II.5. Série géométrique

Définition 20.9 (Série géométrique)

On appelle ***série géométrique*** toute série dont le terme général est une suite géométrique.

Propriété 20.10 (Rappel)

Si u est une suite géométrique de raison r différente de 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

Si u est une suite géométrique de raison 1 alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0$.

Théorème 20.11 (Convergence d'une série géométrique)

Une série géométrique converge si et seulement si son terme général est nul ou de raison r vérifiant $|r| < 1$.
De plus, si elle est non nulle et convergente, alors sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{u_0}{1-r}$$

Démonstration

Si $u_0 = 0$, il est clair que $S = 0$ converge.
Sinon, si $r = 1$, $S_n = nu_0$ diverge vers $\pm\infty$ suivant le signe de u_0.
Enfin, dans le dernier cas, $\dfrac{S_n}{u_0} = \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$ converge vers $\dfrac{1}{1-r}$ si et seulement si $|r| < 1$.

Méthode

Les séries géométriques ***sont d'une importance primordiale*** !
En voici deux utilisations très fréquentes :

- lorsqu'une série est de la forme $\sum f(n)r^n$, il peut être fructueux de considérer la fonction $S_n : x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \mapsto \sum f(n)x^n$ et de tenter d'exprimer S_n à l'aide de la série géométrique $\sum x^n$ puis d'évaluer S_n pour $x = r$;
- nous verrons une autre utilisation de la comparaison à des séries géométriques -notamment de la majoration d'une série à termes positifs par une série géométrique- au paragraphe III..

Ex. 20.7 (Cor.) Nature (et somme si convergence) de la série $\sum \dfrac{n}{2^n}$.

Même question pour la série $\sum \dfrac{n\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{2^n}$.

II.6. Suites et séries télescopiques

Proposition 20.12

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Démonstration

Il suffit de remarquer que a suite $S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)$ est une somme télescopique qui se simplifie en $S_n = u_{n+1}-u_0$. L'équivalence annoncée est alors évidente.

Méthode : Sommation d'une série en utilisant des sommes télescopiques

Le théorème précédent paraît anodin mais est souvent utilisé pour calculer la valeur de la somme d'une série, notamment lorsque celle-ci a pour terme général une fraction rationnelle. En décomposant cette fraction rationnelle en éléments simples, il apparaît parfois une série télescopique dont la somme peut être calculée.
Nous verrons aussi à l'exercice 20.11 une utilisation directe de cette proposition.

Ex. 20.8 (Cor.) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Ex. 20.9 (Cor.) En utilisant l'exercice précédent, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge et donner un encadrement de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.