IV. Séries absolument convergentes

IV.1. Définition

Définition 20.21 (Convergence absolue)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ est ***absolument convergente*** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

IV.2. Propriété

Théorème 20.22

Toute série absolument convergente est convergente. De plus, on a alors pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Soit $S = \sum u_n$ une série absolument convergente.

- Si u est une suite réelle, pour tout entier n, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ donc $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$. Comme $\sum |u_n|$ est convergente, $\sum u_n + |u_n|$ l'est aussi.
  Or $\sum u_n = \sum u_n + |u_n| - \sum |u_n|$ est la différence de deux suites convergentes, donc est convergente.
- Si u est une suite complexe, le point précédent s'applique, en utilisant l'inégalité triangulaire, à ses parties réelles et imaginaires. À nouveau, la série $\sum u_n$ est donc convergente.
- Enfin, soient $N, p \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire, $0 \leqslant \left| \sum_{n=N}^{N+p} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{N+p} |u_n|$.
  Or les séries étant convergentes, les restes sont définis donc, par passage à la limite $p \to +\infty$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} |u_n|$$

Méthode

Lorsqu'une série ***n'est pas à termes positifs***, le théorème précédent donne souvent un moyen simple de démontrer sa convergence.
Attention cependant ! Il existe des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes !

Ex. 20.14 (Cor.) Soit $S = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1) S est-elle absolument convergente ?

2) Montrer que S est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Ex. 20.15 (Cor.) Nature et somme en cas de convergence de $S_n = \displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Ex. 20.16 (Cor.) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $S(z) = \displaystyle\sum n^2 z^n$.

1) Pour quelles valeurs de z la série est-elle absolument convergente ?
2) Calculer, dans le cas où elle est absolument convergente, sa somme.

IV.3. Corollaire

Corollaire 20.23

Si (u_n) est une suite complexe, (v_n) une suite de réels positifs, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

V. Applications

V.1. Développement décimal d'un nombre réel

Définition 20.24 (Développement décimal)

On appelle ***développement décimal*** d'un nombre réel r toute écriture de r sous la forme

$$r = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n 10^{-n}$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant n_0$, $a_n \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Remarque

Le développement décimal d'un nombre réel n'est rien d'autre que son écriture décimale habituelle à l'aide des chiffres arabes.

Ex. 20.17 (Cor.) Que valent $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 9.10^{-n}$ et $b = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 142857.10^{-6n}$?

Définition 20.25 (Développement décimal propre)

On dit que le développement décimal d'un nombre réel est ***propre*** si pour tout $N \geqslant n_0$, il existe $n \geqslant N$ tel que $a_n \neq 9$.

Remarque

Autrement dit, le développement décimal d'un nombre réel est propre s'il ne se termine pas par une suite infinie de 9.

Théorème 20.26 (Admis conformément au programme)

Tout nombre réel possède un unique développement décimal propre.

Ex. 20.18 (Cor.) Montrer que le développement décimal d'un nombre réel est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ce nombre réel est rationnel.

V.2. Pour le plaisir : formule de Stirling

Ex. 20.19 (Cor.) On appelle intégrales de Wallis les intégrales de la forme

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer W_0, W_1, W'_0 et W'_1.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n = W'_n$.
3) Obtenir une formule de récurrence à l'aide d'une intégration par partie.

Ex. 20.20 Les exercices 20.19 et 20.11 ont conduit aux résultats suivants :

- $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ vérifie pour $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$;
- il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exprimer W_{2n} à l'aide de factoriels puis montrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

VI. Correction des exercices

Cor. 20.3 : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée au segment $[0;1]$,

$\left| e^1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\exp^{(k)}(0) \right| \leqslant \dfrac{e}{(n+1)!}$ car la fonction exp est majorée par e sur $[0;1]$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \exp^{(k)}(0) = 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$.

Cor. 20.4 : C'est encore l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exp sur le segment $[0;x]$ ou $[x;0]$ suivant le signe de x. On en déduit comme dans l'exercice précédent que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) = e^x$.

Cor. 20.5 : La suite $u_n = \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ est 7−périodique, donc la suite extraite $\left(\sin\left((7n+1)\frac{2\pi}{7}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$. Donc,

Ou bien la suite u ne possède pas de limite,

Ou bien sa limite vaut $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$.

Dans les deux cas la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(n\frac{2\pi}{7}\right)$ ***diverge grossièrement*** puisque son terme général ne tend pas vers 0.