IV.5. Théorèmes de Pythagore

Théorème 22.17 (Théorème de Pythagore : 1ère version)

Soient u et v deux vecteurs de E.
$u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Démonstration

Sens direct : supposons $u \perp v$. Alors
$\|u+v\|^2 = (u+v|u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,(u|v) = \|u\|^2 + \|v\|^2$ car $(u|v) = 0$.
Réciproque : supposons que $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
Alors $2\,(u|v) = \|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$ donc $u \perp v$.

Théorème 22.18 (Théorème de Pythagore : 2ème version)

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthogonale de vecteurs de E.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Démonstration

Supposons que $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ soit une famille orthogonale.

Alors $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (u_i|u_j)$.

Or tous les produits scalaires sont nuls car la famille est orthogonale.

Donc $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$.

NB : dans le cas où $n \geqslant 3$, la réciproque de cette propriété est fausse !

Important ! Réciproque du théorème de Pythagore

La réciproque du théorème de Pythagore n'est valable que dans le cas de la somme de deux vecteurs. Dans le cas de trois vecteurs ou plus, on peut trouver des contre-exemples.

Ex. 22.9 (Cor.) Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on donne les trois vecteurs $u = (1;2)$, $v = (0;2)$ et $w = (0;-1)$.
Que valent $\|u+v+w\|^2$ et $\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$?
La famille (u, v, w) est-elle orthogonale ?
Donner un exemple d'une famille de quatre vecteurs qui vérifie l'identité de Pythagore mais qui n'est pas orthogonale.

IV.6. Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 22.19

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E.

Quel que soit le vecteur v de E, $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille orthonormale de E, $v \in E$ et $v' = v - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\, u_i$.

Soit $w \in \operatorname{Vect}\mathcal{F}$.

$(v'|w) = (v|w) - \sum_{i=1}^{n} (u_i|v)\,(u_i|w)$ par linéarité.

Donc $(v'|w) = \left(v \,\middle|\, w - \sum_{i=1}^{n} (u_i|w)\, u_i \right)$.

Nous allons montrer que $w' = w - \sum_{i=1}^{n} (u_i|w)\, u_i = 0_E$.

En effet, $w \in \operatorname{Vect}\mathcal{F}$ donc $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Or, $\forall j \in [\![1;n]\!]\,, (w|u_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,(u_i|u_j) = \lambda_j$ car la famille est orthonormée.

Donc $w = \sum_{i=1}^{n} (w|u_i)\, u_i$, donc $w' = 0_E$.

Ceci prouve que $(v'|w) = 0$ donc que v' est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Vect}\mathcal{F}$.

Méthode : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le théorème précédent permet de construire à partir d'une famille $\mathcal{F} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ libre de vecteurs non nuls de E une nouvelle famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ orthonormale.

L'algorithme qui en découle est appelé ***procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*** et se décompose comme suit :

- ***Initialisation*** : $v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$ est un vecteur unitaire et forme donc (à lui seul) une famille orthonormale.
- ***Propagation et hérédité*** : pour i allant de 2 à n, on suppose que la famille $\mathcal{F}'_{i-1} = (v_k)_{k\in[\![1;i-1]\!]}$ est orthonormale
  - ⋆ calculer $u'_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} (v_k|u_i)\, v_k$. D'après le théorème précédent u'_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. De plus u'_i est non nul car $\mathcal{F}$ est libre (par l'absurde si l'on n'est pas convaincu).
  - ⋆ Le vecteur $v_i = \dfrac{u'_i}{\|u'_i\|}$ est donc unitaire et orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{F}'_{i-1}$. La

famille $\mathcal{F}'_i = (v_k)_{k\in[\![1;i]\!]}$ est donc orthonormale.

- ***Conclusion*** : à l'arrêt de l'algorithme, la famille $\mathcal{F}' = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ obtenue est orthonormale.

Ex. 22.10 (Cor.)

1) On définit sur $\mathbb{R}_2[X]$ l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2) Même question pour $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
3) Trouver une base orthonormale de E dans les deux cas précédents.