Maths - Chapitre 20

Séries

La notion de série repose sur l'idée que pour obtenir une approximation d'un nombre (irrationnel par exemple), on peut partir d'une approximation déjà obtenue et lui ajouter un terme suffisamment petit pour obtenir une approximation plus fine. C'est une notion d'une importance fondamentale en mathématiques non seulement à cause de l'importance pratique de la notion d'approximation des nombres irrationnels, mais encore parce qu'elle est une synthèse des notions de suites, de sommes finies et -comme nous le verrons- fait aussi intervenir les notions d'intégrales ou de développements limités.
Dans tout ce qui suit, u, v et w sont des suites réelles ou complexes définies sur une partie $A \subset \mathbb{N}$ et f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Programme officiel

Intégration

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
e) Formule de Taylor avec reste intégral	
Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	

Séries numériques

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Généralités	
Séries à termes réels ou complexes ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : sommes partielles, CNS de convergence, somme en cas de convergence.	
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.	
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.	

Pour f continue et monotone, encadrement des sommes partielles $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique des sommes partielles.
Séries de Riemann	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraîne celle de $\sum u_n$ et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$	Cas où l'inégalité n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang. Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$.	
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.	
La convergence absolue implique la convergence.	Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors-programme.
Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, si de plus $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc converge.	
d) Application au développement décimal d'un nombre réel	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un élément de $[0;1[$.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal propre à partir d'un certain rang.

II. Introduction

II.1. Formules de Taylor

Théorème 20.1 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

On la démontre par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, la formule s'écrit $f(x) = f(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t$.

Or $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0)$ et la formule est donc vraie au rang 0.

Hérédité : supposons la formule de Taylor avec reste intégral vraie au rang n entier donné. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+2}(I)$. L'hypothèse de récurrence nous permet d'écrire, pour f, la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.

On a alors :

$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)n!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$ en intégrant par partie.

Donc $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t$, ce qu'il fallait démontrer.

Ex. 20.1 Écrire ce théorème pour $n = 0$ et $n = 1$

....

....

Théorème 20.2 (Formule de Taylor-Young)

Soit n un entier positif et $f \in \mathcal{C}^{n}(I)$, alors

$$\forall x \in I, f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$$

Démonstration

Pour commencer, une remarque : ce théorème n'est pas un corollaire du théorème précédent puisque ses hypothèses, plus faibles, ne permettent pas d'utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

On le démontre par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, il s'agit de montrer que, si f est continue, alors $f(x) = f(x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(1)$.

Ceci est évident puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ (la fonction étant continue).

Hérédité : supposons que pour n donné, la formule de Taylor-Young soit valide.

Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}(I)$. En particulier, f est dérivable sur I et f' est de classe $\mathcal{C}^{n}(I)$.

On peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence sur f' :

$\forall x \in I, f'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0) + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$

On intègre alors cette formule :

$f(x)-f(x_0)=\displaystyle\int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f'(x_0)(x-x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\int_{x_0}^{x} o_{x_0}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t.$

Montrons que $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t = \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$.

Pour cela, écrivons que $\underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)=(t-x_0)^n\times\alpha(t)$ avec $\displaystyle\lim_{t\to x_0}\alpha(t)=0$ (c'est la définition des « petit o ».

En revenant à la définition de la limite : soit $\epsilon>0$. Il existe $\eta>0$ tel que $|t-x_0|\leqslant\eta\Rightarrow -\epsilon\leqslant\alpha(t)\leqslant\epsilon$.

En intégrant cette relation pour $x\in[x_0-\eta;x_0+\eta]$, on obtient bien $\left|\displaystyle\int_{x_0}^{x}\underset{t\to x_0}{o}\left((t-x_0)^n\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant \epsilon\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}=\underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^{n+1}\right)$.

Remarque

Toutes les formules précédentes peuvent se réécrire en utilisant $h=x-x_0$ à la place de x et le signe $\sum$ à la place des pointillés.

Par exemple, la formule de Taylor avec reste intégral pour $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$ se réécrit :

$$f(x_0+h)=\sum_{p=0}^{n}\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x_0)+\int_0^h\frac{(h-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+t)\mathrm{d}t$$

Réécrire la formule de Taylor-Young de cette façon :

. . . .

II.2. Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 20.3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathcal{C}^{n+1}(I)$.

Si $\exists M\in\mathbb{R}_+,\forall x\in I,\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leqslant M$ (autrement dit $f^{(n+1)}$ est bornée sur I), alors

$$\left|f(x)-f(x_0)-(x-x_0)f'(x_0)-\dots-\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ou encore

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration

D'après la formule de Taylor avec reste intégral (voir théorème 20.1),

$\left|f(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}\left|\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t$ en supposant $x\geqslant x_0$.

Or $\forall t\in I,\left|f^{(n+1)}(t)\right|\leqslant M$, donc

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)\right| \leqslant M\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Le cas où $x < x_0$ se traite de façon similaire en échangeant les bornes d'intégration.

Ex. 20.2 Écrire ce théorème pour $n = 0$

....

....

Quel nom porte ce théorème ? ....

Ex. 20.3 (Cor.) Montrer que $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

II.3. Définition

Définition 20.4 (Série numérique)

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes, on appelle ***série de terme général*** u_n la suite S définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La définition s'étend au cas où le terme général u_n n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$.
Les termes de la suite S sont appelés ***sommes partielles*** de la série.

Notation

On note $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

Définition 20.5 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série $\sum u_n$ ***converge*** si la suite S de ses sommes partielles converge.
Dans le cas contraire, on dit que la série ***diverge***.

Notation

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de la suite S.

Définition 20.6 (Somme et restes d'une série convergente)

Lorsqu'une série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est appelée ***somme de la série***.

La suite R définie par $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appelée suite des ***restes de la série***.