IV. Probabilités conditionnelles

Dans tout ce qui suit, (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

IV.1. Définition

Définition 19.20 (Probabilité de A sachant B)

Soit A, B deux événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(B) > 0$.
On appelle ***probabilité conditionnelle de*** A ***sachant*** B ou plus simplement ***probabilité de*** A ***sachant*** B le quotient

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \in [0;1]$$

Notation

On note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Remarques

- ***L'hypothèse*** $P(B) > 0$ est absolument nécessaire sans quoi le quotient $\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ n'est pas défini.
- Une probabilité étant croissante et $A \cap B$ étant inclus dans B, on a bien comme l'affirme la définition $P_B(A) \leqslant 1$. Il est par ailleurs évident que ce quotient de deux nombres positifs est positif.

Remarques

- Une probabilité conditionnelle s'interprète comme suit : si l'on sait que l'événement B s'est produit, l'univers est réduit à cet événement, notamment $P_B(B) = 1$. Par ailleurs, les issues de A n'appartenant pas à B sont impossibles, donc l'événement A est réduit à $A \cap B$.
  Pour calculer la probabilité d'un événement A sachant que B s'est produit il faut donc :
  - ⋆ se restreindre à l'événement $A \cap B$, les autres issues de A étant impossibles ;
  - ⋆ ramener la probabilité de l'événement ainsi obtenu à la probabilité d'obtenir B, c'est-à-dire effectuer le quotient $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, l'interprétation est encore plus simple : le nombre d'issues favorables est $\text{Card}(A \cap B)$, le nombre total de cas possibles est $\text{Card}\, B$ donc

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\, B} = \frac{\frac{\text{Card}(A\cap B)}{n}}{\frac{\text{Card}(B)}{n}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ex. 19.10 (Cor.) On jette deux dés non truqués.
Pour chaque entier $i \in [\![6;8]\!]$, calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à i sachant que l'un des deux dés au moins a donné un résultat pair.

Propriété 19.21

Étant donné un événement B de $\mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$, l'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0;1]$ est une probabilité sur Ω.

Démonstration

- $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$
- Soient C et D deux événements incompatibles :
  $P_B(C \cup D) = \dfrac{P((C \cup D) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((C \cap B) \cup (D \cap B))}{P(B)}.$
  Or $(C \cap B) \cap (D \cap B) = (C \cap D) \cap B = \emptyset$ car C et D sont incompatibles.
  Donc $C \cap B$ et $D \cap B$ sont incompatibles. D'où
  $P_B(C \cup D) = \dfrac{P(C \cap B) + P(D \cap B)}{P(B)} = P_B(C) + P_B(D).$

Remarque

P_B étant une probabilité sur Ω, elle possède notamment toutes les propriétés de la section III.3.

IV.2. Formule des probabilités totales

Théorème 19.22 (Formule des probabilités totales)

Étant donné un système complet d'événements $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ tel que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $P(A_i) > 0$, on a pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i) P(B|A_i)$$

Démonstration

$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i)\frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \sum_{i=1}^{p} P(B \cap A_i).$

Il s'agit donc de montrer que pour un système complet d'événements $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$,

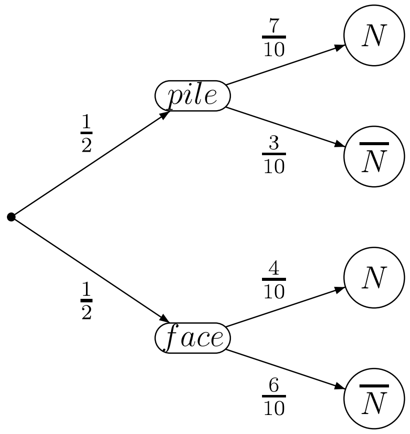
$P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(B \cap A_i).$

Montrons que les événements $B \cap A_i$ et $B \cap A_j$ sont incompatibles deux à deux pour $i \neq j$:
$(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = \emptyset$ car la famille $(A_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ est un système complet d'événements.

Donc d'après la propriété 19.12, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(B \cap A_i) = P\left(\bigcup_{i=1}^{p} B \cap A_i\right) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)\right) = P(B).$

Méthode

La formule des probabilités totales est utile lorsque plusieurs expériences aléatoires successives sont effectuées.
Imaginons la situation suivante : deux sacs numérotés contiennent pour le premier 7 boules noires et 3 boules rouges, pour le second 4 boules noires et 6 boules rouges. On tire à pile ou face, si la pièce tombe sur Pile, on tire une boule dans le premier sac, sinon on tire une boule dans le second sac.
Le schéma ci-contre représente l'enchaînement de ces deux expériences aléatoires.
On cherche à calculer la probabilité de tirer une boule noire et on note N l'événement correspondant. La formule des probabilités totales donne



$$\begin{aligned} P(N) &= P(pile)P(N|pile) + P(face)P(N|face) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{10} \\ &= \frac{11}{20} \end{aligned}$$

Ex. 19.11 (Cor.) Dans un lycée comptant 51% de filles, 12% des filles et 15% des garçons sont en classes préparatoires.
Quelle est la probabilité qu'un élève choisi au hasard soit en classes préparatoires ?

Ex. 19.12 (Cor.) On place dans un sac 3 boules noires et 7 boules rouges. On effectue trois tirages aléatoires successifs d'une boule dans le sac.

1) Calculer la probabilité de tirer trois boules noires en supposant que l'***on remet la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage avec remise***).
2) Même question en supposant que l'***on ne remet pas la boule tirée dans le sac*** après chacun des tirages (***tirage sans remise***).

IV.3. Formule des probabilités composées

Théorème 19.23 (Formule des probabilités composées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille d'événements telle que $\forall i \in [\![1;n-1]\!]$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$.
On a alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \text{...}$$

Démonstration

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- ***Initialisation*** : la formule s'écrit $P(A_1) = P(A_1|\Omega) = P(A_1)$.

- ***Hérédité*** : supposons la formule vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

  Soit $(A_i)_{i \in [\![1;n+1]\!]}$ une famille d'événements telle que $\forall i \in [\![1;n]\!]\,, P\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k\right) > 0$.

  $P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left[\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right] \cap A_{n+1}\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) P\left(A_{n+1} \middle| \bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ par définition d'une probabilité conditionnelle.

  L'hypothèse de récurrence permet de conclure.
- ***Conclusion*** : la propriété est vraie au rang $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque

Pour que la formule soit valide, on pose que l'intersection d'une famille vide est Ω. Ceci est cohérent avec les conventions identiques prises pour la somme d'une famille vide ou le produit d'une famille vide.

En effet, dans tous les cas, la convention est de choisir comme résultat d'une opération appliquée à une famille vide l'élément neutre de l'opération concernée :

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0 \qquad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1 \qquad \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \Omega \qquad \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = ...$$

Notamment on rappelle que $0! = 1$.

Méthode

La formule des probabilités composées permet une généralisation de la formule obtenue dans l'exercice 19.12 pour les tirages sans remise dans le cas où l'on effectue un nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque d'expériences aléatoires successives.

Ex. 19.13 (Cor.) Dans un sac, on place $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et une boule blanche. On effectue n tirages sans remise. Quelle est la probabilité qu'une boule noire reste dans le sac à la fin des tirages ?

V. Formules de Bayes

V.1. Formule de Bayes simple

Théorème 19.24 (1re formule de Bayes)

Pour tous événements A, B de probabilité non nulle,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Démonstration

C'est une simple transformation de la définition d'une probabilité conditionnelle :
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)P(A)}{P(A)P(B)} = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$.

Méthode

Lorsqu'une probabilité conditionnelle $P(A|B)$ doit être calculée, ***avant tout calcul***, se demander si $P(B|A)$ n'est pas déjà connue. Dans ce cas, la formule de Bayes simple devrait conduire rapidement au résultat.

Ex. 19.14 (Cor.) Avec les mêmes hypothèses que dans l'exercice 19.11, calculer la probabilité que l'élève choisi au hasard soit une fille sachant qu'il est en classes préparatoires.

V.2. Formule de Bayes généralisée

Théorème 19.25 (Seconde formule de Bayes)

Si $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$, est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle alors

$$\forall i \in [\![1;n]\!]\,, P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Démonstration

C'est une première formule de Bayes où on remplace le dénominateur par $P(B) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)$ d'après la formule des probabilités totales.

Ex. 19.15 (Cor.) Un nouveau test de dépistage d'une maladie rare est trouvé par une équipe médicale.
Pour un individu malade, le test donne un résultat positif avec une probabilité a.
Pour un individu sain il donne un résultat positif avec une probabilité b.
On estime à 1% la probabilité qu'un individu soit atteint par cette maladie.
On dit que le test est ***acceptable*** si 99% des individus testés positifs sont effectivement malades.
Donner une condition sur a, b pour que le test soit acceptable.

VI. Événements indépendants

VI.1. Définition

Définition 19.26 (Couple d'événements indépendants)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et deux événements A et B, on dit qu'ils sont ***indépendants*** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques

- Si $P(B) > 0$, les événements A et B sont indépendants si et seulement si

  $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

  Autrement dit, pour un événement B possible, l'indépendance des événements A et B signifie ***que la connaissance de B ne renseigne en rien sur la probabilité de A***.
- Si $P(B) = 0$, quel que soit l'événement A, les événements A et B sont indépendants.

VI.2. Famille finie d'événements mutuellement indépendants

Définition 19.27 (Indépendance mutuelle)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements mutuellement indépendants*** lorsque

$$\forall J \subset [\![1;n]\!]\,, P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

Définition 19.28 (Indépendance deux à deux)

Étant donnés un espace probabilisé (Ω, P) et une famille finie $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ d'événements, on dit que la famille est composée d'***événements indépendants deux à deux*** lorsque

$$\forall i, j \subset [\![1;n]\!]\,, i \neq j \Rightarrow P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i)P(A_j)$$

Ex. 19.16 (Cor.) Donner un exemple d'espace probabilisé et trois événements A, B, C tels que les événements A, B, C sont indépendants deux à deux mais non mutuellement indépendants.