V. Orthogonalité en dimension finie

Dans cette section, $(F, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ***de dimension finie*** $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$.
Il s'agit donc d'un espace euclidien.

V.1. Bases orthonormées

Définition 22.20 (Base orthonormée)

On appelle ***base orthonormée*** ou ***base orthonormale*** d'un espace euclidien F toute famille libre, génératrice et orthonormale de F.

Théorème 22.21 (Existence de bases orthonormées)

Tout espace euclidien F possède au moins une base orthonormée.

Démonstration

F étant de dimension finie, il possède une base $\mathcal{B}$. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une famille $\mathcal{B}'$ orthonormale de même cardinal. Or d'après la propriété 22.16, cette famille est libre, de cardinal égal à la dimension de E, donc c'est une base.

V.2. Coordonnées en base orthonormée

Propriété 22.22 (Propriété fondamentale des espaces euclidiens)

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).
Alors, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ la coordonnée suivant u_i de tout vecteur v de F est

$$x_i = (u_i|v)$$

Démonstration

$\mathcal{B}$ étant une base de F, tout vecteur v se décompose de manière unique sous la forme

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$$

où $(x_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $k \in [\![1;n]\!]$
$(v|u_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \middle| u_k \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (u_i|u_k) = x_k$ car la base est orthonormée.

V.3. Expressions du produit scalaire et de la norme

Propriété 22.23

Soit $\mathcal{B} = (u_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F (euclidien).

Alors quels que soient les vecteurs $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ et $w = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$ on a

- $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$;
- $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Démonstration

$(v|w) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j (u_i|u_j)$.

La base étant orthonormée, $(u_i|u_j) = 0$ si $i \neq j$ et $(u_i|u_j) = 1$ si $i = j$.

Donc $(v|w) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

En utilisant ce résultat pour $w = v$, on obtient immédiatement que

$\|v\|^2 = (v|v) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

V.4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Théorème 22.24

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).

Quel que soit le vecteur $u \in E$, il existe un unique vecteur $v = p_F(u) \in F$ tel que $u - v \in F^{\perp}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{B} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base orthonormée de F.

Analyse : supposons qu'il existe un vecteur v satisfaisant aux hypothèses du théorème et décomposons v dans $\mathcal{B}$: $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $(u|v_i) = (u - v + v|v_i) = (v|v_i) = x_i$.

Si v existe, il est donc unique et $v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$.

Synthèse : soit $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ un vecteur quelconque de F.

$(u - v|w) = \left(u - \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, y_i - \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, y_i = 0$.

Conclusion : le vecteur $v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$ est l'unique vecteur de F tel que $u - v \in F^\perp$.

Définition 22.25 (Projection orthogonale sur un espace euclidien)

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
On appelle ***projection orthogonale*** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
Autrement dit, la projection orthogonale sur F est l'application p_F qui à tout vecteur u de E associe l'unique vecteur v de F tel que $u - v \in F^\perp$.

Corollaire 22.26

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

V.5. Remarque importante

Les théorèmes de la sous-section précédente ne sont valables que pour un sous-espace vectoriel F de ***dimension finie***. L'exercice suivant donne un contre-exemple dans le cas où F est de dimension infinie.

Ex. 22.11

1) Montrer qu'une application continue de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, qui s'annule sur tout intervalle ouvert non vide $I \subset [0;1]$, est l'application nulle.
   Indication : pour une application $f \in \mathcal{F}(E,F)$, ***s'annuler*** et ***être nulle*** ont des significations (très) différentes...
2) Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique et $F = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.
   a) Montrer que $F^\perp = \{x \in [0;1] \mapsto 0\}$.
   b) En déduire que si $f \in E \backslash F$, il n'existe pas de fonction $g \in F$ telle que $f - g \in F^\perp$.
   c) Que vaut $\left(F^\perp\right)^\perp$?

V.6. Propriétés

Propriété 22.27

Soit E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
La projection orthogonale p_F sur F est un projecteur, autrement dit $p_F \circ p_F = p_F$.

Démonstration

La démonstration du théorème 22.24 montre que $\forall u \in E, p_F(u) = v = \sum_{i=1}^{n} (u|v_i)\, v_i$ où (v_i) est

une base orthonormée quelconque de F.
Il suffit de montrer que $p_F(v) = v$.
Or $p_F(v) = \sum_{i=1}^{n} (v|v_i)\, v_i = v$ puisque la base est orthonormée (on retrouve les coordonnées de v en base orthonormée).

Propriété 22.28 (Inégalité de Bessel)

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$,

$$\|p_F(u)\| \leqslant \|u\|$$

Démonstration

Par définition du projeté orthogonal, $p_F(u)$ est l'unique vecteur de F tel que $u - p_F(u) \in F^\perp$.
Donc $\|u\|^2 = \|u - v + v\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v\|^2$ car les vecteurs $u - v$ et v sont orthogonaux.
Donc $\|v\|^2 \leqslant \|u\|^2$ ce qu'il fallait démontrer.

Propriété 22.29

Avec les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le vecteur $u \in E$, $v = p_F(u)$ est l'unique vecteur de F vérifiant

$$\|u - v\| = \min_{w \in F} \|u - w\|$$

Démonstration

Il suffit de montrer que pour tout vecteur $w \in F$ distinct de v, $\|u - v\| < \|u - w\|$.
Soit w un tel vecteur.
$\|u - w\|^2 = \|u - v + v - w\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - w\|^2 + 2\,(u - v|v - w) = \|u - v\|^2 + \|v - w\|^2 > \|u - v\|^2$ car d'une part $u - v \in F^\perp$ et $v - w \in F$ et d'autre part $\|v - w\| > 0$ $(v \neq w)$.

V.7. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace euclidien

Théorème 22.30

Soient E un espace ***préhilbertien réel*** (donc de dimension quelconque) et F un ***sous-espace vectoriel de dimension finie*** de E (donc un espace euclidien).
Alors $F^\perp$ et F sont supplémentaires.

Démonstration

- Soit $u \in F \cap F^\perp$.
  $u \in F$ et $u \in F^\perp$ donc $u \perp u$: $(u|u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$.
  Donc $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
- Soit $u \in E$. Le projeté orthogonal $v = p_F(u)$ appartient à F et $u - v$ appartient à $F^\perp$.
  Donc $u = v + (u - v)$ est somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

Donc $E = F + F^{\perp}$.
Finalement, $E = F \oplus F^{\perp}$: F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Théorème 22.31

Soient E un espace ***euclidien*** de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p de E. Alors $\dim F^{\perp} = n - p$ et $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Démonstration

On suppose que E est un espace ***euclidien*** de dimension n. D'après le théorème précédent, F (de dimension p) et $F^{\perp}$ sont supplémentaires : donc $\dim F^{\perp} = n - p$.
De plus, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n - (n-p) = p$ et $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ (car par définition, tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $F^{\perp}$).
Donc F est un sous-espace vectoriel de $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, de même dimension que lui : $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

VI. Correction des exercices

Cor. 22.1 :

1) ***Symétrie*** : $(u|v) = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = (v|u)$.
   Linéarité à gauche :
   $(\lambda u + \mu v|w) = (\lambda x_1 + \mu x_2)\, x_3 + (\lambda y_1 + \mu y_2)\, y_3 = \lambda\,(x_1x_3 + y_1y_3) + \mu\,(x_2x_3 + y_2y_3)$.
   Donc $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda\,(u|w) + \mu\,(v|w)$.
   Par symétrie, l'application est aussi linéaire à droite donc bilinéaire.
   Définition : soit $u = xi + yj$ tel que $(u|u) = 0$. On a donc $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x = 0\,\textbf{et}\,y = 0) \Leftrightarrow u = 0$.
   Positivité : soit $u = xi + yj$. $(u|u) = x^2 + y^2 \geqslant 0$.
   L'application donnée est donc bien une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire.
2) La démonstration de la question précédente reste valable si l'on décompose les vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$ puisqu'aucune supposition n'a été faite sur la base $\mathcal{B}$.
3) $(i|j) = (i + 0j|0i + j) = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. De même, $\langle i', j' \rangle = 0$.
4) $(i'|i') = (2i + j|2i + j) = 4 + 1 = 5$.
   $(i'|j') = (2i + j|i - 2j) = 2 - 2 = 0$.
   $(j'|j') = (i - 2j|i - 2j) = 1 + 4 = 5$.
   Soient $u = x_1'i' + y_1'j'$ et $v = x_2'i' + y_2'j'$.
   D'une part, $\langle u, v \rangle = x_1'x_2' + y_1'y_2'$.
   D'autre part, $(u|v) = (x_1'i' + y_1'j'|x_2'i' + y_2'j') = x_1'x_2'\,(i'|i') + (x_1'y_2' + y_1'x_2')\,(i'|j') + y_1'y_2'\,(j'|j')$ par linéarité et symétrie.
   Donc $(u|v) = 5\,(x_1'x_2' + y_1'y_2') = 5\langle u, v \rangle$.
   On en déduit que quel que soit $u, v \in E$, $\langle u, v \rangle = \dfrac{(u|v)}{5}$.

Cor. 22.2 :