Maths - Chapitre 18

Matrices

Le but de ce chapitre est de faire le lien entre le calcul matriciel d'une part et les espaces vectoriels et applications linéaires d'autre part. Ce lien sera assuré en particulier par le théorème 15.38. Les chapitres 12, 15, 10 et 11 sont à réviser. Notamment, dans le chapitre 11, le paragraphe II.5. sur le produit matriciel, le paragraphe II.9. sur les propriétés du produit matriciel et le suivant sur les règles qui ne sont plus valables pour ce produit doivent être connus, ainsi que les méthodes sur le calcul de l'inverse d'une matrice inversible par exemple.
De même, les paragraphes III., IV. et VI. du chapitre 15 doivent être parfaitement connus.
Dans tout ce qui suit, n et p sont deux entiers naturels non nuls, E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p et $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps - pour nous $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Matrices et déterminants

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (espaces vectoriels et applications linéaires) et la représentation numérique (matrices) dans le cadre de la dimension finie. [...] Il est attendu des élèves qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
A - Matrices a) Matrices et applications linéaires	
Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.	Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire. Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.	
b) Noyau, image et rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	

Image et noyau d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Interprétation en termes de systèmes linéaires.
Rang d'une matrice A.	Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes, ou comme le rang de l'endomorphisme canoniquement associé à A, ou comme le nombre de pivots de son échelonnée réduite.
Théorème du rang.	
Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image et de rang.	
Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.	Deux matrices équivalentes par ligne ou par colonne ont même rang.
Rang de la transposée.	Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire est égal au rang de sa matrice.

II. Rappels et compléments

II.1. Matrices diagonales

Définition 18.1 (Centre (hors-programme))

On appelle ***centre*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices M qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non vide puisqu'il contient la matrice identité.

Théorème 18.2

Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathrm{Vect}(I_n)$.

Démonstration hors programme

Soit M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Puisqu'elle commute avec toute les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle commute notamment avec les matrices élémentaires.
En écrivant cela pour les matrices de dilatation, on montre que M est une matrice diagonale.
Puis en l'écrivant pour les matrices de transvection, on montre que tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, donc qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.
Réciproquement, une matrice de cette forme commute avec toute matrice donc appartient au centre.

Remarque

En particulier les matrices diagonales ne commutent pas avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. 18.1 (Cor.) Calculer AB et BA pour :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Propriété 18.3

Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à gauche*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque ligne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de ligne.
Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ***à droite*** par une matrice diagonale D revient à multiplier ***chaque colonne*** de A par le coefficient diagonal de D de même indice de colonne.

II.2. Applications linéaires : rappels

Théorème 15.38 : définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E (qui est donc de dimension finie n) et $\mathcal{F} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille de n vecteurs de l'espace vectoriel F, supposé ici de dimension quelconque, finie ou infinie.

Alors il existe une unique application linéaire $\phi : E \to F$ telle que $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\phi(e_i) = v_i$.

Ex. 18.2 (Cor.) Soit f l'application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ où $\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $(i; j; k)$ vérifiant

$$\begin{array}{rcrcrcr} f(i) & = & 2i & - & 3j & & \\ f(j) & = & 3i & + & j & - & 4k \\ f(k) & = & & & 11j & - & 8k \end{array}$$

Calculer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Théorème 15.52 : caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors ϕ injective $\Leftrightarrow$ ϕ surjective $\Leftrightarrow$ ϕ bijective.

II.3. Matrices et systèmes linéaires : rappels

Soit $\mathcal{S}$ un système de n équations à p inconnues $(x_1; x_2 ...; x_p) \in \mathbb{K}^p$.

Alors il existe deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que

$(x_1; x_2 ...; x_p)$ est solution de $\mathcal{S}$ si et seulement si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ vérifie $AX = B$.

A est appelée matrice associée au système et $(A|B)$ matrice ***augmentée*** associée au système.

Pour résoudre ce système, l'une des méthodes possibles est d'utiliser l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée $(A|B)$ de sorte à obtenir l'unique matrice $(A'|B')$ réduite par lignes équivalente par lignes à $(A|B)$. On a alors :

- le système ne possède aucune solution si et seulement si la matrice $(A'|B')$ possède un pivot dans sa dernière colonne ;
- le système possède une unique solution si et seulement si $(A'|B')$ possède un pivot dans chacune de ses colonnes à l'exception de la dernière. Généralement, ces système ont le même nombre de lignes et d'inconnus, auquel cas $A' = I_n$;
- on appelle inconnues principales celles possédant un pivot dans leur colonne et inconnues secondaires ou paramètres les autres.
  On appelle rang du système le nombre d'inconnues principales.
  Si le système possède des solutions, les inconnues secondaires ***peuvent prendre toute valeur dans*** $\mathbb{K}$ et les inconnues principales sont alors entièrement déterminées par la donnée des valeurs des inconnues secondaires.

II.4. Sous-espaces vectoriels et notion de dimension : synthèse

Il faut connaître tous les espaces vectoriels de référence dont un résumé se trouve dans le chapitre 15, section II.3..

Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

- On peut montrer que
  - ⋆ $F \subset E$;
  - ⋆ $0_E \in F$;
  - ⋆ F est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire

$$\forall (u; v) \in F^2, \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F$$

- On peut montrer que $F = G \cap H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = G + H$ où G et H sont deux sous-espaces vectoriels connus de E.
- On peut montrer que $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille finie de vecteurs de E.
- On peut montrer que $F = \text{Ker}\, u$ où $u \in \mathcal{L}(E, E')$.
- On peut montrer que $F = v(A)$ où $v \in \mathcal{L}(E'', E)$ et A est un sous-espace vectoriel de E''.

Notion de dimension

- On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie ***s'il existe une famille finie génératrice de*** E.
  Dans ce cas, le théorème d'extraction de base garantit que l'on peut extraire de cette famille une sous-famille ***à la fois génératrice et libre*** : E possède donc une base.

- Le lemme fondamental permet alors de montrer que ***toutes les bases d'un même espace vectoriel ont même nombre de vecteurs*** : ce nombre est caractéristique de l'espace vectoriel et s'appelle dimension de l'espace vectoriel.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E et s'ils sont tous les deux de dimension finie alors

$$\dim F \leqslant \dim E$$

De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.
- ***Formule de Grassmann*** : F et G étant deux sous-espaces vectoriels de E (de dimension finie),

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

- Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
  - ⋆ Par définition, $\operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de F.
    Donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim F$.
  - ⋆ L'image par u d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$.
    Donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim E$.
  - ⋆ u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.
    Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim F \leqslant \dim E$.
  - ⋆ ***Théorème du rang*** : $\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E$.
  - ⋆ u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
    Dans ce cas, on a donc $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim E \leqslant \dim F$.
  - ⋆ Une application linéaire bijective est appelée ***isomorphisme*** lorsque $E \neq F$, ou ***automorphisme*** lorsque $E = F$.
    Deux espaces vectoriels sont dits ***isomorphes s'il existe un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.***
  - ⋆ Si E et F sont isomorphes, alors il existe une application linéaire bijective de E dans F : d'après ce qui précède, on a donc
    $\dim E \leqslant \dim F \leqslant \dim E$ c'est-à-dire $\dim E = \dim F$.
  - ⋆ u est bijective si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

Ex. 18.3 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\phi : P \in E \mapsto P(X+1) \in E$.

1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$?
2) Montrer que ϕ est linéaire.
3) Calculer l'image par ϕ de la base canonique de E.
4) Montrer que ϕ est un automorphisme.
5) Calculer $\phi(Q)$ où $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$. En déduire des propriétés des coefficients binomiaux.

III. Les *diverses* interprétations vectorielles des matrices

III.1. Matrice d'un vecteur dans une base

Définition 18.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et u un vecteur de E.
On appelle ***matrice de u dans $\mathcal{B}$*** la matrice

$$(x_i)_{i \leq n} \qquad \text{où} \quad u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est la matrice colonne composée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Ex. 18.4 (Cor.) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $u = (7; 3; -2)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Ex. 18.5 (Cor.) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $P = (X+1)^n$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}_{i \in [\![1; n+1]\!]}.$$

III.2. Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 18.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{S} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de $p \in \mathbb{N}^*$ vecteur(s) de E.
On appelle ***matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$*** la matrice

$$(u_{i,j})_{\substack{i \leq n \\ j \leq p}} \qquad \text{avec } \forall j \in [\![1; p]\!], u_j = \sum_{i=1}^{n} u_{i,j} e_i$$

Autrement dit, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ est la matrice $(U_1 | U_2 | ... | U_p)$ des colonnes U_j composées des coordonnées des u_j dans $\mathcal{B}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ la matrice de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{B}$.
Lorsque la famille $\mathcal{S}$ ne contient qu'un seul vecteur u, la matrice de la famille est celle du vecteur.

Ex. 18.6 (Cor.) Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique et $\mathcal{S} = ((1; 0; 3); (-1; -1; 2))$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Ex. 18.7 (Cor.) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on note $\mathcal{C}$ la base canonique et $\mathcal{F} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{k\in[\![0;n]\!]}$.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \left(\quad \right)_{\substack{i\in[\![1;n+1]\!] \\ j\in[\![1;n+1]\!]}}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}$. En déduire une propriété vérifiée par les colonnes de M.

Important !

La matrice d'une famille $\mathcal{S}$ ***dépend de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle on décompose les vecteurs de $\mathcal{S}$***. Pour cette raison, il ne faut pas oublier de préciser dans quelle base s'effectue la décomposition : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

III.3. Matrice d'une application linéaire

Définition 18.6

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies avec $p = \dim E \in \mathbb{N}^*$ et $n = \dim F \in \mathbb{N}^*$.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.

D'après le théorème 15.38, ***il existe une unique application linéaire*** ϕ telle que

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

On appelle ***matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*** la matrice $(a_{i,j})_{\substack{i\le n \\ j\le p}}$.

Notation

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ la matrice de ϕ relativement à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi(e_1), \phi(e_2), ..., \phi(e_p)) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phi(e_1) & \phi(e_2) & \cdots & \phi(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Ex. 18.8 (Cor.)
Quelle est la matrice associée à $\psi : (x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x+y; -2x+3y) \in \mathbb{R}^2$ relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$?

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\psi) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Quelle est l'application linéaire $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ donnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?
$\chi : (x; y; z) \mapsto$

Ex. 18.9 (Cor.) On reprend l'application $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1)$ de l'exercice 18.3. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.4. Cas particuliers

Notation

Lorsque ϕ est un ***endomorphisme de*** E rapporté à une base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire lorsque $\phi : ... \to ...$, on note plus simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$.

Important !

Il est cependant possible de rapporter un même espace vectoriel E à deux bases différentes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et d'écrire la matrice d'un endomorphisme ϕ de E rapporté à $\mathcal{B}$ pour les vecteurs de départ et à $\mathcal{B}'$ pour leurs images : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ pour $\phi \in \mathcal{L}(E)$. ***Nous verrons même plus loin que cette possibilité offre une excellente interprétation géométrique aux matrices carrées inversibles !***

Définition 18.7

On appelle ***application linéaire canoniquement associée*** à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'application $\phi \in \mathcal{L}(..., ...)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}$ de ... et $\mathcal{B}'$ de ... est A.

Ex. 18.10 (Cor.) Quelle est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

Est-elle injective ? Quel est son rang ?

III.5. Remarques

1) Si on change les bases des ensembles de départ ou d'arrivée d'une application linéaire, la ***matrice associée à l'application linéaire est complètement modifiée !***
2) La matrice de l'application nulle est la matrice nulle quelles que soient les bases des espaces de départ et d'arrivée.
3) ***MAIS***, la matrice de l'application identité $E \to E$ ***n'est la matrice identité que si*** E ***est rapporté à la même base au départ et à l'arrivée !***
   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$ pour $\dim E = n$.

Ex. 18.11 (Cor.) Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$ et les bases $\mathcal{B} = (1; X; X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X(X-1); X(X+1); (X-1)(X+1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
Écrire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi)$.

III.6. Théorème d'isomorphisme

Théorème 18.8 (Admis)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
L'application $\Theta : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \phi & \mapsto & \Theta(\phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Corollaire 18.9

Pour E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n, $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p = \dim E \times \dim F$.

III.7. Image d'un vecteur par une application linéaire

Proposition 18.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n rapportés respectivement aux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$, $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ associée à la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\phi) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $u \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{B}$.
Alors les coordonnées de $\phi(u) \in F$ dans $\mathcal{B}'$ sont les coefficients de MX.

Démonstration

Soit u de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dans E.
Par linéarité, $\phi(u) = \sum_{j=1}^{p} x_j \phi(e_j)$.
Or, par définition, $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$.
Donc $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j \right) f_i$ a pour coordonnées $\left(\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} x_j \right)_{i \in [\![1;n]\!]}$ dans $\mathcal{B}'$.
On reconnaît la définition des coefficients du produit MX, ce qu'il fallait démontrer.

Ex. 18.12 (Cor.) Quelle est l'image du vecteur $(-2;1)$ par l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?