III. Séries à termes positifs

III.1. Définition

Définition 20.13 (Série à termes positifs)

On dit que $\sum u_n$ est ***une série à termes positifs*** ou plus simplement est ***à termes positifs*** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

III.2. Théorème de convergence monotone

Théorème 20.14

Une série à termes positifs converge si et seulement si elle est majorée.

Démonstration

La série étant à termes positifs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1} \geqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La suite des sommes partielles est donc croissante.
Or une suite croissante est convergente si et seulement si elle est majorée d'après le théorème 8.51 de convergence monotone.

III.3. Comparaison entre séries et intégrales

Théorème 20.15

Soit f une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration

f est décroissante donc
$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k; k+1], f(k) \geqslant f(t) \geqslant f(k+1)$. On a donc :

- $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.
- De même :
  $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t = f(1) + \int_1^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

Méthode

Nous avons déjà utilisé le théorème précédent pour déterminer la nature de la ***série harmonique*** $\sum \frac{1}{n}$.
En pratique, comme dans l'exemple 20.6, ce théorème permet dans le cas où la série est divergente d'obtenir ***non seulement la divergence de la série***, mais aussi ***un équivalent*** de

$\sum_{k=1}^{n} f(k)$ lorsque $n \to +\infty$.
Dans le cas des séries convergentes en revanche, ce théorème permet de majorer la série donc de prouver sa convergence, mais ne donne pas la valeur de sa somme.

Ex. 20.10 (Cor.) Soit $r \in \mathbb{R}$.
Déterminer suivant la valeur de r la nature de la série $S = \sum \frac{1}{n^r}$ et donner un équivalent de S_n lorsqu'elle diverge.

III.4. Séries de Riemann

Définition 20.16 (Séries de Riemann)

On appelle ***série de Riemann*** toute série de la forme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Propriété 20.17

La série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

La démonstration a été faite à l'exercice 20.10.

III.5. Théorèmes de comparaisons entre séries *à termes positifs*

Proposition 20.18 (Majoration/minoration)

Si u et v sont positives à partir d'un certain rang et si $u \leqslant v$ à partir d'un certain rang alors

- $\sum v_n$ converge$\Rightarrow \sum u_n$ converge ;
- $\sum u_n$ diverge$\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

Démonstration

Notons $N \in \mathbb{N}$ un rang satisfaisant $\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et m le minimum de $\sum_{k=0}^{N} u_n$ et de $\sum_{k=0}^{N} v_n$. On a alors

$\forall n \geqslant N, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} v_k$.

De plus la suite $\sum u_n$ est croissante à partir du rang N, donc si $\sum v_n$ converge, elle est croissante (à partir d'un certain) et majorée donc convergente.

De même, si u diverge, $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ et $,\sum_{k=0}^{n} v_k \geqslant \sum_{k=0}^{N} v_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k$ diverge d'après le théorème des gendarmes.

Remarque

Dans la proposition précédente, si l'inégalité est vérifiée à partir du rang 0, on peut de plus affirmer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ en cas de convergence.

Proposition 20.19 (Nature de séries à termes *positifs équivalents*)

Si u et v sont positives et si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$ donc à partir d'un certain rang, $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$. Les suites étant par ailleurs positives (à partir d'un certain rang) le théorème précédent permet d'affirmer qu'en cas de divergence de $\sum v_n$, $\frac{\sum v_n}{2}$ diverge aussi, donc $\sum u_n$ aussi.

De même, en cas de convergence de $\sum v_n$, $\frac{3\sum v_n}{2}$ converge aussi, donc $\sum u_n$ aussi.

III.6. Exemples

Ex. 20.11 (Cor.) Soit x la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Montrer que x_n converge et en déduire qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Ex. 20.12 (Cor.) Nature des séries suivantes :

$$S = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n^3 - 1}} \qquad T = \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad U = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n + \ln n} \qquad V = \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \qquad W = \sum n^3 e^{-n}$$

III.7. Complément : comparaison à une série géométrique

Proposition 20.20 (Critère de d'Alembert)

Soit $S = \sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $r \in]0;1[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1$ alors S converge ;
- si à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors S diverge.

Démonstration

- Dans le premier cas, une récurrence immédiate qu'à partir de ce rang $u_{N+p} < r^p u_N$. Or $r < 1$, donc d'après 20.11, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_N r^N r^p$ converge et d'après 20.18, la série S, à termes positifs, converge.
- Dans le second cas, la suite u est positive strictement croissante à partir d'un certain

rang, donc elle ne tend pas vers 0. La série S diverge donc grossièrement.

Ex. 20.13 (Cor.)

1) Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{n^n}{(2n)!}$?

2) On pose $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$ (avec la convention $0^0 = 1$).
   Montrer que $S \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ puis majorer S.