Maths - Chapitre 23

Variables aléatoires

Lors d'une expérience aléatoire, il est fréquent que l'on souhaite étudier une ***variable dont la valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire***. De telles variables sont appelées ***variables aléatoires***. L'objet de ce chapitre est d'en décrire leurs principales utilisations et propriétés. Il va de soi que le chapitre 19 sur les probabilités est un pré-requis au présent chapitre, ainsi que le chapitre 16 sur le dénombrement.

Les variables aléatoires peuvent prendre des valeurs diverses, notamment des valeurs non numériques. Par exemple, on peut imaginer un dé ***bien équilibré*** à 6 faces dont une des faces est rouge, deux autres bleues et les trois dernières jaunes. ***L'hypothèse d'équiprobabilité*** (dé bien équilibré) s'écrit - en supposant qu'on a attribué un numéro à chaque face - sur l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ des résultats possibles pour chaque événement élémentaire :

$$\forall i \in [\![1;6]\!], \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$$

La notion de variable aléatoire permet alors de définir de façon simple et efficace ***les événements que l'on cherche à étudier***. Sur l'exemple précédent, on peut par exemple définir la variable aléatoire C donnant la couleur obtenue lors du jet de dé de la façon suivante :

> La variable aléatoire C est la ***fonction*** qui à chaque événement élémentaire associe la couleur de la face obtenue :
>
> $$C : \begin{cases} \Omega = [\![1;6]\!] & \to & \{rouge; bleu; jaune\} \\ \omega = 1 & \mapsto & rouge \\ \omega \in \{2;3\} & \mapsto & bleu \\ \omega \geqslant 4 & \mapsto & jaune \end{cases}$$

Une autre numérotation des faces du dé conduirait ***à une autre variable aléatoire modélisant la même expérience***.

Les ***événements sont***, on le rappelle, ***des parties de l'univers*** Ω. L'événement « la face est jaune » est par exemple la partie $E = \{4;5;6\} \subset \Omega$. Autrement dit, $E = C^{-1}(jaune)$: les événements correspondant à des valeurs données d'une variable aléatoire ***sont les images réciproques de ces valeurs par la variable aléatoire***.

Une première partie du chapitre consistera à définir de la façon la plus générale possible les notions que nous venons d'entrevoir. Nous y étudierons notamment certaines situations conduisant à des variables aléatoires dont les propriétés sont fréquemment observées.

Dans une seconde partie, nous étudierons le cas particulier de situations conduisant à la définition de deux variables aléatoires distinctes (ou plus).

Enfin, nous préciserons le cas particulier et cependant très important des ***variables aléatoires à valeurs réelles***, c'est-à-dire celles dont les valeurs sont des nombres réels.

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini. On rappelle qu'un événement E est ***une partie de*** Ω, c'est-à-dire $E \subset \Omega$ ou encore $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ et que $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans

$[0;1]$ vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour deux événements ***incompatibles*** A et B - c'est-à-dire tels que $A \cap B = \emptyset$ -, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

I. Programme officiel

Variable aléatoire sur un univers fini

CONTENU	CAPACITÉS ET COMMENTAIRES
a) Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notations $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$.
Loi $\mathbb{P}_X$ de la variable aléatoire X.	L'application $\mathbb{P}_X$ est entièrement définie par la donnée des $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
b) Lois usuelles	
Loi uniforme.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{U}(E)$ où $E = X(\Omega)$.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(p)$. Interprétation : succès/échec d'une expérience.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*, p \in [0;1]$.	Notation $\mathcal{B}(n,p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remises dans un modèle d'urne.
c) Couples de variables aléatoires	
Couples de variables aléatoires.	
Loi conjointe, lois marginales.	La loi conjointe de X et de Y est la loi de $(X;Y)$. Les lois marginales de $(X;Y)$ sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.	
d) Variables aléatoires indépendantes	
Couples de variables aléatoires indépendantes.	
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour tout partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}\big((X;Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$.	

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une famille (finie) de n variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + X_2 + ... + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.	
Si X et Y sont indépendantes et si f est une application définie sur $X(\Omega)$, g une application définie sur $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.	La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.
e) Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire X.	Interprétation en terme de moyenne pondérée.
Relation $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})X(\omega)$.	
Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie de Ω, d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme, une loi de Bernoulli, une loi binomiale.	
Propriétés de l'espérance : linéarité, croissance.	Application au calcul de $\mathbb{E}(X)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
Théorème de transfert : $\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
f) Variance et écart-type	
Variance, écart-type.	Interprétation comme indicateur de dispersion.
Relation $\mathbf{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Relation $\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$. Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	

II. Variables aléatoires

II.1. Définitions

Définition 23.1

Soit U un ensemble. On appelle ***variable aléatoire*** toute application de Ω dans U.
Lorsque U est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite ***réelle***.

Notation

Soit $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire. Soit V une partie de U et u un élément de U.
On note $(X \in V)$ l'événement $X^{-1}(V)$ et $(X = u)$ l'événement $X^{-1}(\{u\})$.
Ici $X^{-1}(V)$ et $X^{-1}(\{u\})$ désignent des images réciproques.
Lorsque X est une variable aléatoire réelle, on note $(X \leqslant u)$ l'événement $X^{-1}(\{x \in U, x \leqslant u\})$.

Exemple : dans l'exemple donné en introduction, $(C = rouge)$ désigne l'événement $\{1\}$.
$(C = jaune)$ désigne l'événement $\{4; 5; 6\}$.

Remarque

L'ensemble d'arrivée est rarement précisé. Généralement, on le notera simplement $X(\Omega)$.
Comme Ω est un ensemble fini, $X(\Omega)$ est aussi un ensemble fini dont le cardinal est inférieur au cardinal de Ω.
Notamment, on peut numéroter les éléments de $X(\Omega)$ de sorte à ce que $\Omega = \{\omega_i, i \in [\![1; n]\!]\}$, $X(\Omega) = \{x_k, k \in [\![1; p]\!]\}$ avec $p \leqslant n$.

II.2. Loi d'une variable aléatoire

Définition 23.2

Soit X une variable aléatoire de (Ω, P) dans $X(\Omega)$.
On appelle ***loi de la variable aléatoire*** X que l'on note généralement $\mathbb{P}_X$, l'application

$$\mathbb{P}_X : \left\{ \begin{array}{lcl} X(\Omega) & \to & [0; 1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \end{array} \right.$$

On a donc : $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x\}\right) = \displaystyle\sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\omega)$

Exemple : donner la loi de la variable aléatoire C définie en introduction.

Propriété 23.3

$\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$ est un espace probabilisé. Notamment $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration

Remarque

IMPORTANT : plusieurs expériences aléatoires, pour lesquelles on définit plusieurs variables aléatoires, peuvent conduire ***aux mêmes espaces probabilisés*** $\big(X(\Omega), \mathbb{P}_X\big)$.
Par exemple, on jette une pièce de monnaie et on note X_1 la variable aléatoire qui vaut 0 si la pièce tombe sur *face* et 1 si elle tombe sur *pile*. Ou encore, on lance un dé et on note X_2 la variable aléatoire qui vaut 0 si le résultat est inférieur ou égal à 3 et qui vaut 1 si le résultat est supérieur ou égal à 4.

Dans les deux cas, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, $P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$. Les deux expériences aléatoires et les deux variables aléatoires ont beau être différentes, ***les lois sont identiques***.
Pour cette raison, les lois des variables aléatoires seront souvent étudiées indépendamment de toute expérience aléatoire concrète.

Ex. 23.1 On lance un dé, bien équilibré, n fois d'affilée. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors de ces n lancers.

1) Préciser l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2) Le dé étant bien équilibré, on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.
   Expliquer comment elle se traduit pour les événements élémentaires de Ω.
3) Préciser l'ensemble image $X(\Omega)$.
4) Donner la loi de X, c'est-à-dire, pour tout $x \in X(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$.

Ex. 23.2 Soit n un entier strictement positif, soit S une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que

- $S(\Omega) = [\![1; 2n]\!]$;
- $\forall s \in [\![1; 2n]\!], \mathbb{P}(S = s) = \dfrac{s}{n(2n+1)}$.

1) Pourquoi peut-on affirmer que la loi de S est bien définie ?
2) Calculer les probabilité suivantes :
   $\mathbb{P}(S \leqslant n)$ $\mathbb{P}(S > n)$ $\mathbb{P}(S \text{ est pair})$ $\mathbb{P}\left((S \leqslant n/2) \cup (S > 3n/2)\right)$
3) Pour chacune des probabilités de l'exercice précédent, donner un développement asymptotique en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

II.3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition 23.4

Soit U, V deux ensembles, $X : \Omega \to U$ une variable aléatoire et $f : U \to V$ une fonction.
$Y = f \circ X : \Omega \to V$ est une variable aléatoire appelée ***image de la variable aléatoire*** X ***par la fonction*** f.
On note habituellement $f(X)$ cette variable aléatoire et $\mathbb{P}_{f(X)}$ la loi associée.

Remarque

$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f(X) = y\big) = \mathbb{P}_X\big(f^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}_X(x)$ mais aussi
$\mathbb{P}_{f(X)}(y) = \mathbb{P}\big(f \circ X = y\big) = \mathbb{P}\big((f \circ X)^{-1}(\{y\})\big) = \displaystyle\sum_{\omega \in (f\circ X)^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(\omega)$.

Ex. 23.3 (Cor.) Soit n un entier strictement positif. Une urne contient n boules noires et n boules rouges.
On tire toutes les boules, une à une, sans remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués jusqu'à obtenir la dernière boule rouge et Y le nombre de boules noires restant dans l'urne lorsque la dernière boule rouge a été tirée.