15**

Soit $A$ un événement. ***Sous l'hypothèse d'équiprobabilité***, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total de cas possibles}}$$

**Démonstration**

Soit $n = \mathrm{Card}(\Omega)$, $p = \mathrm{Card}(A)$ et $a_1, a_2, ..., a_p$ les éléments de $A$. On a alors
$P(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$.

## III.3. Propriétés d'une probabilité

**Lemme 19.16**

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. Quels que soient les événements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est $A$ et

$$P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

**Démonstration**

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$ par définition.
D'une part, $(A \backslash B) \cup (A \cap B) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B) = A \cap \left(\overline{B} \cup B\right) = A$
et d'autre part, $(A \backslash B) \cap (A \cap B) = \left(A \cap \overline{B} \cap B\right) \cap A = \emptyset$.
Donc $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est $A$ et par définition d'une probabilité on a donc $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$ ce qui achève la démonstration.

**Propriété 19.17 (Probabilité de $A$ ou $B$)**

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Démonstration**

$(A \backslash B, A \cap B, B \backslash A)$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles d'après le lemme précédent (le fait que $A \backslash B$ et $B \backslash A$ est évident).
De plus $(A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A) = A \cup (B \backslash A) = A \cup B$ donc

$P(A\cup B)=P(A\backslash B)+P(A\cap B)+P(B\backslash A)=P(A)+P(B\backslash A)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

## Remarque

La démonstration précédente fait apparaître comme résultat intermédiaire que pour toutes parties $A, B$ de $\Omega$, $P(A\cup B)=P(A)+P(B\backslash A)$.
Bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, il est souvent utile.

**Propriété 19.18 (Probabilité de l'événement contraire)**

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{P}(\Omega)$.

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$$

**Démonstration**

D'après la propriété précédente,
$1=P(\Omega)=P\left(\overline{A}\right)+P(A)-P\left(\overline{A}\cap A\right)$ d'où l'on tire immédiatement l'égalité à démontrer.

**Propriété 19.19 (Croissance d'une probabilité)**

Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $A\in\mathcal{P}(\Omega)$. Alors quel que soit $B\in\mathcal{P}(\Omega)$,

$$P\left(A\cup B\right)\geqslant P(A)$$

**Démonstration**

C'est immédiat en utilisant la remarque précédente : $P(A\cup B)=P(A)+P(B\backslash A)\geqslant P(A)$.

**Ex.** 19.9 (Cor.) ***Problème du prince de Toscane***
On jette simultanément trois dés non truqués.
Calculer la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 9 puis la probabilité que la somme des trois dés soit égale à 10.
Comparer les probabilités.
***Indications*** : on pourra se référer au début de chapitre pour les décompositions de 9 et 10 en somme de trois dés et utiliser au besoin les résultats de l'exercice 19.8.