V.2. Supplémentaire d'un espace vectoriel

Proposition 15.35

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1) Il existe un supplémentaire G de F dans E, autrement dit, il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \oplus G = E$.
2) Si F est non trivial (c'est-à-dire $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$), alors la réunion de toute base de F avec toute base d'un supplémentaire G de F dans E est une base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
3) $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration

1) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathcal{F}$ par une famille $\mathcal{G}$ extraite de $\mathcal{B}$ pour obtenir une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de E.
   Soit $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$. Alors $E = F \oplus G$. En effet :
   - si $u \in F \cap G$, alors u est combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}$ et combinaison linéaire de vecteur $\mathcal{G}$. La différence de ces deux combinaisons linéaires est donc une combinaison linéaire ***nulle*** de vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ de E. Tous ses coefficients sont donc nuls, et $u = 0_E$.
   - $F + G = \text{Vect}(\mathcal{F}) + \text{Vect}(\mathcal{G}) = \text{Vect}(\mathcal{B}')$ d'après la propriété 15.16 de génération de la somme.
     Donc $F + G = E$.
2) La démonstration est similaire à la démonstration précédente.
3) C'est une conséquence directe du point précédent : $\dim E$ est le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}'$ qui est lui-même égal à la somme du nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ et du nombre de vecteurs de $\mathcal{G}$. Donc $\dim E = \dim F + \dim G$.

Proposition 15.36

F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie si et seulement si $\begin{cases} F \cap G &= \{0_E\} \\ \dim F + \dim G &= \dim E \end{cases}$

Démonstration

L'implication découle de la proposition précédente.
Démontrons la réciproque : $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux bases de F et G respectivement (de dimensions finies puisque E est de dimension finie). Soit $\mathcal{B}$ la famille formée des p vecteurs de $\mathcal{F}$ puis de ceux de $\mathcal{G}$. $\mathcal{B}$ comporte par hypothèse $n = \dim E$ vecteurs.

Montrons que c'est une famille libre : $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i = 0_E \Rightarrow \sum_{i=1}^{p}\lambda_i b_i = \sum_{i=p+1}^{n}(-\lambda_i)b_i$. Ce dernier vecteur appartient à F et G donc est nul. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant libres, les coefficients λ_i sont tous nuls ce qui garantit la liberté de $\mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est une base de E d'après 15.28.
Donc $F+G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) + \mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E$ ce qui achève la démonstration.

V.3. Formule de Grassmann

Proposition 15.37

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Alors $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

Démonstration

$F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de F donc il existe un supplémentaire F' de $F\cap G$ dans F.
Montrons que $F+G = F'\oplus G$.

- Soit $u\in F'\cap G$. $u\in F'$, donc en particulier $u\in F$. Or $u\in G$, donc $u\in F\cap G$.
  Ainsi $u\in F'\cap(F\cap G)$. Or F' et $F\cap G$ sont supplémentaires dans F. Donc $u = 0_F = 0_E$.
- Soit $u\in F+G$. Il existe donc $v\in F$ et $w\in G$ tels que $u = v+w$. Or $F = F'\oplus(F\cap G)$ donc il existe $v'\in F'$ et $w'\in F\cap G$ tels que $v = v'+w'$.
  Donc $u = (v'+w')+w = v'+(w'+w)$ est somme d'un vecteur de F' et d'un vecteur de G.
  Donc $F+G\subset F'+G$ et l'inclusion réciproque est évidente puisque F' est un sous-espace vectoriel de F.

On a donc $\dim(F+G) = \dim F' + \dim G$ d'une part, et par définition de F',
$\dim F = \dim(F\cap G) + \dim F'$. Donc $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

VI. Applications linéaires en dimension finie

Dans tout ce paragraphe, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$.

VI.1. Définition à l'aide d'une base de l'espace de départ

Théorème 15.38

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; \ldots; u_n)$ une base E et $\mathcal{F} = (v_1; v_2; \ldots; v_n)$ ***une famille quelconque de vecteurs de*** F, il existe ***une unique application linéaire*** ϕ telle que
$\forall k\in[\![1;n]\!], \phi(u_k) = v_k$.

Démonstration

Analyse : soit ϕ une application linéaire répondant aux hypothèses de l'énoncé. $\mathcal{B}$ étant une base de E, quel que soit le vecteur $u\in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1; \ldots; x_n)$ de coordonnées

de u dans $\mathcal{B}$. D'où :
$\phi(u) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(u_i)$ car ϕ est linéaire.
D'où $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ et ϕ est donc unique si elle existe.
Synthèse : on définit ϕ comme l'application qui à tout vecteur de $u \in E$ de coordonnées $(x_1; ...; x_n)$ dans $\mathcal{B}$ associe $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. On vérifie qu'elle est bien linéaire.

Remarque

Le théorème précédent signifie qu'***en dimension finie, il suffit de donner les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ pour définir entièrement une application linéaire***.

Ex. 15.16
Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $\phi(1;0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\phi(0;1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(-1;2)$?. . . . .
Quelle est l'image par ϕ du vecteur $(x;y)$?. . . . .

Corollaire 15.39

Si $E = E_1 \oplus E_2$, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et à E_2.

VI.2. Image d'une famille par une application linéaire

Définition 15.40 (Image d'une famille par une application linéaire)

Étant données une famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de E et une application linéaire $f : E \to F$, on appelle ***image de la famille $\mathcal{E}$ par*** f la famille des images par f des vecteurs de $\mathcal{E}$.
Autrement dit, l'image de la famille $\mathcal{E}$ est la famille de vecteurs de F définie par

$$(f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)) = (f(e_i))_{i\in[\![1;n]\!]}$$

Notation

On note $f(\mathcal{E})$ l'image de la famille $\mathcal{E}$ par f.

Proposition 15.41 (Image d'une famille génératrice par une application linéaire)

Étant donnée une application linéaire $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille génératrice de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille génératrice de*** $\operatorname{Im} f$.

Démonstration

Il s'agit de montrer que tout vecteur de $\operatorname{Im} f$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de $f(\mathcal{E})$.
Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de E, donc $\exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
On en déduit que
$y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ par linéarité de f.
Donc y est combinaison linéaire des vecteurs de $f(\mathcal{E})$.

Corollaire 15.42

Étant donnée $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\operatorname{Im} \phi$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$:

$$\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$$

Corollaire 15.43

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \min(\dim E, \dim F)$$

Démonstration

Il s'agit de montrer que $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \dim E$ et que $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \dim F$.
Soit $\mathcal{B} = (u_1; u_2; ...; u_n)$ une base E.

- d'après le corollaire précédent, $\operatorname{Im} \phi = \operatorname{Vect}(\phi(u_1); \phi(u_2); ...; \phi(u_n))$. Or, on peut extraire de toute famille génératrice d'un espace vectoriel une base de cet espace vectoriel. Donc $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant n = \dim E$.
- $\operatorname{Im} \phi$ est un sous-espace vectoriel de F, donc $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \dim F$.

Proposition 15.44 (Image d'une famille libre par une injection linéaire)

Étant donnée une application linéaire ***injective*** $f : E \to F$, si $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est ***une famille libre de*** E, alors $f(\mathcal{E})$ est ***une famille libre de*** F.

Démonstration

Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$.
Par linéarité, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$. Or f est injective, donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, et la famille $\mathcal{E}$ est libre, donc tous les λ_i sont nuls.

Donc $f(\mathcal{E})$ est une famille libre.

Proposition 15.45 (Image d'une base par un isomorphisme)

Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ ***une base de*** E et $f : E \to F$ une application linéaire.
f est un ***bijective*** si et seulement si $f(\mathcal{E})$ est ***une base de*** F.

Démonstration

$\Rightarrow$: supposons que f est un isomorphisme.
D'après les propositions précédentes,

- $\mathcal{E}$ est une famille génératrice de E, donc $f(\mathcal{E})$ est génératrice de $\operatorname{Im} f = F$ (f est surjective) ;
- $\mathcal{E}$ est une famille libre, f est injective, donc $f(\mathcal{E})$ est libre.

$\Leftarrow$: réciproquement, si $f(\mathcal{E})$ est une base de F, alors

- f est surjective. En effet, quel que soit $y \in F$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$ ($f(\mathcal{E})$ génératrice de F),
  donc $y = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$ appartient à $\operatorname{Im} f$.
- f est injective. En effet, soit $x \in E$ tel que $f(x) = 0_F$. En décomposant x dans $\mathcal{E}$ et en utilisant la linéarité de f on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$. On en déduit que les λ_i sont nuls ($f(\mathcal{E})$ est libre) donc que x est le vecteur nul.

Corollaire 15.46

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un isomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$;
- $\dim E = \dim F$.

E et F sont alors dits isomorphes.

Démonstration

Supposons qu'il existe un isomorphisme ϕ de E vers F, soit $\mathcal{E}$ une base de E.
D'après le théorème précédent, $\phi(\mathcal{E})$ est une base de F. Donc $\dim E = \dim F$.
Réciproquement, si $\dim E = \dim F$, alors étant données deux bases (e_i) et (f_i) de E et F, l'application définie par $\forall i, \phi(e_i) = f_i$ est un isomorphisme puisque l'image d'une base de E est une base de F.

VI.3. Rang d'une application linéaire

Définition 15.47

On appelle ***rang d'une application linéaire*** entre deux espaces vectoriels de dimension finie ***la dimension de son image***.

Notation

On note : $\operatorname{rg} \phi = \dim \operatorname{Im} \phi$.

Remarque

Le rang d'une application linéaire ϕ est d'après le corollaire 15.42 le rang de la famille des images par ϕ des vecteurs d'une base de son espace de départ.

Propriété 15.48

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

Démonstration

Il s'agit de montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$ et que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
Nous avons vu (théorème 12.20) dans le premier chapitre sur les espaces vectoriels que quelle que soit l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(A, B)$, quel que soit le sous-espace vectoriel A' de A, $f(A')$ est un sous-espace vectoriel de B.
Soit $U = \operatorname{Im} u = u(E)$, $V = \operatorname{Im} v = v(F)$. $\operatorname{rg} v \circ u = \dim v \circ u(E) = \dim v(U)$.

- D'après le corollaire 15.43, on a donc $\operatorname{rg} v \circ u \leqslant \dim U = \operatorname{rg} u$.
- De plus, U est un sous-espace vectoriel de F, donc $v(U)$ est un sous-espace vectoriel de $v(F) = V$. Donc $\operatorname{rg} v \circ u \leqslant \dim V = \operatorname{rg} v$.

Propriété 15.49

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Si u est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$.
Si v est bijective, alors $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.

Démonstration

- Supposons u bijective : alors
$v \circ u(E) = v(F)$ donc $\operatorname{rg} v \circ u = \dim v \circ u(E) = \dim v(F) = \operatorname{rg} v$.
- Supposons v bijective. Alors sa restriction à $\operatorname{Im} u$ (que l'on continuera à noter v) est aussi bijective de $\operatorname{Im} u$ sur $v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} v \circ u$. Donc
$\operatorname{rg} v \circ u = \dim v \circ u(E) = \dim v\big(u(E)\big) = \dim u(E) = \operatorname{rg} u$ d'après le corollaire 15.46.

Théorème 15.50 (Formule du rang)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et

$\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} \phi + \dim \operatorname{Im} \phi = \dim \operatorname{Ker} \phi + \operatorname{rg} \phi$$

Démonstration

$\operatorname{Ker} \phi$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, donc $\operatorname{Ker} \phi$ est de dimension finie p et possède une base $(e_1; \ldots; e_p)$. D'après le théorème 15.20 de la base incomplète on peut compléter cette base en une base $\mathcal{B} = (e_1; \ldots; e_n)$ de E.

Soit $V = \operatorname{Vect}(e_{p+1}; \ldots; e_n)$.

- La restriction de ϕ à V est injective. En effet : $u \in \operatorname{Ker} \phi_{|V} \Leftrightarrow (\phi(u) = 0_F \textbf{ et } u \in V) \Leftrightarrow u \in V \cap \operatorname{Ker} \phi$. Donc $u = 0_E$.
- $\operatorname{Im} \phi = \phi(E) = \phi\big(\operatorname{Vect}(e_1; \ldots; e_n)\big) = \operatorname{Vect}(\phi(e_{p+1}); \ldots; \phi(e_n)) = \phi(V)$ car $\phi(e_1) = \ldots = \phi(e_p) = 0_F$.

Donc $(\phi(e_{p+1}); \ldots; \phi(e_n))$ est l'image par l'isomorphisme $\phi_{|V} : V \to \operatorname{Im} \phi$ d'une base de V : c'est une base de $\operatorname{Im} \phi$.

D'où $\dim \operatorname{Im} \phi = n - p = \dim E - \dim \operatorname{Ker} \phi$.

Corollaire 15.51

Si $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une ***forme linéaire*** non identiquement nulle alors $\dim \operatorname{Ker} \phi = \dim E - 1$

Démonstration

C'est la formule du rang où $\operatorname{rg} \phi = 1$ puisque $\dim \operatorname{Im} \phi \leqslant \dim \mathbb{K} = 1$ d'une part, et que $\dim \operatorname{Im} \phi > 0$, ϕ n'étant pas identiquement nulle d'autre part.

VI.4. Caractérisation des isomorphismes

Théorème 15.52

Soient E et F des espaces vectoriels de ***même*** dimension finie et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\phi \text{ injective} \Leftrightarrow \phi \text{ surjective} \Leftrightarrow \phi \text{ bijective}$$

Démonstration

- Supposons ϕ injective. Alors d'après le théorème du rang, $\dim E = \operatorname{rg} \phi = \dim F$. Donc d'après 15.34, $\operatorname{Im} \phi = F$.
- Supposons ϕ surjective. Alors d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} \phi = \dim E - \operatorname{rg} \phi = 0$. Donc $\operatorname{Ker} \phi = \{0_E\}$, donc ϕ est injective donc bijective.
- Si ϕ est bijective, elle est évidemment injective.

Ex. 15.17 (Cor.) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_X^{X+1} P(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

1) Montrer que $\deg \phi(P) = \deg P$.

2) Montrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3) On note B_i l'image réciproque par ϕ de X^i.
   Calculer B_0, B_1, B_2, B_3.
4) Montrer que pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $B_i(X+1) - B_i(X) = iX^{i-1}$.
5) Déduire des questions précédentes une expression simplifiée pour $p \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2$.