Maths - Feuille d'exos n° 24

Intégration

I. Cours

On pourra aussi penser aux astuces suivantes :

- dans une intégrale dépendant d'un paramètre entier, une intégration par partie peut permettre d'obtenir une relation de récurrence ;
- lorsqu'on cherche un équivalent d'une intégrale, une intégration par partie peut là encore être utile ;
- ***linéariser les polynômes trigonométriques*** à l'aide des formules d'Euler ;
- ***décomposer les fractions rationnelles en éléments simples*** (voir exercice 24.4) ;
- exprimer $\cos(x), \sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ puis effectuer un changement de variable ;
- exprimer $\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ en fonction de $u = e^x$ puis effectuer un changement de variable.

Ex. 24.1 (Cor.) Calculer $I_1(x) = \displaystyle\int^x \frac{\mathrm{sh}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t}\mathrm{d}t$ et $I_2(x) = \displaystyle\int^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$

Ex. 24.2 (Cor.) On appelle intégrales de Wallis les intégrales de la forme

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad W'_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

a. Calculer W_0, W_1, W'_0 et W'_1.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, W_n = W'_n$.

c. Obtenir une formule de récurrence à l'aide d'une intégration par partie.

Ex. 24.3 (Cor.) Montrer que $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

Ex. 24.4 (Cor.) Calculer $J = \displaystyle\int^x \frac{t^2+1}{(t-1)(t^2+2t+5)}\mathrm{d}t$

Méthode : Règles de Bioche

Dans une intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$:

- si $t \leftrightarrow -t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \cos(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi - t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \sin(t)$ peut s'avérer intéressant ;
- si $t \leftrightarrow \pi + t$ laisse $f\big(\cos(t), \sin(t), \tan(t)\big)\mathrm{d}t$ invariante, le changement de variable $u = \tan(t)$ peut s'avérer intéressant.

Dans le cas d'intégrales de fonctions hyperboliques, les mêmes règles s'appliquent en remplaçant cos par ch, etc...

Ex. 24.5 (Cor.) Calculer des primitives de

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad et \quad g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

en indiquant l'ensemble de validité des primitives obtenues.

Théorème 24.1

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$ alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Méthode

Ce théorème peut servir :

- pour calculer une intégrale ;
- pour déterminer la limite d'une somme.

Ex. 24.6 (Cor.) Calculer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k}$.

II. Primitives et intégrales

Ex. 24.7 Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.

b. Montrer que si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

c. Montrer que si f est T-périodique, alors $\int_{a}^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_{b}^{b+T} f(t)\mathrm{d}t$.

Ex. 24.8 Linéariser $\cos^3(x)$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$.

Ex. 24.9 Calculer : $I = \int_0^1 \sqrt{t}(2-t)\mathrm{d}t \quad J = \int_0^3 |t-2|\mathrm{d}t$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(t)\mathrm{d}t \quad L = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad M = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+3}}$$

$$N = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \quad P = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} \quad Q = \int^x \sin^3(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$$

$$R = \int^x \tan(t)\mathrm{d}t \quad S = \int^x t\,\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t \quad T = \int^x \ln^2(t)\mathrm{d}t$$

$$U = \int^x \mathrm{ch}^2(t)\mathrm{d}t \quad V = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}} \quad W = \int^x \frac{2-t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$$

$$X = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \quad Y = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{5\,\mathrm{ch}(t) - 4\,\mathrm{sh}(t)} \quad Z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)+\sin(2t)}$$

Ex. 24.10 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_1^e (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I_0 et I_1.

b. Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ I_{n+1} en fonction de I_n.

c. Calculer I_2, I_3 et I_4.

d. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $I_n = (-1)^n(a_n e - n!)$.

e. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive.

f. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

g. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{a_n}$ et en déduire une approximation rationnelle de e à 10^{-3} près.

Ex. 24.11

a. Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$ est bien définie.

b. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer les expressions de F sur $[0; 2]$.

d. Montrer que F n'est pas partout dérivable.

Ex. 24.12 (Cor.) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient

$$f'(t) - f(t) = e^t \int_0^1 f(u)\mathrm{d}u$$

Ex. 24.13 (Cor.) Résoudre l'équation différentielle $tf'(t) - f(t) + 3t^2 f(t)^2 = 0$ en donnant les intervalles sur lesquels la solution est valable.
[Indication : montrer d'abord que sur tout intervalle où f ne s'annule pas, $g(t) = \frac{t}{f(t)}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.]

III. Sommes de Riemann, méthodes numériques

Ex. 24.14 Déterminer les limites des suites :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{k^2+n^2}$$

Ex. 24.15 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Démontrer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

b. ***Méthode des rectangles***

Majorer l'erreur commise en approximant $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right).$$

c. ***Méthode des trapèzes***

Majorer l'erreur commise en approximant $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ par

$$T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{(b-a)}{n}\right)}{2}.$$

IV. Pour finir

Ex. 24.16 Soient $f : x \in]0;+\infty[\mapsto f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ et $F : x \in]0;+\infty[\mapsto \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est bien définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

b. Étudier F et montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq 0$.

c. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[, F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

d. Montrer que $\forall x \in]0;1]$,
$$\frac{1 + x\ln(x) - x}{2} \leqslant F(x) \leqslant 1 + x\ln(x) - x.$$

e. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ existe et donner un encadrement de cette limite.
Dans la suite, on note $C = \lim\limits_{x\to 0} F(x)$. Elle est connue sous le nom de ***constante de Catalan***.

f. Montrer que $C = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

g. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$,
$$F(x) = \mathrm{Arctan}(x)\ln(x) - \int_1^x \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

h. Montrer que $C = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\mathrm{d}t$.

i. Montrer que $\forall t \in [0;1], \forall n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} \leqslant \mathrm{Arctan}(t) \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1}.$$

j. En déduire que $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

k. Représenter graphiquement F.

Ex. 24.17 (Cor.) ***Centrale 98***[**] Étudier la fonction $I : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ (notamment ensemble de définition, dérivée, limites aux bornes).
Tracer sa représentation graphique.