III.3. Propriétés de la norme

Propriété 22.8

Quels que soient les vecteurs u et v d'un $\mathbb{R}$-espace préhilbertien, on a :

- ***Séparation*** : $\|u-v\| = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- ***Homogénéité*** : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| . \|u\|$;
- ***Inégalité triangulaire*** : $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démonstration

Les deux premières propriétés sont évidentes. Démontrons l'inégalité triangulaire.
$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\,(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.
L'inégalité portant sur des carrés de nombres positifs et la fonction carrée étant bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité triangulaire.

Ex. 22.7 (Cor.)

1) Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$ et d'une norme associée notée $\|.\|$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ des vecteurs unitaires de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \|x_i - x_j\| = 1$$

Calculer pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ le produit scalaire $(x_i|x_j)$.

2) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n de terme général $a_{ij} = (x_i|x_j)$.
Montrer que A est inversible et en déduire que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre.

III.4. Complément : angle géométrique entre deux vecteurs

Étant donnés deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel, l'inégalité de Cauchy-Schwarz affirme que

$$-\|u\|\,\|v\| \leqslant (u|v) \leqslant \|u\|\,\|v\|$$

Si u et v sont deux vecteurs non nuls, on a donc

$$-1 \leqslant \frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|} \leqslant 1$$

Ceci permet de donner une définition de l'***angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls*** :

Définition 22.9 (Angle géométrique de deux vecteurs non nuls)

Étant donnés deux vecteurs non nuls u et v d'un espace préhilbertien réel, on appelle ***angle géométrique formé par les vecteurs*** u ***et*** v le nombre

$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{(u|v)}{\|u\|\,\|v\|}\right) \in [0;\pi]$$

Ceci parachève l'objectif que l'on se donnait en introduction du chapitre : nous avons construit toutes les notions élémentaires de la géométrie traditionnelle à l'aide des notions de vecteurs et de produit scalaire.
Ces dernières notions deviennent les notions fondamentales sur lesquelles peut être construite la géométrie traditionnelle.
L'avantage que l'on tire de ce changement de point de vue est double :

- d'une part, il exhibe les ***propriétés algébriques*** (c'est-à-dire opératoires) nécessaires à la construction d'une géométrie ;
- d'autre part, il permet en conséquence de généraliser les notions géométriques à des espaces qui jusque-là sortaient de ce cadre : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$, etc...

IV. Orthogonalité en dimension quelconque

Dans cette section, $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un espace préhilbertien réel.

IV.1. Définitions

Définition 22.10 (Vecteurs orthogonaux)

On dit que deux vecteurs u, v de E sont ***orthogonaux*** si

$$(u|v) = 0$$

Définition 22.11 (Sous-espaces vectoriels orthogonaux)

Étant donnés deux sous-espaces vectoriels G et H de E, on dit qu'ils sont ***orthogonaux*** si ***tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre***.
Autrement dit, G et H sont orthogonaux si

$$\forall u \in G, \forall v \in H, (u|v) = 0$$

Définition 22.12 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Étant donné un sous-espace vectoriel G de E, on appelle ***orthogonal de G*** l'***ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tout vecteur de G***.
Autrement dit, l'orthogonal de G est l'ensemble

$$\{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$$

Notation

Si deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux, on note $u \perp v$.
Si deux sous-espaces vectoriels G et H de E sont orthogonaux, on note $G \perp H$.
L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel G de E est noté $G^\perp = \{v \in E, \forall u \in G, (u|v) = 0\}$.

IV.2. Propriété

Propriété 22.13 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Soit G un sous-espace vectoriel de E. $G^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- $0_E \in G^\perp$: quel que soit $u \in E$, $(0|u) = (u-u|u) = \|u\|^2 - \|u\|^2 = 0$. En particulier, quel que soit $u \in G$, $0_E \perp u$, donc $0_E \in G^\perp$.
- Soient $v, w \in G^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\forall u \in G$, $(\lambda v + w|u) = \lambda\,(v|u) + (w|u) = 0$ donc $\lambda v + w \in G^\perp$.

IV.3. Familles orthogonales, orthonormales

Définition 22.14 (Famille orthogonale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthogonale*** ou une ***famille de vecteurs orthogonaux*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!]\,, i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$$

Remarque

Si $n = 1$, c'est-à-dire si la famille est formée d'un unique vecteur, elle est considérée comme orthogonale.

Définition 22.15 (Famille orthonormale)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** ou une ***famille orthonormée*** ou encore une ***famille de vecteurs orthonormés*** si elle est ***orthogonale*** et que ***tout vecteur est de norme égale à 1***.
Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une ***famille orthonormale*** si

$$\forall i, j \in [\![1;n]\!]\,, (u_i|u_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ex. 22.8 (Cor.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier $k \in [\![0;n]\!]$, $f_k : x \in [-\pi;\pi] \mapsto \cos(kx)$. On note $\mathcal{F} = (f_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ la famille de l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}^0([-\pi;\pi];\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthogonale ?
2) La famille $\mathcal{F}$ est-elle orthonormale ?
   Si ce n'est pas le cas, construire à partir de $\mathcal{F}$ une famille orthonormale.

IV.4. Propriété d'une famille orthogonale

Propriété 22.16 (Liberté d'une famille orthogonale)

Toute famille orthogonale de vecteurs ***non nuls*** est libre.

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale et $(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$.

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \middle| u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i|u_j\right) = \lambda_j \left(u_j|u_j\right)$ par linéarité à gauche du produit scalaire et en utilisant l'hypothèse d'orthogonalité.

Or u_j est non nul, donc $\lambda_j = 0$.

Comme cette propriété est vraie pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $\mathcal{F}$ est une famille libre.